МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. К. Хеннер, Т. С. Белозёрова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:

ПРИЛОЖЕНИЯ К ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Допущено методическим советом Пермского государственного национального исследовательского университета в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Физика», «Прикладная математика и физика», «Нанотехнологии и микросистемная техника», «Радиофизика» и по направлению подготовки магистров «Физика»

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2016

УДК 517.58
ББК 22.311
Х38

В. К. Хеннер

Х38

Дифференциальные уравнения: приложения к вариационному исчислению: учеб. пособие / В. К. Хеннер, Т. С. Белозёрова; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2016. – 91 с.

ISBN 978-5-7944-2719-6

В учебном пособии достаточно подробно рассмотрены теория и приложения вариационного исчисления. Представленный материал может быть использован как дополнение к курсу "Дифференциальные уравнения". Издание содержит подробный разбор ключевых математических и физических задач, а также задания для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов физического факультета всех специальностей и направлений подготовки.

Ил. 12. Библиогр. 6 назв.

УДК 517.58
ББК 22.311

Печатается по решению редакционно-издательского совета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: лаборатория физики и механики мягкого вещества Ин-та механики сплошных сред УрО РАН (рецензент – д. ф.-м. н., проф. ***Ю. Л. Райхер***); к. ф.-м. н., доц. кафедры «Общая физика» Перм. нац. исслед. политех. ун-та ***А. В. Перминов***

ISBN 978-5-7944-2719-6

Оглавление

1. Функционал. Близость кривых. Непрерывность функционала

1.1. Понятие функционала

Определение 1.1. Если *M* – множество функций $y(x)$ и каждой функции $y(x)$, принадлежащей *M*, ставится в соответствие *число V*, то переменная величина *V* называется *функционалом*, зависящим от *функции* $y(x)$. Функционал записывается как $V[y(x)]$. Множество *M* функций $y(x)$, на котором определен функционал $V[y(x)]$, называется *областью задания функционала*.

Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются *вариационными задачами*.

Вариационное исчисление начало развиваться с 1696 г., основной вклад в его становление внес Леонард Эйлер (1707-1783), которого с полным основанием можно считать создателем вариационного исчисления.

В приложениях наиболее интересны *непрерывные* функционалы. Рассмотрим несколько примеров.

1. *Длина кривой*

Рассмотрим плоскую кривую $y = y(x)$, соединяющую две заданные точки $P(x_0, y_0)$ и $Q(x_1, y_1)$ (рис. 1).

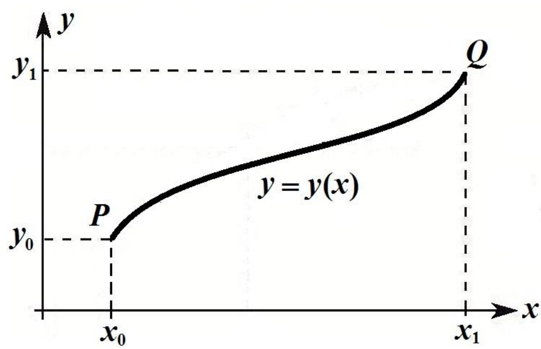


Рис. 1. Кривой $y = y(x)$ соответствует функционал $l[y(x)]$

Длина кривой – это функционал, зависящий от функции $y(x)$:

$$l\left[y(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2}\,dx. \qquad (1.1)$$

2. *Площадь поверхности*.

Рассмотрим поверхность $z = z(x, y)$, изображенную на рис. 2 (D – проекция поверхности на плоскость xy).

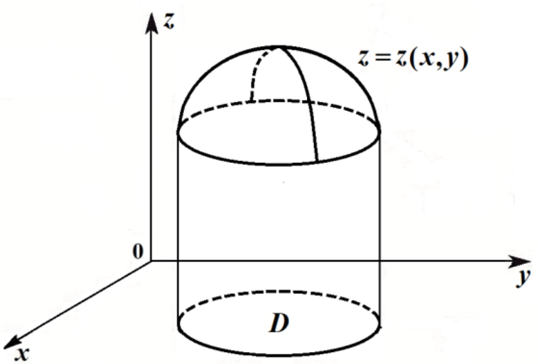


Рис. 2. Функционал $S\left[z(x, y)\right]$ как площадь поверхности $z = z(x, y)$

Площадь поверхности $z = z(x, y)$ определяется интегралом

$$S = \iint_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_x)^2}\,dxdy, \qquad (1.2)$$

который является функционалом $S\left[z(x, y)\right]$.

Эта задача подводит к рассмотрению функционалов, зависящих от функций нескольких переменных:

$$V\left[y(x_1, x_2, ..., x_n)\right].$$

Аналогично можно рассматривать и функционалы, зависящие от нескольких функций одной или нескольких переменных:

$$V\left[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\right].$$

3. *Длина кривой в трехмерном пространстве*

В качестве примера рассмотрим кривую, заданную в пространстве параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Длина кривой в трехмерном пространстве:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt \qquad (1.3)$$

является функционалом $l\left[x(t), y(t), z(t)\right]$.

Все рассмотренные формулы имеют интегральную форму. Именно такие выражения встречаются в физических и геометрических приложениях, в которых ставится задача нахождения кривых, поверхностей и т. д., на которых достигается наибольшее или наименьшее значение функционала.

1.2. Близость кривых и непрерывность функционала

Для дальнейшего надо будет рассматривать значения функционала на близких кривых.

Определение 1.2. *Вариацией* или *приращением* δy аргумента $y(x)$ функционала $V\left[y(x)\right]$ называется разность между двумя функциями $y(x)$ и $y_0(x)$, принадлежащими выбранному классу *M* функций,

$$\delta y = y(x) - y_0(x), \qquad (1.4)$$

где $y_0(x)$ – некоторая фиксированная функция, $y(x)$ – произвольная функция.

Определение 1.3. Функционал $V\left[y(x)\right]$ называется *непрерывным* на интервале $\left[x_1, x_2\right]$, если на этом интервале малому изменению $y(x)$ соответствует малое изменение функционала

$V[y(x)]$, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left|V[y(x)] - V[y_0(x)]\right| < \varepsilon$$

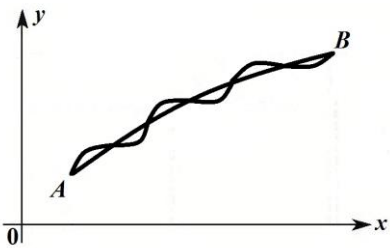
при $|y(x) - y_0(x)| < \delta$ и при всех $x \in [x_1, x_2]$.

Если в функционал входит производная y', то малости $|y(x) - y_0(x)|$ обычно недостаточно, необходима также и малость $|y'(x) - y_0'(x)|$. Иногда же оказывается необходимым считать близкими только те функции, для которых малы модули каждой из разностей $|y(x) - y_0(x)|$, $|y'(x) - y_0'(x)|$, $|y''(x) - y_0''(x)|, \ldots,$ $\left|y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)\right|$. В связи с этим приходится ввести следующие определения близости кривых $y = y(x)$ и $y = y_0(x)$.

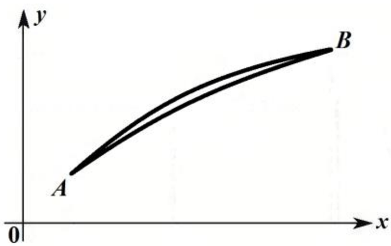
Кривые $y(x)$ и $y_0(x)$ близки в смысле близости нулевого порядка на интервале $[x_1, x_2]$, если модуль разности $|y(x) - y_0(x)|$ мал при всех $x \in [x_1, x_2]$.

Кривые $y(x)$ и $y_0(x)$ близки в смысле близости k-го порядка на интервале $[x_1, x_2]$, если при всех $x \in [x_1, x_2]$ малы все модули разностей

$$|y(x) - y_0(x)|,\ |y'(x) - y_0'(x)|,\ \ldots,\ \left|y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)\right|.$$



а



б

Рис.3. К понятию близости кривых. Кривые, близкие в смысле близости: *а* – нулевого порядка; *б* – первого порядка.

На рис.3, *а* изображены кривые, близкие в смысле близости нулевого порядка, но не близкие в смысле близости первого порядка, так как их ординаты близки, а направления касательных отличаются весьма значительно. На рис. 3, *б* изображены кривые, близкие в смысле близости первого порядка.

Теперь можно уточнить понятие непрерывности функционала.

Определение 1.3'. Функционал $V\left[y(x)\right]$ *непрерывен* на интервале $\left[x_1, x_2\right]$ при $y = y_0(x)$ в смысле близости *k*-го порядка, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех допустимых функций $y = y(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\left|y(x) - y_0(x)\right| < \delta \ldots, \ \left|y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)\right| < \delta$$

для всех $x \in \left[x_1, x_2\right]$, выполняется неравенство

$$\left|V\left[y(x)\right] - V\left[y_0(x)\right]\right| < \varepsilon .$$

Это означает, что малому приращению аргумента соответствует малое приращение функционала. При этом подразумевается, что функция $y(x)$ берется из класса функций, на котором функционал $V\left[y(x)\right]$ определен.

Пример 1.1. Показать, что кривые $y = \dfrac{\sin n^2 x}{n}$, где n достаточно велико, и $y_1(x) \equiv 0$ близки в смысле близости нулевого порядка на интервале $\left[0, \pi\right]$.

Решение. Модуль разности

$$\left|y(x) - y_1(x)\right| = \left|\frac{\sin n^2 x}{n}\right| \le \frac{1}{n} ,$$

т.е. на всем отрезке $\left[0,\pi\right]$ эта разность мала по модулю при достаточно большом значении n. Следовательно, кривые $y(x)$ и $y_1(x)$ близки в смысле *близости нулевого порядка*.

Близости первого порядка нет, так как

$$\left|y'(x)-y_1'(x)\right|=n\left|\cos n^2 x\right|,$$

и, например, в точках $x=\dfrac{2\pi}{n^2}$ имеем $\left|y'(x)-y_1'(x)\right|=n$. Значит, разность $\left|y'(x)-y_1'(x)\right|$ может быть как угодно большой при достаточно большом n.

Пример 1.2. Показать, что кривые $y=\dfrac{\sin nx}{n^2}$, где n достаточно велико, и $y_1(x)\equiv 0$ близки в смысле близости первого порядка на интервале $\left[0,\pi\right]$.

Решение. Так как величины

$$\left|y(x)-y_1(x)\right|=\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$$

и

$$\left|y'(x)-y_1'(x)\right|=\left|\frac{\cos nx}{n}\right|\le\frac{1}{n}$$

малы, то указанные кривые близки в смысле близости первого порядка.

Задачи

Установить порядок близости кривых.

1.1. $y(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$, $y_1(x)\equiv 0$ на $[0,2\pi]$.

1.2. $y(x)=\dfrac{\sin x}{n}$, $y_1(x)\equiv 0$ на $[0,\pi]$.

1.3. $y(x)=\sin\dfrac{x}{n}$, $y_1(x)\equiv 0$ на $[0,1]$.

Ответы: 1.1. Первый. **1.2.** Близость любого порядка. **1.3.** Близость любого порядка.

2. Вариация функционала. Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума

2.1. Вариация функционала

Определение 2.1. Функционал называется *линейным*, если выполняется условие:

$$L\left[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\right] = C_1 L\left[y_1(x)\right] + C_2 L\left[y_2(x)\right], \qquad (2.1)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Линейные функционалы обозначаются как $L\left[y(x)\right]$.

Методы решения вариационных задач, т. е. задач на исследование функционалов на максимум и минимум, весьма сходны с методами исследования на максимум и минимум функций. Поэтому напомним кратко теорию максимума и минимума функций и введем аналогичные понятия для функционалов.

Если приращение функции $y = f(x)$,

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x),$$

может быть представлено в виде

$$\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $A(x)$ не зависит от Δx, а $\beta(x, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то функция называется *дифференцируемой*, а линейная по отношению к Δx часть приращения $A(x)\Delta x$ называется *дифференциалом* функции и обозначается df.

Разделив на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим, что $A(x) = f'(x)$, и, следовательно,

$$df = f'(x)\Delta x.$$

По аналогии, рассмотрим приращение и вариацию функционала.

Определение 2.2. Если приращение функционала

$$\Delta V = V\left[y(x)\right] - V\left[y_0(x)\right]$$

можно представить в виде

$$\Delta V = L\left[y(x), \delta y\right] + \beta(y(x), \delta y)\left|\delta y\right|_{\max}, \qquad (2.2)$$

где $L\left[y(x), \delta y\right]$ – функционал, линейный по отношению к вариации $\delta y = y(x) - y_0(x)$, $\left|\delta y\right|_{\max}$ – максимальное значение $\left|\delta y\right|$, а величина $\beta(y(x), \delta y) \to 0$ при $\left|\delta y\right|_{\max} \to 0$, то линейная по отношению к δy часть приращения функционала, т. е. $L\left[y(x), \delta y\right]$, называется *вариацией функционала* и обозначается

$$\delta V = L\left[y(x), \delta y\right].$$

Дифференциал функции df также можно представить как производную $f(x + \alpha\Delta x)$ по α при $\alpha = 0$. Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{d\alpha} f(x + \alpha\Delta x)\bigg|_{\alpha \to 0} = f'(x + \alpha\Delta x)\Delta x\big|_{\alpha=0} = f'(x)\Delta x = df(x).$$

Аналогично этому, вариация функционала может быть записана следующим образом.

Определение 2.3. *Вариацией функционала* $V\left[y(x)\right]$ в точке $y = y(x)$ называется значение производной функционала $V\left[y(x) + \alpha\delta y(x)\right]$ по параметру α, когда $\alpha = 0$:

$$\delta V = \frac{d}{d\alpha} V[y(x) + \alpha\Delta y]\bigg|_{\alpha=0}. \qquad (2.3)$$

Если существует вариация функционала как главная линейная часть его приращения, т.е. в смысле первого определения, то существует и вариация как значение производной по параметру α при $\alpha = 0$ и эти вариации совпадают.

2.2. Экстремум функционала

Как мы уже упоминали, вариационные задачи состоят в отыскании функций, на которых функционал достигает экстремума.

Определение 2.3. Функционал $V\left[y(x)\right]$ имеет *максимум* на функции $y_0(x)$, если для любой функции $y(x)$ вблизи $y_0(x)$ разность между $V\left[y(x)\right]$ и $V\left[y_0(x)\right]$ неотрицательна:

$$\Delta V = V\left[y(x)\right] - V\left[y_0(x)\right] \le 0 .$$

Если $\Delta V \le 0$, причем $\Delta V = 0$ только при $y = y_0(x)$, то говорят, что на кривой $y = y_0(x)$ достигается строгий максимум.

Аналогично определяется кривая $y = y_0(x)$, на которой реализуется *минимум*. В этом случае $\Delta V \ge 0$ на всех кривых, близких к кривой $y = y_0(x)$.

2.3. Необходимое условие экстремума

Теорема. *Если функционал* $V\left[y(x)\right]$, *имеющий вариацию, достигает максимума (минимума) на кривой* $y = y_0(x)$, *где* $y_0(x)$ – *внутренняя точка области определения функционала, то на этой кривой вариация функционала равна нулю:*

$$\delta V\left[y_0(x)\right] = 0. \tag{2.4}$$

(Аналогично тому, что производная или дифференциал функции равны нулю в точке экстремума).

Доказательство. Все функции близкие, к функции $y_0(x)$, можно представить в виде $y(x) = y_0(x) + \alpha\delta y$. Удобно рассматривать функционал

$$V\left[y(x)\right] = V\left[y_0(x) + \alpha\delta y\right] \equiv \varphi(\alpha)$$

как функцию α, а $y_0(x)$ и δy считать фиксированными. Функция $\varphi(\alpha)$ при $\alpha = 0$, по предположению, достигает максимума или минимума, следовательно, производная $\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0} = \varphi'(0) = 0$. Или

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} V[y_0(x) + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} = \delta V = 0,$$

т.е. $\delta V = 0$ на $y_0(x)$.

Итак, на кривых, на которых достигается экстремум функционала, его вариация равна нулю.

Пример 2.1. Найти вариацию функционала

$$V[y] = \int_a^b y^2(x)dx,$$

пользуясь определением 2.2.

Решение.

$$\begin{aligned}\Delta V &= \int_a^b \left[y(x) + \delta y(x)\right]^2 dx - \int_a^b y^2(x)dx = \\ &= \int_a^b 2y(x)\delta y(x)dx + \int_a^b \left[\delta y(x)\right]^2 dx.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Первый интеграл в правой части (2.5) при каждой фиксированной функции $y(x)$ является линейным относительно $\delta y(x)$ функционалом. Оценим второй интеграл в правой части (2.5). Имеем

$$\int_a^b \left[\delta y(x)\right]^2 dx = \int_a^b |\delta y(x)|^2 dx \le \left(\max_{a\le x\le b}|\delta y(x)|\right)^2 \cdot \int_a^b dx =$$
$$= (b-a)\|\delta y(x)\|^2 = \left[(b-a)\|\delta y(x)\|\right]\cdot\|\delta y(x)\|.$$

При $\|\delta y\| \to 0$ величина $(b-a)\|\delta y(x)\| \to 0$. Следовательно, приращение ΔV функционала представимо в виде суммы $L[y,\delta y]$ и добавки второго порядка малости относительно $\|\delta y\|$. По определению, данный функционал является дифференцируемым в точке $y(x)$ и его вариация равна

$$\delta V = 2\int_a^b y(x)\delta y(x)dx.$$

Пример 2.2. Найти вариацию функционала

$$V[y] = \int_a^b y^2(x)dx\ ,$$

пользуясь определением 2.3.

Решение. Имеем

$$V\left[y(x) + \alpha\delta y(x)\right] = \int_a^b \left[y(x) + \alpha\delta y(x)\right]^2 dx\ .$$

Тогда

$$\frac{d}{d\alpha}V\left[y + \alpha\delta y\right] = 2\int_a^b \left[y + \alpha\delta y\right]\delta y dx$$

и, следовательно,

$$\delta V = \frac{d}{d\alpha}V\left[y + \alpha\delta y\right]\Bigg|_{\alpha=0} = 2\int_a^b y\delta y dx\ .$$

Вариации функционала в смысле определений 2.2 и 2.3 совпадают.

Пример 2.3. Показать, что функционал

$$V[y] = \int_0^1 \left(x^2 + y^2\right)dx$$

на кривой $y = 0$ достигает строгого минимума.

Решение. Для любой непрерывной на [0,1] функции $y(x)$ имеем

$$\Delta V = V\left[y(x)\right] - v\left[0\right] = \int_0^1 \left(x^2 + y^2\right)dx - \int_0^1 x^2 dx =$$

$$= \int_0^1 y^2 dx \geq 0,$$

причем знак равенства достигается только при $y(x) \equiv 0$.

Задачи

2.1. Найти ΔV , если

$$V[y]=\int_0^1 yy'dx\,,\;\; y(x)=e^x\,,\;\; y_1(x)=1\,.$$

Найти вариацию функционалов:

2.2. $V[y]=\int_a^b yy'dx$.

2.3. $V[y]=\int_a^b (x+y)dx$.

2.4. $V[y]=\int_a^b \left(y^2-y'^2\right)dx$.

2.5. $V[y]=y^2(0)+\int_0^1 \left(xy+y'^2\right)dx$.

2.6. $V[y]=\int_0^{\pi} y'\sin y dx$.

Ответы:

2.1. $\delta V=\dfrac{e^2-1}{2}$.

2.2. $\delta V=\int_a^b \left[y'\delta y+y\delta y'\right]dx=y(b)\delta y(b)-y(a)\delta y(a)$.

2.3. $\delta V=\int_a^b \delta y dx$.

2.4. $\delta V=2\int_a^b (y\delta y-y'\delta y')dx$.

2.5. $\delta V=2y(0)\delta y(0)+\int_a^b \left[x\delta y(x)+2y'(x)\delta y'(x)\right]dx$.

2.6. $\delta V=\int_a^b \left(\sin y\delta y'+y'\cos y\delta y\right)dx$.

3. Уравнение Эйлера

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим множество M непрерывно дифференцируемых на $[x_0, x_1]$ функций $y(x)$ таких, что

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1. \tag{3.1}$$

Пусть функция $F = F\left(x, y(x), y'(x)\right)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до третьего порядка включительно. Требуется среди всех функций $y(x) \in M$ найти ту функцию, которая доставляет экстремум функционалу

$$V\left[y(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x)\right) dx. \tag{3.2}$$

Другими словами, простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании экстремума функционала вида (3.2) на множестве всех гладких кривых, соединяющих две заданные точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$. Эту задачу также называют *задачей с закрепленными границами*.

3.2. Теорема Эйлера

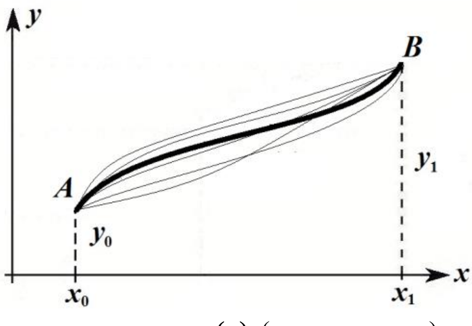


Рис. 4. Экстремальная кривая $y(x)$ (жирная линия) и другие кривые $y(x, \alpha)$ (тонкие линии), соединяющие точки A и B

Если функционал $V\left[y(x)\right]$ достигает локального экстремума на некоторой функции $y(x) \in M$, имеющей непрерывную вторую производную на отрезке $[x_0, x_1]$, то функция $y(x)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \ x \in [x_0, x_1],$$

которое называется *уравнением Эйлера*.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма [*основная лемма вариационного исчисления*]

Пусть $G(x)$ – фиксированная непрерывная функция, определённая на интервале $\left[x_0, x_1\right]$. Если

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) G(x) dx = 0 \tag{3.3}$$

при произвольном выборе непрерывно дифференцируемой функции $\eta(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\eta\left(x_0\right) = \eta\left(x_1\right) = 0, \tag{3.4}$$

то функция $G(x)$ тождественно равна нулю на интервале $\left[x_0, x_1\right]$:

$$\forall x \in [x_0, x_1]: \quad G(x) = 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Воспользуемся рассуждением от противного. Предполагая, что условие (3.5) нарушается, приведем пример функции $\eta(x)$, удовлетворяющей граничным условиям (3.4) и такой, что условие (3.3) нарушается.

Итак, пусть $x^* \in [x_0, x_1]$ и $G\left(x^*\right) \neq 0$. Для определенности, можно считать, что $G\left(x^*\right) > 0$. Поскольку G – непрерывная функция, существует окрестность (a, b) точки x^*, в которой $G(x) > 0$:

$$G(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in (a, b) \subset (x_0, x_1).$$

Выберем

$$\eta(x)=\begin{cases}(x-a)^2(x-a)^2, & x\in(a,b),\\ 0, & x\notin(a,b).\end{cases}$$

Функция $\eta(x)$ имеет непрерывную производную и на концах интервала $\left[x_0,x_1\right]$ обращается в нуль, но

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\eta(x)G(x)dx=\int\limits_a^b(x-a)^2(x-b)^2G(x)dx>0,$$

что противоречит (3.3).

Остается заметить, что если $G(x)=0$ внутри интервала $\left[x_0,x_1\right]$, то в силу непрерывности она обращается в нуль и на его концах.

Доказательство теоремы Эйлера. Рассмотрим семейство функций $y(x,\alpha)$, где

$$y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\delta y, \tag{3.6}$$

содержащее при $\alpha=0$ кривую, на которой достигается экстремум. В точках x_0 и x_1 заданы граничные условия в виде

$$y_0=y\left(x_0\right),\ y_1=y\left(x_1\right).$$

Функционал $V\left[y(x)\right]$ на кривых семейства $y(x,\alpha)$ можно рассматривать как функцию α:

$$V\left[y(x,\alpha)\right]\equiv\varphi(\alpha),$$

причём $\varphi(\alpha)$ достигает своего экстремума при $\alpha=0$.

Необходимым условием экстремума функции является обращение в нуль её производной при $\alpha=0$:

$$\varphi'(0)=0.$$

Так как

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F\left[x, y(x,\alpha), y'_x(x,\alpha)\right]dx ,$$

то

$$\varphi'(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_0}^{x_1} F dx = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \alpha}y(x,\alpha) + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial \alpha}y'(x,\alpha)\right]dx .$$

С учетом

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}y(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[y(x) + \alpha\delta y(x)\right] = \delta y(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}y'(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[y'(x) + \alpha\delta y'(x)\right] = \delta y'(x),$$

получим

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\big)\delta y(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\big)\delta y'(x)\right]dx,$$

и

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big)\delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big)\delta y'(x)\right]dx.$$

Как мы уже знаем, $\varphi'(0)$ называется вариацией функционала и обозначается δV (см. определение 2.3):

$$\delta V = \frac{d}{d\alpha}V[y(x) + \alpha\Delta y]\Big|_{\alpha=0} = \varphi'(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \varphi'(0) .$$

Необходимое условие экстремума функционала V заключается в обращении в нуль его вариации: $\delta V = 0$. Для нашего функционала это условие имеет вид

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx=0\ .$$

Интегрируем второе слагаемое по частям и, принимая во внимание, что $\delta y'=(\delta y)'$, получим

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'dx=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}d\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y=\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx\ ,$$

так как $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right|_{x_0}^{x_1}=0$ (значения функции $\delta y(x)$ равны нулю в точках x_0 и x_1, поскольку все допустимые кривые в рассматриваемой задаче проходят через фиксированные граничные точки).

Таким образом,

$$\delta V=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y(x)dx$$

и необходимое условие экстремума приобретает вид

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y(x)dx=0\ .$$

Так как $\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]$ является непрерывной функцией, а вариация $\delta y(x)$ является произвольной функцией, то на кривой $y=y(x)$, реализующей экстремум рассматриваемого функционала, согласно вышеприведенной лемме, должно выполняться равенство

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0. \qquad (3.7)$$

Теорема доказана.

Уравнение *Эйлера* (3.7) (иногда его называют *уравнением Эйлера-Лагранжа*) было получено Леонардом Эйлером в 1744 году. Функцию F в функционалах (3.2), имеющих вид интеграла, часто называют *функцией Лагранжа*. Интегральная кривая уравнения (3.7) называется *экстремалью*.

Уравнение Эйлера (3.7) является дифференциальным уравнением 2-го порядка и, следовательно, его общее решение зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2: $y = y(x, C_1, C_2)$. Эти произвольные постоянные можно определить из граничных условий:

$$\begin{cases} y(x_0, C_1, C_2) = y_0, \\ y(x_1, C_1, C_2) = y_1, \end{cases}$$

т. е. для нахождения $y(x)$ надо решать краевую задачу.

Напомним, что краевая задача не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным. Во многих вариационных задачах существование решения очевидно из физического или геометрического смысла задачи, и если решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям единственно, то эта единственная экстремаль и будет решением рассматриваемой вариационной задачи.

С учетом

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx} F'_{y'}\left(x, y(x), y'(x)\right) = F'_{y'x} + F'_{y'y} y' + F'_{y'y'} y''$$

уравнение (3.4) можно записать в развёрнутой форме:

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = F'_y - F'_{y'x} - F'_{y'y} y' - F'_{y'y'} y'' = 0\,.$$

В обозначении частных производных знак «штрих» удобно опускать:

$$F_y - F_{xy'} - F_{y'y} y' - F_{y'y'} y'' = 0. \tag{3.8}$$

Пример 3.1. На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$V[y(x)] = \int_1^2 \left(y'^2 - 2xy \right) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = -1.$$

Решение. Здесь $F(x, y, y') = y'^2 - 2xy$, так что уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = -2x - 2y'' = 0 \quad \text{или} \quad y'' + x = 0 .$$

Общее решение этого уравнения:

$$y(x) = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 .$$

Граничные условия дают систему линейных уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(1) = -\dfrac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0, \\ y(2) = -\dfrac{8}{6} + 2C_1 + C_2 = -1. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = \dfrac{1}{6}$, $C_2 = 0$. Следовательно, экстремум может достигаться на кривой

$$y(x) = \frac{x}{6}\left(1 - x^2\right).$$

Для того чтобы исследовать, достигает ли заданный функционал максимума или минимума на полученной кривой, необходимо:

1) взять любую другую кривую, проходящую через данные точки;
2) вычислить значение функционала на обеих кривых;

3) сравнить полученные значения; если значение полученной кривой меньше (больше), чем значение выбранной, то на полученной кривой достигается минимум (максимум).

В нашем примере значение $V[y(x)]$ на найденной кривой $y(x)=\frac{x}{6}\left(1-x^2\right)$ равно

$$V[y(x)]=\int_1^2\left(y'^2-2xy\right)dx=\frac{1}{36}\int_1^2\left[1-18x^2+21x^4\right]dx=$$

$$=\frac{1}{36}\left[x-6x^3+\frac{21}{5}x^5\right]_{x=1}^{x=2}=\frac{223}{90}\approx 2.478.$$

Возьмем другую кривую, соединяющую точки $(1,0)$ и $(2,-1)$, например, прямую $\tilde{y}=1-x$ и вычислим значение $V[\tilde{y}(x)]$:

$$V[\tilde{y}(x)]=\int_1^2\left(\tilde{y}'^2-2x\tilde{y}\right)dx=\int_1^2\left[1-2x+2x^2\right]dx=$$

$$=\left[x-x^2+\frac{2}{3}x^3\right]_{x=1}^{x=2}=\frac{8}{3}\simeq 2.667.$$

Таким образом, на кривой $y(x)=\frac{x}{6}\left(1-x^2\right)$ достигается минимум заданного функционала $V[y(x)]$.

3.3. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера

3.3.1. *F не зависит явно от x*: $F=F(y,y')$

В этом случае уравнение Эйлера (3.8) принимает вид

$$F_y-y'F_{yy'}-y''F_{y'y'}=0. \tag{3.9}$$

Умножим обе части этого уравнения на y' и к левой части добавим $\pm F_{y'}y''$. Тогда, в левой части получим полную производную

$$F_y y' + F_{y'} y'' - F_{y'} y'' - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y'} y'' y' = 0 \,,$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = 0 \,.$$

Отсюда

$$F - y' F_{y'} = const$$

– *первый интеграл уравнения Эйлера*.

Пример 3.2. Найти экстремали функционала

$$V[y(x)] = \int_0^{2\pi} \left(y'^2 - y^2\right) dx \,,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 1,\ y(2\pi) = 1$.

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(y'^2 - y^2 - 2y'^2\right) = -2yy' - 2y'y'' = 0,$$

или

$$y'' + y = 0 \,.$$

Общее решение этого уравнения:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \,.$$

Используя граничные условия, получим

$$y(x) = \cos x + C_2 \sin x \,,$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Таким образом, поставленная вариационная задача имеет бесчисленное множество решений.

3.3.2. *F не зависит явно от* y' : $F = F(x, y)$

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y(x, y) = 0. \qquad (3.10)$$

Уравнение (3.10) является алгебраическим, а не дифференциальным. Оно определяет одну или конечное число кривых, которые могут и не удовлетворять граничным условиям. Лишь в исключительных случаях, когда кривая (3.10) проходит через граничные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), существует кривая, на которой может достигаться экстремум.

Пример 3.3. Найти экстремали функционала

$$V[y(x)] = \int_0^{\pi/2} y\left(2x - y\right) dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$y(0) = 0, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y(x, y) = 2x - 2y = 0,$$

$$y = x.$$

Так как граничные условия удовлетворяются, то на прямой $y = x$ интеграл

$$\int_0^{\pi/2} y\left(2x - y\right) dx$$

может достигать экстремума. При других граничных условиях, например

$$y(0) = 0, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

экстремаль $y = x$ не проходит через граничные точки $(0,0)$ и $(\pi/2, 1)$, так что при этих граничных условиях вариационная задача не имеет решения.

3.3.3. ***F* зависит от y' линейно**, т.е. рассматривается случай, когда

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'.$$

Из уравнения Эйлера следует

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'-\frac{d}{dx}N\left(x,y\right)=0\,,$$

или

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'-\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}y'=0\,.$$

Таким образом, в этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0. \tag{3.11}$$

Полученное уравнение, как и в случае 3.3.2, является алгебраическим, а не дифференциальным уравнением. Кривая, определяемая уравнением (3.11), вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям, и, значит, вариационная задача, как правило, не имеет решения в классе непрерывных функций.

Если в некоторой области D плоскости xy тождественно выполняется условие

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\equiv 0\,,$$

то выражение $F(x,y,y')=M(x,y)+N(x,y)y'$ является полным дифференциалом и функционал

$$V\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1}F\left(x,y,y'\right)dx=$$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

не зависит от пути интегрирования: значение функционала $V[y]$ одно и то же на всех допустимых кривых. *Вариационная задача теряет смысл*.

Пример 3.4. Исследовать на экстремум функционал

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left(y^2 + 2xyy' \right) dx .$$

Решение. Функция Лагранжа: $F(x, y, y') = y^2 + 2xyy'$.

$$F_y = 2y + 2xy',\ F_{y'} = 2xy,\ \frac{d}{dx} F_{y'} = 2y + 2xy',$$

и уравнение Эйлера для заданного функционала превращается в тождество

$$2y + 2xy' - 2y - 2xy' = 0 .$$

Это результат того, что подынтегральное выражение $\left(y^2 + 2xyy' \right) dx$ является полным дифференциалом $F = d\left(xy^2 \right)$ и, следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx + 2xydy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} d\left(xy^2 \right) =$$

$$= xy^2 \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = x_1 y_1^2 - x_0 y_0^2 = const,$$

по какой бы кривой $y(x)$, проходящей через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), мы ни интегрировали. Вариационная задача не имеет смысла.

Пример 3.5. Исследовать на экстремум функционал

$$V\left[y(x) \right] = \int_0^1 \left(y^2 + x^2 y' \right) dx,\ y(0) = 0\ \ y(1) = y_1 .$$

Решение. Уравнение Эйлера: $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$, или $y - x = 0$. Первое граничное условие $y(0) = 0$ удовлетворяется, но второе граничное условие выполняется лишь при $y_1 = 1$. Если же $y_1 \neq 1$, то экстремали, удовлетворяющей граничным условиям, не существует.

3.3.4. ***F* *зависит лишь от*** y' **,** т.е. $F = F(y')$.

Уравнение Эйлера имеет вид

$$y'' F_{y'y'} = 0. \tag{3.12}$$

Отсюда следует, что $y'' = 0$ или $F_{y'y'} = 0$. Если $y'' = 0$, то $y = C_1 x + C_2$ – двухпараметрическое семейство прямых линий. Если же уравнение $F_{y'y'}\left(y'\right) = 0$ имеет один или несколько корней $y' = k_i$, то $y = k_i x + C$ – однопараметрическое семейство прямых, содержащееся в полученном выше двухпараметрическом семействе $y = C_1 x + C_2$. Таким образом, экстремалями являются всевозможные прямые линии $y = C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3.6. Найти кратчайший путь между двумя точками плоскости.

Решение. Ответом, очевидно, является отрезок, соединяющий эти точки. Попробуем получить этот результат с помощью уравнения Эйлера.

Пусть точки, которые надо соединить, имеют координаты (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Тогда длина пути $y(x)$, соединяющего эти точки, может быть записана следующим образом:

$$l\left[y(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx,$$

т.е. $F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$.

Построим уравнения Лагранжа-Эйлера:

$$F_y = 0,\ F_{y'x} = 0,\ F_{y'y} = 0,$$

$$F_{y'y'}=\frac{y''\sqrt{1+(y')^2}-y'\dfrac{1}{2}\dfrac{2y'}{\sqrt{1+(y')^2}}}{\left[\sqrt{1+(y')^2}\right]^2}=\frac{y''\left[1+(y')^2\right]-(y')^2}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Если $y''\neq 0$, то и $F_{y'y'}\neq 0$, следовательно, уравнение Лагранжа-Эйлера для заданного функционала принимает вид

$$y''=0.$$

Общее решение этого уравнения: $y(x)=C_1x+C_2$.

Решение, удовлетворяющее граничным условиям $y_0=y(x_0),\ y_1=y(x_1)$, есть, очевидно, прямая, проходящая через точки (x_0,y_0) и (x_1,y_1):

$$y(x)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\left(x-x_0\right)+y_0.$$

3.3.5. *F не зависит явно от y,* т.е. $F=F(x,y')$

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид $\dfrac{d}{dx}F_{y'}\left(x,y'\right)=0$, откуда получаем

$$F_{y'}(x,y')=const. \tag{3.13}$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка. Интегрируя его, находим экстремали задачи.

Пример 3.7. Среди кривых, соединяющих точки $(1,1)$ и $(2,2)$, найти ту, на которой может достигаться экстремум функционала

$$V[y(x)]=\int_1^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx.$$

Решение. Так как *F* не зависит от *y*, то уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(1 + 2x^2 y'\right) = 0\,,$$

откуда получаем

$$1 + 2x^2 y' = C,$$

$$y' = \frac{C - 1}{2x^2}\,.$$

Тогда

$$y(x) = -\frac{C - 1}{2x} + C_2,$$

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2\,.$$

Выделим кривую, проходящую через заданные точки. Для определения постоянных C_1 и C_2 составляем систему

$$\begin{cases} y(1) = C_1 + C_2 = 1, \\ y(2) = \dfrac{C_1}{2} + C_2 = 2, \end{cases}$$

откуда получаем: $C_1 = -2$, $C_2 = 3$. Искомая кривая:

$$y(x) = -\frac{2}{x} + 3.$$

Задачи

Найти экстремали функционалов.

3.1. $V[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(y'^2 + 2yy' - 16y^2\right) dx\,.$

3.2. $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} y'\left(x+y'\right)dx$.

3.3. $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3}dx$.

Найти экстремали в вариационных задачах.

3.4. $V[y]=\int\limits_{-1}^{0}\left(12xy-y'^2\right)dx$, $y(-1)=1$, $y(0)=0$.

3.5. $V[y]=\int\limits_{1}^{2}\left(y'^2+2yy'+y^2\right)dx$, $y(1)=1$, $y(2)=0$.

3.6. $V[y]=\int\limits_{0}^{1} yy'^2dx$, $y(0)=1$, $y(1)=\sqrt[3]{4}$.

3.7. $V[y]=\int\limits_{0}^{\pi}\left(4y\cos x+y'^2-y^2\right)dx$, $y(0)=0$, $y(\pi)=0$.

3.8. $V[y]=\int\limits_{0}^{1}\left(y'^2-y^2-y\right)e^{2x}dx$, $y(0)=0$, $y(1)=e^{-1}$.

3.9. $V[y]=\int\limits_{-1}^{1}\left(y'^2-2xy\right)dx$, $y(-1)=-1$, $y(1)=1$.

3.10. $V[y]=\int\limits_{-1}^{0}\left(y'^2-2xy\right)dx$, $y(-1)=0$, $y(0)=2$.

3.11. $V[y]=\int\limits_{1}^{e}\left(xy'^2+yy'\right)dx$, $y(1)=0$, $y(e)=1$.

Найти экстремали в вариационных задачах, используя частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

3.12. $V[y]=\int\limits_{a}^{b}\left[2xy+\left(x^2+e^y\right)y'\right]dx$, $y(a)=A$, $y(b)=B$.

3.13. $V[y]=\int\limits_{0}^{1}\left(e^y+xy'\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\alpha$.

3.14. $V[y]=\int\limits_0^{\pi/4}\left(y'^2-y^2\right)dx$, $y(0)=1$, $y(\pi/4)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.15. $V[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(y'^2-y^2\right)dx$, $y(0)=1$, $y(\pi)=-1$.

3.16. $V[y]=\int\limits_a^{b}\left(x+y'^2\right)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=2$.

3.17. $V[y]=\int\limits_0^{1}\left(y^2+y'^2\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$.

3.18. $V[y]=\int\limits_0^{1}\left(y'^2+4y^2\right)dx$, $y(0)=e^2$, $y(1)=1$.

3.19. $V[y]=\int\limits_0^{1}\left(2e^y-y^2\right)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=e$.

3.20. $V[y]=\int\limits_a^{b}\left(y+\dfrac{y^3}{3}\right)dx$, $y(0)=e^2$, $y(1)=1$.

Ответы:

3.1. $y(x)=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x$.

3.2. $y=-\dfrac{x^2}{4}+C_1x+C_2$. **3.3.** $y=C_1x^4+C_2$.

3.4. $y(x)=-x^3$. **3.5.** $y=\dfrac{\mathrm{sh}(2-x)}{\mathrm{sh}1}$.

3. 6. $y_1=\sqrt[3]{(x+1)^2}$, $y_2=\sqrt[3]{(3x-1)^2}$.

3.7. $y=(C+x)\sin x$, $C-$ произвольная постоянная.

3.8. $y=\dfrac{1}{2}\left[e^{-x}(xe+x+1)-1\right]$. **3.9.** $y=\dfrac{7x-x^3}{6}$.

3.10. $y=\dfrac{13x-x^3}{6}+2$. **3.11.** $y=\ln x$.

3.12. Интеграл не зависит от пути интегрирования; вариационная задача не имеет смысла.

3.13. $y=0$, если $\alpha=0$; при $\alpha\neq 0$ гладкой экстремали не существует.

3.14. $y = \cos x$. **3.15.** $y = \cos x + C\sin x$, C – произвольная постоянная.

3.16. $y = x + 1$. **3.17.** $y = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}$. **3.18.** $y = e^{2(1-x)}$.

3.19. Нет экстремалей – уравнение Эйлера не имеет решений.

3.20. Экстремалей нет.

4. Геометрические и физические приложения

4.1. Задача о брахистохроне

Исторически это первая задача, приведшая к вариационному исчислению, – задача о линии наибыстрейшего ската (*брахистохроне*), поставленная в 1696 году Иоганном Бернулли:

> *Найти кривую, соединяющую заданные точки A и B (не лежащие на одной вертикальной прямой), при движении по которой материальная точка скатится из точки A в точку B в кратчайшее время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).*

Решение. Поместим начало координат в точку A, ось Ox направим горизонтально, ось Oy – вертикально вниз (рис. 5).

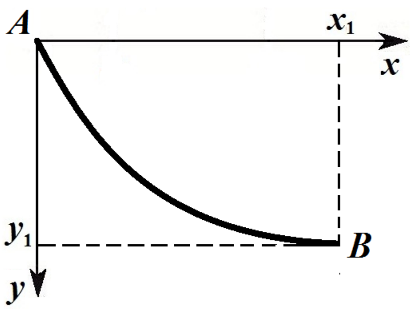


Рис. 5. Система координат в задача о брахистохроне

Если тяжелая точка движется из A без начальной скорости, то её кинетическая энергия $mv^2/2$ будет равна потере потенциальной энергии mgy (закон сохранения энергии):

$$\frac{mv^2}{2} = mgy .$$

Тогда скорость движения материальной точки равна

$$V = \frac{dl}{dt} = \sqrt{2gy}$$

(g – ускорение силы тяжести).

Пусть $y = y(x)$ – это уравнение кривой, по которой движется точка из A в B. Длина кривой $l[y(x)] = \int_0^{x_1} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, откуда находим время, затрачиваемое на перемещение точки из положения $A(0,0)$ в положение $B(x_1, y_1)$:

$$T[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{dl}{V} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx ,$$

$$y(0) = 0,\ y(x_1) = y_1 .$$

Очевидно, $T[y]$ есть функционал, зависящий от функции $y(x)$. Требуется найти функцию $y = y(x)$, для которой $T[y]$ принимает наименьшее значение.

Так как у этого функционала подынтегральная функция не содержит явно x, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - F_{y'} y' = \mathrm{const}$ или в данном случае

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y\left[1+(y')^2\right]}} = C ,$$

откуда после преобразований получаем

$$\frac{1}{\sqrt{y\left[1+(y')^2\right]}} = C ,$$

$$y\left[1+(y')^2\right] = C_1 .$$

Введем параметр t, полагая $y' = \operatorname{ctg} t$, тогда

$$y = \frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}\left(1-\cos 2t\right).$$

Из $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} t$ следует

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{ctg} t} = \frac{C_1 2\sin t\cos t}{\operatorname{ctg} t}dt = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1(1-\cos 2t)dt,$$

и значит

$$x = \frac{C_1}{2}\left(2t - \sin 2t\right) + C_2.$$

Следовательно, в параметрической форме уравнение искомой линии имеет вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}\left(2t - \sin 2t\right) + C_2, \\ y = \dfrac{C_1}{2}\left(1-\cos 2t\right). \end{cases}$$

Если преобразовать параметр подстановкой $2t = t_1$ и принять во внимание, что $C_2 = 0$, так как $x = 0$ при $y = 0$, то получим уравнения семейства *циклоид*:

$$\begin{cases} x\left(t_1\right) = \dfrac{C_1}{2}\left(t_1 - \sin t_1\right), \\ y\left(t_1\right) = \dfrac{C_1}{2}\left(1-\cos t_1\right), \end{cases} \tag{4.1}$$

где $C_1 / 2$ – радиус катящегося круга, который определяется из условия прохождения циклоиды через точку $B(x_1, y_1)$.

4.2. Задача о наименьшей поверхности вращения

Отрезок кривой $y = y\left(x\right)$ *с концами в точках* $A(x_0, y_0)$ *и* $B(x_1, y_1)$ *вращается вокруг оси Ox (рис. 6). Какой должна быть* *эта кривая, чтобы площадь получившейся поверхности была наименьшей?*

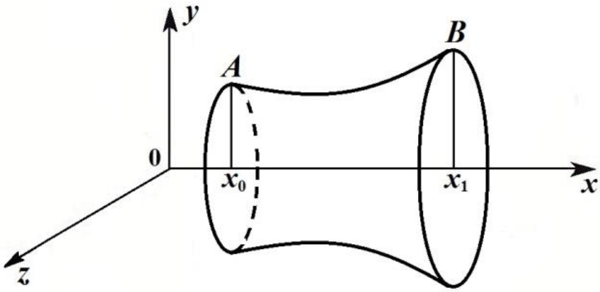


Рис. 6. Поверхность вращения

Решение. Эта кривая $y = y(x)$ (образующая поверхности вращения) будет решением вариационной задачи

$$S[y(x)] = \int 2\pi y ds = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Здесь $S[y]$ – площадь поверхности вращения кривой с концами в точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1).

Функция $F = y\sqrt{1+(y')^2}$ не зависит явно от *x*. В этом случае первый интеграл уравнения Эйлера имеет вид $F - y' \cdot F_{y'} = C_1$, т.е.

$$y\sqrt{1+(y')^2} - \frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1.$$

Отсюда после преобразований получаем

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1.$$

Введем параметр t, полагая $y' = \operatorname{sh} t$, тогда $y = C_1 \operatorname{ch} t$. Затем

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \operatorname{sh} t dt}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt,$$

отсюда

$$x = C_1 t + C_2.$$

Эти два уравнения для $x(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2, \\ y = C_1 \operatorname{ch} t \end{cases} \tag{4.2}$$

представляют параметрическое задание *цепных линий*, при вращении которых вокруг оси x получаются поверхности, называемые *катеноидами* (постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий).

4.3. Задача о кратчайшем расстоянии между двумя точками на поверхности сферы

Показать, что кривая, определяющая кратчайшее расстояние между двумя точками на поверхности сферы радиуса a, лежит на большом круге сферы, т. е. на круге, центр и радиус которого совпадают с центром и радиусом сферы.

Решение. Положение точки на сфере (радиуса a с центром в начале координат) задается сферическими координатами

$$x = a\sin\theta\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta\sin\varphi, \quad z = a\cos\theta.$$

Квадрат дифференциала длины дуги

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta d\varphi^2,$$

следовательно, длина кривой на поверхности сферы равна

$$l = \int_a^b \sqrt{a^2 \sin^2\theta + a^2 \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Функционал $l\left[\theta(\varphi)\right]=\int\limits_a^b F(\theta,\theta')d\varphi$, где

$$F(\theta,\theta')=\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2}$$

не зависит явно от независимой переменной φ. В этом случае уравнение Эйлера принимает вид $\frac{d}{dx}\left(F-y'F_{y'}\right)=0$ и его 1-й интеграл $F-y'F_{y'}=\text{const}$, или

$$\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2\left(d\theta/d\varphi\right)^2}-\frac{a^2\left(d\theta/d\varphi\right)^2}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2\left(d\theta/d\varphi\right)^2}}=C_1.$$

Приведем к общему знаменателю, возведем обе части равенства в квадрат:

$$C_1^2\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2=a^2\sin^4\theta-C_1^2\sin^2\theta.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка; его решение:

$$\varphi=C_1\int\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\sin^4\theta-C_1^2\sin^2\theta}}.$$

Вычислим интеграл в правой части равенства. Вынесем в знаменателе множитель $C_1^2\sin^4\theta$ и воспользуемся тождеством $\csc^2\theta=1+\text{ctg}^2\theta$. Обозначим $\tilde{C}_1=1/\sqrt{(a/C_1)^2-1}$ и после замены переменных в интеграле

$$u=\tilde{C}_1\cot\theta,\ du=-\tilde{C}_1\csc^2\theta d\theta$$

получим

$$\varphi = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin u + C_2 = -\arcsin\left(\tilde{C}_1 \operatorname{ctg}\theta\right) + C_2 ,$$

или

$$\sin(\varphi - C_2) = -\tilde{C}_1 \operatorname{ctg}\theta .$$

Воспользовавшись тождеством

$$\sin(\varphi - C_2) = \sin\varphi\cos C_2 - \cos\varphi\sin C_2$$

и домножив на радиус сферы a, получим

$$a\sin C_2 \sin\theta\cos\varphi - a\cos C_2 \sin\theta\sin\varphi - a\tilde{C}_1 \cos\theta = 0 .$$

Или в декартовых координатах

$$Ax + By + Cz = 0 ,$$

где $A = \sin C_2$, $B = -\cos C_2$, $C = -\tilde{C}_1$.

Это *уравнение плоскости, проходящей через начало координат и, следовательно, через центр сферы*. Значит, кратчайшее расстояние между двумя точками на поверхности сферы находится на пересечении этой плоскости с поверхностью сферы.

Этот пример есть частный случай определения линии наименьшей длины, лежащей на данной поверхности и соединяющей две данные точки. Такая линия называется *геодезической*. В общей теории относительности *тела движутся по геодезическим линиям под действием сил гравитации*.

4.4. Принцип наименьшего действия

Основным вариационным принципом классической механики является принцип стационарного действия Гамильтона, утверждающий, что среди возможных движений системы материальных точек в действительности осуществляется движение, приводящее к минимуму интеграла

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt ,$$

называемому *действием*.

Функция $L = K - U$ называется *функцией Лагранжа*, K и U – кинетическая и потенциальная энергии, t_1 и t_2 – начальный и конечный моменты времени. Часто L зависит от времени и обобщенных координат и скоростей тел, $L\left(t, q_i(t), \dot{q}_i(t)\right)$. Минимум функционала $I\left[L\left(t, q_i(t), \dot{q}_i(t)\right)\right]$ реализуется на траекториях $q_i(t)$, получаемых из уравнении Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \tag{4.3}$$

Число уравнений равно числу степеней свободы N ($i = 1,...N$). Эта система вместе с граничными условиями в точках t_1 и t_2 определяет траектории $q_i(t)$.

Пример 4.1. Рассмотрим движение материальной точки с массой m под действием силы $\vec{F}$, определяемой потенциальной энергией $U(x, y, z)$:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} .$$

Кинетическая энергия

$$K = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Система уравнений Эйлера для действия

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (K - U) dt$$

имеет вид

$$-\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}=0,\qquad -\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{y}}=0,\qquad -\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{z}}=0$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial x}+m\ddot{x}=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial y}m+\ddot{y}=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial x}+m\ddot{z}=0\,.$$

Поскольку $\vec{F}=-grad\ U$, эти уравнения эквивалентны уравнению Ньютона: $\vec{F}=m\vec{a}$.

Пример 4.2. Рассмотрим движения частицы под действием центральной силы притяжения, подчиняющейся закону обратных квадратов:

$$U=-\frac{\alpha}{r}\,.$$

В случае кулоновского взаимодействия двух зарядов величиной q и Q, $\alpha=kqQ$ (k – кулоновская константа), в случае гравитационного притяжения $\alpha=GmM$ (G – гравитационная константа).

В качестве обобщённых координат используем полярные координаты r и φ, связанные с декартовыми следующим образом:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi\,.$$

Кинетическая и потенциальная энергии движущейся частицы

$$K=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right),\quad U=-\frac{\alpha}{r}\,.$$

Тогда для $L=K-U$ уравнения (4.3) приводят к двум уравнениям:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=\frac{d}{dt}(m\dot{r})-mr\dot{\varphi}^2+\frac{\alpha}{r^2}=0 \qquad (4.4)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right)=0. \qquad (4.5)$$

Уравнение (4.5) дает $mr^2\dot{\varphi} = const$. Величина $mr^2\dot{\varphi}$, которая сохраняет постоянное значение во время движения, является угловым моментом частицы, l. Теперь уравнение (4.4) можно записать как

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2} = 0. \tag{4.6}$$

Его решение определяет траекторию $r(t)$.

В простейшем случае круговой орбиты $\dot{r} = 0$, из этого уравнения и $l = mr^2\dot{\varphi}$ следует

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\alpha}{mr^3}$$

поэтому энергия частицы

$$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}U.$$

Ясно, что частица движется вокруг центра с постоянной частотой

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}. \tag{4.7}$$

Можно отметить, что, согласно законам классической электродинамики, заряженная частица при движении вокруг центра излучает электромагнитные волны и теряет энергию. Для электрона в атоме, движущегося с колоссальной частотой, это привело бы к падению на ядро. Это противоречие снимается только в квантовой теории.

Пример 4.3. *Принцип Ферма* в геометрической оптике утверждает, что световой луч распространяется по тому пути, вдоль которого время его прохождения минимально.

Функционал

$$T = \int_a^b \frac{dl}{\mathrm{v}},$$

где dl – элемент длины, v – скорость света, определяет время распространения луча между точками $a(t_1)$ и $b(t_2)$. В двухмерном случае

$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\mathrm{v}(x,y)}. \tag{4.8}$$

Скорость света в среде, показатель преломления которой $n(x,y)$, есть $\mathrm{v}(x,y) = c / n(x,y)$, поэтому

$$T = \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} n(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx .$$

Рассмотрим ситуацию, когда показатель преломления n зависит только от y. Тогда первый интеграл уравнения Эйлера примет вид

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1+y'^2}} = const. \tag{4.9}$$

Знаменатель здесь равен

$$\sqrt{1+tg^2\varphi} = 1/\cos\varphi ,$$

где φ – угол, который касательная к кривой $y(x)$ составляет с осью x. Следовательно, предыдущее уравнение можно записать в виде

$$n(y)\cos\varphi = const, \tag{4.10}$$

т.е. произведение $n(y)$ и $\cos\varphi$ остается постоянным, несмотря на то, что оба они могут изменяться с изменением y. Отметим, что отсюда следует, что если $n = const$, то и $\varphi = const$, т.е. луч света распространяется по прямой линии.

Уравнение (4.10) дает *закон Снелла* (*Snell's law*), описывающий преломление света на границе двух сред: *если луч света проходит из среды с показателем преломления* n_1 *в среду с показателем преломления* n_2*, то*

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \tag{4.11}$$

где θ *– угол, который луч образует с вертикалью*. Для получения уравнения (4.11) из уравнения (4.10) нужно просто использовать равенство $\theta+\varphi=\pi/2$ и $\cos(\pi/2-\theta)=\sin\theta$.

Задачи

4.1. Найдите геодезическую линию на поверхности правильного кругового цилиндра радиуса a (т. е. линию наименьшей длины, лежащую на поверхности правильного кругового цилиндра и соединяющую две данные точки).

Указание: положите $ds^2 = a^2 d\theta^2 + dz^2$.

4.2. Найдите геодезическую линию на поверхности правильного кругового конуса (т. е. линию наименьшей длины, лежащую на поверхности правильного кругового конуса и соединяющую две данные точки).

Указание: положите $ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\alpha d\varphi^2$ (поскольку поверхность конуса описывается уравнением $\sin\theta = \sin\alpha = \text{constant}$).

4.3. Обобщите пример 4.2 для случая потенциальной энергии U, зависящей как от r, так и от θ. Сохраняется ли в этом случае угловой момент?

4.4. Найдите траекторию луча света в среде с показателем преломления меняющемся как a/y, где $a = const$.

4.5. Найдите траекторию луча света в среде с показателем преломления меняющемся как ay, где $a = const$.

Ответы:

4.1. $$z = \frac{a}{C_1\sqrt{1-C_1^2a^2}}\varphi + C_2.$$

4.2. $$\varphi = \frac{C_1}{\sin^2\alpha}\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-\left(C_1/\sin\alpha\right)^2}} = .$$

$$= \frac{2}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r\sin\alpha - C_1}{r\sin\alpha + C_1}} + C_2.$$

5. Функционалы, зависящие от нескольких функций

Пусть дан функционал, зависящий от n функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$:

$$V\left[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\right] = \\ = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_n, y_n'\right) dx. \quad (5.1)$$

Требуется найти все функции $y_i(x)$, на которых заданный функционал экстремален, при известных граничных условиях на концах интервала (x_0, x_1)

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0},$$

$$y_1(x_1) = y_{11},\ y_2(x_1) = y_{21},\ \ldots,\ y_n(x_1) = y_{n1}.$$

Зафиксируем все функции, кроме $y_1(x)$. При этом $V\left[y_1(x), ..., y_n(x)\right]$ превратится в функционал, зависящий лишь от одной варьируемой функции и, следовательно, функция, реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_{y_1} - \frac{d}{dx} F_{y_1'} = 0.$$

Это рассуждение применимо к любой функции $y_i(x)$ $(i = 1, ..., n)$. В результате получим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad (5.2)$$

определяющих, вообще говоря, $2n$-параметрическое семейство интегральных кривых в пространстве x, y_1, y_2, ..., y_n – семейство экстремалей данной вариационной задачи.

Пример 5.1. Найти экстремали вариационной задачи

$$V\left[y(x), z(x)\right] = \int_0^{\pi/2} \left[(y')^2 + (z')^2 + 2yz\right] dx\,,$$

$$y(0) = 0,\;\; z(0) = 0,\;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\;\; z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1\,.$$

Решение. Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 2z - 2y'' = 0, \\ F_z - \dfrac{d}{dx} F_{z'} = 2y - 2z'' = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} z - y'' = 0, \\ y - z'' = 0. \end{cases}$$

Исключая одну из неизвестных функций, например z, получаем

$$y^{(4)} - y = 0\,.$$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Решая характеристическое уравнение, получим:

$$k^4 - 1 = 0,\quad k_{1,2} = \pm i,\;\; k_{3,4} = \pm 1\,.$$

Составим общее решение однородного уравнения:

$$\begin{cases} y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \\ z(x) = y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x. \end{cases}$$

Используя граничные условия, составляем систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} + C_4 = 1, \\ C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} - C_4 = -1 \end{cases}$$

и из этой системы находим: $C_1 = C_2 = C_3 = 0,\ C_4 = 1$.

Таким образом, искомая экстремаль

$$y(x) = \sin x, \quad z(x) = -\sin x .$$

Найдем значение функционала на полученном решении. Подставим $y'(x) = \cos(x)$ и $z'(x) = -\cos(x)$ в функционал и вычислим его:

$$V\left[y(x), z(x)\right] = \int_0^{\pi/2} \left[(y')^2 + (z')^2 + 2yz\right] dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[2\cos^2 x - 2\sin^2 x\right] dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos 2x dx = \sin 2x\Big|_0^{\pi/2} = 0.$$

Определим, максимален или минимален функционал на полученных кривых. Возьмем две функции, удовлетворяющие граничным условиям:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}x, \quad z(x) = -\frac{2}{\pi}x .$$

Подставим их и $y' = \dfrac{2}{\pi}$, $z' = -\dfrac{2}{\pi}$ в функционал:

$$V\left[y(x), z(x)\right] = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^2}x^2\right] dx = \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \left(1 - x^2\right) dx =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right) > 0.$$

Следовательно, на найденных $y(x)$ и $z(x)$ функционал минимален.

Пример 5.2. Найти экстремали вариационной задачи

$$V\left[y(x), z(x)\right] = \int_1^2 \left(y'^2 + z^2 + z'^2\right) dx ,$$

$$y(1) = 1,\ y(2) = 2,\ z(1) = 0,\ z(2) = 1 .$$

Решение. Система уравнений Эйлера в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = y'' = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dx} F_{z'} = z - z'' = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$y(x) = C_1 x + C_2,\ z(x) = C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

В силу граничных условий имеем

$$C_1 = 1,\ C_2 = 0,\ C_3 = \frac{1}{e^2 - 1},\ C_4 = -\frac{e^2}{e^2 - 1},$$

так что искомая экстремаль

$$y(x) = x,\ z(x) = \frac{\mathrm{sh}(x-1)}{\mathrm{sh}1}.$$

Пример 5.3. Найти экстремали вариационной задачи

$$V\left[y(x), z(x)\right] = \int_0^{\pi} \left(2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2\right) dx,$$

$$y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 1,\ \ z\left(0\right) = 0,\ \ z\left(\pi\right) = -1.$$

Решение. Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = y'' + 2y - z = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dx} F_{z'} = z'' + y = 0, \end{cases}$$

откуда, исключая функцию z, получим $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\left(C_3 \cos x + C_4 \sin x\right).$$

В силу граничных условий $y(0)=0,\ y(\pi)=1$, получаем $C_1=0$, $C_3=-1/\pi$ и значит

$$y(x)=C_2\sin x+C_4x\sin x-\frac{x}{\pi}\cos x.$$

Функцию z найдём из уравнения $z=y''+2y$. Имеем

$$z(x)=C_2\sin x+C_4(2\cos x+x\sin x)+\frac{1}{\pi}\left(2\sin x-x\cos x\right).$$

Постоянные C_2 и C_4 находим из граничных условий $z(0)=0,\ z(\pi)=-1$, что дает $C_4=0$, C_2 – произвольно. Тогда

$$z(x)=C_2\sin x+\frac{1}{\pi}\left(2\sin x-x\cos x\right).$$

Искомое семейство экстремалей:

$$\begin{cases} y(x)=C_2\sin x-\dfrac{x}{\pi}\cos x \\ z(x)=C_2\sin x+\dfrac{1}{\pi}\left(2\sin x-x\cos x\right), \end{cases}$$

где C_2 – произвольная постоянная (бесконечное число решений).

Задачи

Найти экстремали функционалов, зависящих от нескольких функций.

5.1. $V\left[y,z\right]=\int\limits_0^{\pi/4}\left(2z-4y^2+y'^2-z'^2\right)dx$,

$y(0)=0,\ y(\pi/4)=1,\ z\left(0\right)=0,\ z\left(\pi/4\right)=1$.

5.2. $V\left[y,z\right]=\int\limits_{-1}^{1}\left(2xy-y'^2+\dfrac{z'^3}{3}\right)dx$,

$y(-1)=2,\ y(1)=0,\ z\left(-1\right)=-1,\ z\left(1\right)=1$.

5.3. $V[y,z]=\int\limits_0^{\pi/2}\left(y'^2+z'^2-2yz\right)dx$,

$$y(0)=0,\ y(\pi/2)=1,\ z(0)=0,\ z(\pi/2)=1.$$

5.4. $V[y,z]=\int\limits_0^1\left(y'^2+z'^2+2y\right)dx$,

$$y(0)=1,\ y(1)=\frac{3}{2},\ z(0)=0,\ z(1)=1.$$

5.5. $V[y,z]=\int\limits_{1/2}^1\left(y'^2-2xyz'\right)dx$,

$$y\left(\frac{1}{2}\right)=6,\ y(1)=3,\ z\left(\frac{1}{2}\right)=15,\ z(1)=1.$$

Ответы:

5.1. $\begin{cases} y(x)=\sin 2x, \\ z(x)=\dfrac{32+\pi^2}{8\pi}x-\dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$ **5.2.** $\begin{cases} y(x)=-\dfrac{1}{6}\left(x^3+5x-6\right), \\ z(x)=x. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} y(x)=\sin x, \\ z(x)=\sin x. \end{cases}$ **5.4.** $\begin{cases} y(x)=\dfrac{x^2}{2}+1, \\ z(x)=x. \end{cases}$ **5.5.** $\begin{cases} y(x)=\dfrac{3}{x}, \\ z(x)=\dfrac{2}{x^3}-1. \end{cases}$

6. Функционалы, содержащие производные высших порядков

6.1. Функционалы с производными высших порядков одной функции

Рассмотрим функционал

$$V[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}F\left[x,y(x),y'(x),y''(x),\ldots,y^{(n)}(x)\right]dx, \qquad (6.1)$$

где F – функция, дифференцируемая $(n+2)$ раза по всем аргументам, $y(x)\in C^n\left[x_0,x_1\right]$, а граничные условия имеют вид

$$
\begin{aligned}
&y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\\
&y(x_1)=y_1,\ \ y'(x_1)=y'_1,\ \ldots,\ \ y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Экстремалями функционала (6.1) являются интегральные кривые уравнения Эйлера (вывод этого уравнения можно посмотреть в [1]):

$$
F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0. \tag{6.3}
$$

Это дифференциальное уравнение порядка $2n$. Его общее решение зависит от $2n$ произвольных постоянных, которые следует определять из граничных условий (6.2).

Пример 6.1. Найти экстремали вариационной задачи

$$
V\left[y(x)\right]=\int_0^1\left[1+(y'')^2\right]dx,
$$

$$
y(0)=0,\ \ y'(0)=1,\ \ y(1)=1,\ \ y'(1)=1.
$$

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид

$$
\frac{d^2}{dx^2}\left(2y''\right)=0 \text{ или } y^{(4)}=0.
$$

Его общее решение

$$
y=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4\ .
$$

Граничные условия дают:

$$
\begin{cases}
y(0)=C_4=0,\\
y'(0)=C_3=1,\\
y(1)=C_1+C_2+C_3+C_4=1,\\
y'(1)=3C_1+2C_2+C_3=1,
\end{cases}
$$

отсюда $C_1=C_2=C_4=0,\ \ C_3=1$. Таким образом, экстремум достигается лишь на прямой $y=x$.

Найдем значение функционала на полученном решении. Подставим $y''(x)=0$ в функционал:

$$V\left[y(x)\right]=\int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1.$$

Определим, максимален или минимален функционал на полученном решении. Возьмем функцию, удовлетворяющую граничным условиям:

$$y(x)=x^4-2x^3+x^2+x.$$

Подставим в функционал $y''(x)=12x^2-12x+2$:

$$V\left[y(x)\right]=\int_0^1\left[1+(y'')^2\right]dx=\int_0^1\left[1+\left(12x^2-12x+2\right)^2\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[5+144\left(x^4-2x^3+x^2\right)+48\left(x^2-x\right)\right]dx=$$

$$=\left[5x+144\left(\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)+48\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^1=$$

$$=5+\frac{24}{5}-8=\frac{9}{5}>1.$$

Следовательно, на найденном решении $y(x)=x$ функционал минимален.

Пример 6.2. Найти экстремали вариационной задачи

$$V[y(x)]=\int_0^1\left(360x^2y-y''^2\right)dx,$$

$$y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=0,\ y'(1)=\frac{5}{2}.$$

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид

$$360x^2+\frac{d^2}{dx^2}\left(-2y''\right)=0$$

или

$$y^{(4)}(x) = 180x^2 .$$

Общее решение этого уравнения:

$$y = \frac{x^6}{2} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 .$$

Используя граничные условия, получим $C_1 = \frac{3}{2}$, $C_2 = -3$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0$. Искомая экстремаль

$$y = \frac{x^6}{2} + \frac{3x^3}{2} - 3x^2 + x .$$

6.2. Функционалы, зависящие от нескольких функций и содержащие производные выше 1-го порядка

Рассмотрим функционал вида

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', ..., y^{(n)}, z, z', ..., z^{(m)})dx \qquad (6.4)$$

и найдем кривые $y(x)$ и $z(x)$, на которых он экстремален при краевых условиях:

$$\begin{array}{l} y(x_0) = y_0,\ \ y(x_1) = y_1,\ ...,\ z(x_1) = z_1 ... \\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_1) = y_1',\ ...,\ z'(x_1) = z_1' ... \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{\ (n-1)},\ ...,\ z^{(m-1)}(x_1) = z_1^{\ (m-1)} \end{array}$$

Уравнения Эйлера для такой краевой задачи следующие:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0,$$

$$F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{z''} - ... + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}} = 0.$$

Задачи

Найти экстремали функционалов, зависящих от производных высших порядков.

6.1. $V[y]=\int\limits_a^b\left(y^2+2y'^2+y''^2\right)dx$,

$y(0)=0$, $y(1)=0$, $y'(0)=1$, $y'(1)=-\mathrm{sh}1$.

6.2. $V[y]=\int\limits_a^b\left(240y+y'''^2\right)dx$, $y(-1)=1$, $y(0)=0$,

$y'(-1)=-4.5$, $y'(0)=0$, $y''(-1)=16$, $y''(0)=0$.

6.3. $V[y]=\int\limits_a^b\left(y+y''\right)dx$, $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$,

$y'(a)=y_0'$, $y'(b)=y_1'$.

6.4. $V[y]=\int\limits_a^b\left(y'^2+yy''\right)dx$, $y(a)=A_1$, $y(b)=B_1$,

$y'(a)=A_2$, $y'(b)=B_2$.

6.5. $V[y]=\int\limits_0^1\left(y'^2+y''^2\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\mathrm{sh}1$,

$y'(0)=1$, $y'(1)=\mathrm{ch}1$.

6.6. $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y''^2-2y'^2+y^2-2y\sin x\right)dx$.

6.7. $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y'''^2+y^2-2yx^3\right)dx$.

Ответы:

6.1. $y=(1-x)\mathrm{sh}\,x$. **6.2.** $y=\dfrac{x^3}{6}\left(x^3+6x+1\right)$. **6.3.** Экстремалей нет.

6.4. Функционал на всех кривых принимает постоянное значение: под знаком интеграла стоит полный дифференциал.

6.5. $y=\mathrm{sh}\,x$. **6.6.** $y=\left(C_1+C_2x\right)\cos x+\left(C_3+C_4x\right)\sin x-\dfrac{x^2}{4}\sin x$.

6.7. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$

$$+ e^{-\frac{x}{2}}\left(c_5 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x^3.$$

7. Задача с подвижными границами

До сих пор при исследовании функционала

$$V[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

предполагалось, что граничные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) неподвижны.

Предположим теперь, что одна или обе граничные точки могут перемещаться. Тогда класс допустимых кривых расширяется – кроме кривых сравнения, имеющих общие граничные точки с исследуемой кривой, можно уже брать и кривые со смещенными граничными точками.

Понятно, что если на какой-нибудь кривой $y = y(x)$ достигается экстремум в задаче с подвижными граничными точками, то экстремум тем более достигается по отношению к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с кривой $y = y(x)$. Следовательно, должно быть выполнено основное условие, необходимое для достижения экстремума в задаче с неподвижными границами, – функция $y(x)$ должна быть решением уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Общее решение этого уравнения содержит две произвольные постоянные, для определения которых необходимо иметь два условия.

Если одна из граничных точек фиксирована, то одно условие определяется из граничного условия $y\left(x_0\right) = y_0$.

Пусть граничная точка (x_1, y_1) перемещается по кривой $y_1 = \psi(x_1)$. Тогда можно показать, что имеет место соотношение:

$$\left[F + (\psi' - y')F_{y'}\right]_{x=x_1} = 0 \qquad (7.1)$$

(идею получения этой формулы можно найти в [1]). Это условие совместно с уравнением $y_1 = \psi(x_1)$ позволяет определить одну или несколько экстремалей пучка, на которых может достигаться экстремум.

В частности, если точка (x_1, y_1) может перемещаться только по горизонтальной прямой $y = y_1$ $(\psi' = 0)$, то уравнение (7.1) имеет вид

$$\left[F + y'F_{y'}\right]_{x=x_1} = 0 .$$

Если точка (x_1, y_1) может перемещаться только по вертикальной прямой $x = x_1$, то будем иметь

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0 .$$

Пример 7.1. Исследовать на экстремум функционал

$$V[y] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y} dx ,$$

причем $y(0) = 0$, $y_1 = x_1 - 5$.

Решение. Интегральными кривыми уравнения Эйлера являются окружности

$$\left(x - C_1\right)^2 + y^2 = C_2^2 .$$

Первое граничное условие дает $C_1 = C_2$. Условие (7.1) дает

$$\left[\frac{1}{y}\sqrt{1+(y')^2} + \frac{y'}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}(\psi' - y')\right]_{x=x_1} = 0 ,$$

$$\frac{1+\psi' y'}{y\sqrt{1+(y')^2}}=0,$$

т.е. $y'=-\dfrac{1}{\psi'}$ – линии $y=y(x)$ и $y_1=\psi(x_1)$ взаимно ортогональны. Значит, прямая $y_1=x_1-5$ должна быть диаметром окружности и, следовательно, центр искомой окружности находится в точке (0,5) пересечения прямой $y_1=x_1-5$ с осью абсцисс (рис. 7). Итак, экстремум может достигаться лишь на дугах окружности $(x-5)^2+y^2=25$, или $y=\sqrt{x(10-x)}$.

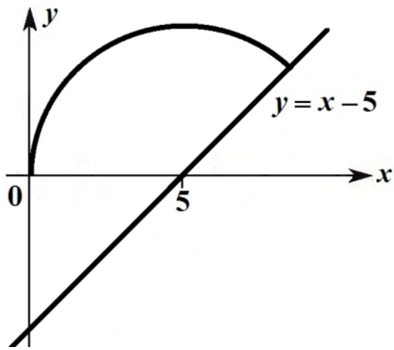


Рис. 7. Графики окружности $(x-5)^2+y^2=25$ и прямой $y_1=x_1-5$

Сформулируем задачу с подвижными границами в более общем виде. Рассмотрим функционал

$$V[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F\big(x,y(x),y'(x)\big)dx \tag{7.2}$$

и пусть в плоскости *Oxy* заданы две кривые

$$y=\varphi(x), \quad y=\psi(x), \tag{7.3}$$

где $\varphi(x)\in C^1[a,b]$ и $\psi(x)\in C^1[a,b]$. Функционал $V[y]$ определен на гладких кривых $y=y(x)$, концы которых $A(x_0,y_0)$ и

$B(x_1, y_1)$ лежат на заданных линиях (7.3), так что $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \psi(x_1)$.

Пусть кривая $y = y(x)$ доставляет экстремум функционалу $V[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ среди всех кривых класса $C^1[a,b]$, соединяющих две произвольные точки двух данных кривых $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$. Тогда кривая y является экстремалью в концах $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, и для кривой $y = y(x)$ выполняются *условия трансверсальности*

$$\begin{aligned} &\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]_{x=x_0} = 0, \\ &\left[F + (\psi' - y')F_{y'}\right]_{x=x_1} = 0 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Итак, для решения задачи с подвижными границами необходимо:

1) написать и решить соответствующее уравнение Эйлера. В результате получим семейство экстремалей $y = f(x, C_1, C_2)$, зависящее от двух параметров C_1 и C_2;
2) из условий трансверсальности (7.4) и из уравнений

$$\begin{aligned} &f(x_0, C_1, C_2) = \varphi(x_0), \\ &f(x_1, C_1, C_2) = \psi(x_1) \end{aligned} \tag{7.5}$$

   определить постоянные C_1, C_2 и абсциссы x_0, x_1 точек *A*, *B*;
3) вычислить экстремум функционала (7.2).

Пример 7.2. Найти расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $y = x - 5$.

Решение. Задача сводится к нахождению экстремального значения функционала

$$V[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \tag{7.6}$$

при условии, что левый конец экстремали может перемещаться по кривой $y = x^2$, а правый – по прямой $y = x - 5$. Таким образом, в нашем случае имеем

$$\varphi(x) = x^2, \ \psi(x) = x - 5.$$

Общее решение уравнения Эйлера будет:

$$y = C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые предстоит определить.

Условия (7.4) имеют вид

$$\left[\sqrt{1+(y')^2} + \frac{(2x - y')y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right]_{x=x_0} = 0,$$
$$\left[\sqrt{1+(y')^2} + \frac{(1 - y')y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right]_{x=x_1} = 0, \quad (7.7)$$

где $y' = C_1$.

После преобразований получим

$$1 + 2x_0 C_1 = 0, \quad 1 + C_1 = 0. \quad (7.8)$$

Условия (7.5) пересечения экстремали с кривыми $y = x^2$ и $y = x - 5$ принимают вид

$$C_1 x_0 + C_2 = x_0^2, \quad C_1 x_1 + C_2 = x_1 - 5. \quad (7.9)$$

Четыре уравнения (7.8), (7.9) определяют неизвестные параметры C_1, C_2, x_0, x_1:

$$C_1 = -1, \ C_2 = \frac{3}{4}, \ x_0 = \frac{1}{2}, \ x_1 = \frac{23}{8}.$$

Значит, экстремалью является прямая $y = \frac{3}{4} - x$, а расстояние между данными параболой и прямой равно

$$l=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}}\sqrt{1+(-1)^2}\,dx=\sqrt{2}\,x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}}=\frac{19\sqrt{2}}{8}.$$

Задачи

7.1. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,0)$ до эллипса $4x^2+9y^2=36$.

7.2. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1,5)$ до параболы $x=y^2$.

7.3. Найти кратчайшее расстояние между окружностью $x^2+y^2=1$ и прямой $x+y=4$.

7.4. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1,3)$ до прямой $y=1-3x$.

7.5. Найти функцию, реализующую экстремум функционала

$$V[y]=\int\limits_0^{\pi/4}\left(y^2-y'^2\right)dx,\quad y(0)=0,$$

если другая граничная точка может скользить по прямой $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Ответы: 7.1. $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. **7.2.** $2\sqrt{5}$. **7.3.** $2\sqrt{2}-1$. **7.4.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **7.5.** $y=0$.

8. Вариационные задачи на условный экстремум

Для исследования на экстремум *функции* $z=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ при наличии связей $\varphi_i\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=0$ $(i=1,2,...,m)$, $m<n$, используют метод неопределенных множителей Лагранжа, в котором составляется вспомогательная функция

$$z^*=f+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i$$

и z^* исследуют на безусловный экстремум, т. е. составляется система

$$\frac{\partial z^*}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, ..., n),$$

дополненная уравнениями связей $\varphi_i = 0$, из которой определяются все $(n+m)$ неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

Аналогично, если в вариационной задаче на условный экстремум требуется найти экстремум *функционала*

$$V[y_1, y_2, ... y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, y_2, ... y_n, y_1', y_2', ... y_n'\right) dx,$$
$$y_k\left(x_0\right) = y_{k0}, \quad y_k\left(x_1\right) = y_{k1} \quad (k = 1, 2, ..., n), \tag{8.1}$$

при наличии условий связи на функции

$$\varphi_i\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m < n, \tag{8.2}$$

составляют вспомогательный функционал

$$V^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i \right) dx$$

$$V^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

где $F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i$, который уже исследуется на безусловный экстремум, т. е. решают систему уравнений Эйлера

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0 \quad (j = 1, 2, ..., n),$$

дополненную уравнениями связей

$$\varphi_i = 0 \quad (i = 1, 2, ..., m).$$

Затем, используя граничные условия $y_j\left(x_0\right)=y_{j0}$, $y_j\left(x_1\right)=y_{j1}$ (которые не должны противоречить уравнениям связи), вообще говоря, можно определить $2n$ постоянных в общем решении уравнения Эйлера.

8.1. Задача о геодезических

Найти кратчайшее расстояние между двумя точками $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$ *и* $B\left(x_1,y_1,z_1\right)$ *на поверхности* $\varphi(x,y,z)=0$.

Решение. Требуется найти минимум функционала

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx$$

при условии $\varphi(x,y,z)=0$.

Введем функционал

$$l^*=\int_{x_0}^{x_1}\left[\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda\cdot\varphi(x,y,z)\right]dx$$

и для него напишем уравнения Эйлера:

$$\begin{cases}\lambda\varphi_y-\dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=0,\\ \lambda\varphi_z-\dfrac{d}{dx}\dfrac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=0,\end{cases}$$
$$\varphi(x,y,z)=0.$$

Из этих трех уравнений определяются искомые функции $y=y(x)$ и $z=z(x)$, на которых может достигаться условный минимум *l*, и множитель λ.

Пример 8.1. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1,-1,0)$ и $B(2,1,-1)$, лежащими на поверхности $15x-7y+z-22=0$.

Решение. Это вариационная задача на условный экстремум с уравнением связи $\varphi(x,y,z)=0$, в которой нужно определить геодезическую линию на поверхности.

Расстояние между двумя точками $A(x_0,y_0,z_0)$ и $B(x_1,y_1,z_1)$ на поверхности $\varphi(x,y,z)=0$ определяется по формуле

$$l[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx,$$

где $y=y(x)$, $z=z(x)$.

Нужно найти минимум l при условии $\varphi(x,y,z)=0$. В нашем случае:

$$x_0=1,\ x_1=2,\ \varphi(x,y,z)=15x-7y+z-22.$$

Составим вспомогательный функционал

$$V^*=\int_1^2\left[\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(15x-7y+z-22)\right]dx$$

и запишем уравнения Эйлера

$$\lambda\cdot(-7)-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}\right)=0, \tag{8.3}$$

$$\lambda\cdot 1-\frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}\right)=0. \tag{8.4}$$

Решим систему уравнений (8.3), (8.4), используя условие связи

$$15x-7y+z-22=0. \tag{8.5}$$

Искомые функции $y=y(x)$ и $z=z(x)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$y(1) = -1, \quad z(1) = 0,$$
$$y(2) = 1, \quad z(2) = -1. \tag{8.6}$$

Умножая уравнение (8.4) на 7 и складывая с (8.3), получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y' + 7z'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{y' + 7z'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = C. \tag{8.7}$$

Из (8.5) имеем

$$z' = 7y' - 15. \tag{8.8}$$

Подставляя это значение z' в (8.7) и решая полученное дифференциальное уравнение, найдем $y = C_1 x + C_2$. Граничные условия (8.6) дают $C_1 = 2$, $C_2 = -3$, так что

$$y(x) = 2x - 3. \tag{8.9}$$

Из (8.8) с учетом (8.9) находим

$$z(x) = 1 - x \tag{8.10}$$

(граничные условия для функции (8.10), очевидно, выполняются). Из (8.9) или (8.4) получаем $\lambda \equiv 0$. Искомое расстояние

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + (2)^2 + (-1)^2}\, dx = \sqrt{6}.$$

Этот же результат сразу получается из очевидных геометрических соображений.

8.2. Задача Дидоны (пример изопериметрической задачи)

Среди замкнутых кривых длины 2l найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

Решение. Заметим, что рассматриваемая кривая должна быть выпуклой. В самом деле, в противном случае существовала бы прямая L (рис. 8) такая, что если зеркально отразить в ней кусок границы BCD, то получим область большей площади, чем первоначальная, при той же длине границы.

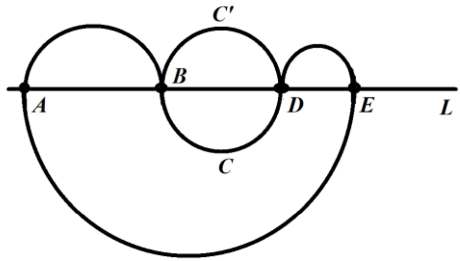


Рис. 8. Иллюстрация к задаче Дидоны

Далее установим, что всякая прямая, которая делит пополам замкнутую кривую, ограничивающую наибольшую площадь, будет делить пополам и саму эту площадь. Пусть прямая L_1 не обладает этим свойством. Отразив тогда зеркально около L_1 ту часть фигуры, которая имеет большую площадь, мы получили бы кривую той же длины, но ограничивающую большую площадь.

Выбирая за ось Ox любую из прямых, делящих кривую пополам, приходим к следующей постановке задачи.

Найти линию $y = y(x)$, $y(-a) = y(a) = 0$, которая при заданной длине $l > 2a$ ограничивает вместе с отрезком $-a \le x \le a$ оси Ox наибольшую площадь. Следовательно, задача сводится к поиску экстремума функционала

$$A[y] = \int_{-a}^{a} y dx, \quad y(-a) = y(a) = 0 \tag{8.11}$$

при условии, что

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y')^2} dx = l, \quad (l > 2a). \tag{8.12}$$

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$A^* = \int_{-a}^{a} \left[y + \lambda\sqrt{1+(y')^2} \right] dx. \qquad (8.13)$$

Подынтегральная функция в функционале (8.13) не зависит явно от x, поэтому уравнение Эйлера для него имеет вид $F - y' \cdot F_{y'} = C_1$ или

$$y + \lambda\sqrt{1+(y')^2} - \frac{\lambda (y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1,$$

откуда

$$y - C_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Полагая $y' = \operatorname{tg} t$, получаем

$$y - C_1 = -\lambda \cos t, \qquad (8.14)$$

Из $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$ следует $dx = \dfrac{dy}{\operatorname{tg} t} = \dfrac{\lambda \sin t dt}{\operatorname{tg} t} = \lambda \cos t dt$, т.е.

$$x - C_2 = -\lambda \sin t. \qquad (8.15)$$

Исключая t из параметрических уравнений экстремалей (8.14) и (8.15), находим

$$\left(y - C_1\right)^2 + \left(x - C_2\right)^2 = \lambda^2.$$

Это семейство окружностей. Постоянные C_1, C_2, λ определяются их условий

$$y(-a) = y(a) = 0,$$

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1+(y')^2} dx = l.$$

Пример 8.2. Найти минимум интеграла

$$V[y]=\int_0^{\pi} y'^2 dx$$

при условии

$$\int_0^{\pi} y^2 dx = 1,\ y(0)=y(\pi)=0.$$

Решение. Составим вспомогательный функционал

$$V^* = \int_0^{\pi}\left(y'^2+\lambda y^2\right)dx$$

и запишем для него уравнение Эйлера

$$2\lambda y - \frac{d}{dx}\left(2y'\right)=0,$$

$$y'' - \lambda y = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2-\lambda=0$ или $r_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda}$. Ясно, что λ должно быть меньше нуля, так как если допустить, что $\lambda>0$, то общее решение уравнения Эйлера будет иметь вид $y=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$ и граничные условия $y(0)=0$, $y(\pi)=0$ будут удовлетворяться только при $C_1=0$, $C_2=0$, т.е. при $y(x)\equiv 0$. Но в таком случае не будет выполняться условие $\int_0^{\pi} y^2 dx = 1$.

Аналогично в случае $\lambda=0$ решением уравнения Эйлера, удовлетворяющим заданным граничным условиям, будет функция $y(x)\equiv 0$. Поэтому считаем $\lambda<0$, так что $r_{1,2}=\pm i\sqrt{-\lambda}$, и общим решением уравнения Эйлера будет

$$y=C_1\sin\sqrt{-\lambda}x+C_2\cos\sqrt{-\lambda}x.$$

Условие $y(0)=0$ дает $C_2=0$, а условие $y(\pi)=0$ дает $-\lambda=k^2$ $(k=1,2,...)$. Итак, $y=C_1\sin kx$, где C_1 пока не определено. Воспользовавшись условием связи $\int\limits_0^{\pi} y^2dx=1$, получим

$$\int\limits_0^{\pi} C_1^2\sin^2 kxdx=1,$$

откуда

$$C_1=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.$$

Значит,

$$y(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx\,.$$

Но среди этих экстремалей, проходящих через точки $(0,0)$ и $(\pi,0)$, условию Якоби (подробности, связанные с этим условием, можно найти в [1]) удовлетворяют только две:

$$y(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x\,.$$

На этих экстремалях

$$V[y]=\int\limits_0^{\pi} y'^2dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=1\,.$$

Пример 8.3. Найдите форму однородного гибкого кабеля длины $2l$ и линейной плотности ρ, подвешенного за два конца на равной высоте.

Решение. Потенциальная энергия элемента dl подвешенного кабеля (при $y(-a)=y(a)=0$) есть $g\rho ydl$, а всего кабеля

$$U=\int\rho gydsl=\rho g\int\limits_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \qquad (8.16)$$

Длина кабеля

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2l. \qquad (8.17)$$

Очевидно, что $2l \geq 2a$.

Это задача на условный экстремум функционала

$$U\left[y(x)\right] = \int_{-a}^{a} F(y, y')dx$$

при условии

$$L\left[y(x)\right] = \int_{-a}^{a} \Phi(y')dx = 2l\,.$$

Поскольку $F(y, y')$ и $\Phi(y')$ не зависят явно от *x*, то вместо уравнения Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial y}(F + \lambda\Phi) - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(F + \lambda\Phi) = 0$$

можно использовать его первый интеграл

$$(F + \lambda\Phi) - y'\frac{\partial}{\partial y'}(F + \lambda\Phi) = C_1\,,$$

т.е.

$$\rho g y - \lambda = C_1\sqrt{1+y'^2}\,.$$

Отсюда

$$y'^2 = \left(\frac{\rho g y - \lambda}{C_1}\right)^2 - 1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{C_1}\sqrt{(\rho g y - \lambda)^2 - C_1^2}\,.$$

Решаем это уравнение относительно *x*:

$$x = C_1 \int \frac{dy}{\sqrt{(\rho g y - \lambda)^2 - C_1^2}}.$$

Сделав замену $\rho g y - \lambda = C_1 \operatorname{ch} z$, получим

$$x = \int \frac{C_1 \operatorname{sh} z dz}{\rho g \sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1}} = \frac{C_1}{\rho g} z + C_2 \qquad (8.18)$$

и, следовательно,

$$y = \frac{\lambda}{\rho g} + \frac{C_1}{\rho g} \operatorname{ch} \frac{\rho g (x - C_2)}{C_1}. \qquad (8.19)$$

Значения трех констант C_1, C_2 и λ, входящих в выражение (8.19), находим из трех условий: $y(-a) = y(a) = 0$ и условия (8.17). Получим

$$y(x) = \frac{\alpha}{\rho g} \left(\operatorname{ch} \frac{\rho g x}{\alpha} - \operatorname{ch} \frac{\rho g a}{\alpha} \right), \qquad (8.20)$$

где α определяется из уравнения $\alpha \operatorname{sh}(\rho g a / \alpha) = \rho g l$.

Таким образом, форма подвешенного кабеля описывается уравнением *цепной линии*.

Пример 8.4. Среди кривых длины l, проходящих через точки (0,0) и (1,0), найдите ту, которая ограничивает наибольшую площадь между этой кривой и осью Ox.

Решение. Искомая площадь определяется выражением

$$A = \int_0^1 y dx,$$

а длина кривой – формулой

$$\int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = l,$$

где $l > 1$. Как и в примере 8.3, функционал

$$F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$$

не зависит явно от *x*, поэтому вместо уравнения Эйлера можно использовать его первый интеграл

$$\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - y - \lambda\sqrt{1 + y'^2} = -C_1$$

или

$$\lambda = (C_1 - y)\sqrt{1 + y'^2} \; .$$

Разрешив это уравнение относительно dy / dx и проинтегрировав, получим

$$x = \pm\int \frac{(C_1 - y)dy}{\sqrt{\lambda^2 - (C_1 - y)^2}} \; .$$

Сделав замену $z = C_1 - y$, находим

$$\left(x - C_2\right)^2 + \left(y - C_1\right)^2 = \lambda^2 \; .$$

Таким образом, искомая кривая – это окружность радиуса λ с центром в точке $\left(C_1, C_2\right)$. Значения констант C_1, C_2 и λ можно найти исходя из того, что окружность проходит через точки (0,0) и (1,0) и имеет длину *l*. В результате получим $C_1 = 0$, $C_2 = 1/2$ и $\lambda = 1/2$.

Задачи

8.1. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, 0, -1)$ и $B(0, -1, 1)$, лежащими на поверхности $x + y + z = 0$.

Найти экстремали в изопериметрических задачах:

8.2. $V[y]=\int_0^1 y'^2dx$, $y(0)=1$, $y(1)=6$, при условии $\int_0^1 ydx=3$.

8.3. $V[y]=\int_0^1 \left(x^2+y'^2\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$, при условии $\int_0^1 y^2dx=2$.

8.4. $V[y]=\int_0^1 y'^2dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\frac{1}{4}$, при условии $\int_0^1 \left(y-y'^2\right)dx=\frac{1}{12}$.

8.5. $V[y,z]=\int_0^1 \left(y'^2+z'^2-4xz'-4z\right)dx$, $y(0)=0$, $z(0)=0$, $y(1)=1$, $z(1)=1$ при условии $\int_0^1 \left(y'^2-xy'-z'^2\right)dx=2$.

Ответы:

8.1. $\sqrt{6}$. **8.2.** $y=3x^2+2x+1$.

8.3. $y=2\sin\pi nx$, n - целое.

8.4. $y=\frac{1}{4}\left(2x-x^2\right)$.

8.5. $\begin{cases} y_1=-\frac{5}{2}x^2+\frac{7}{2}x \\ z_1=x \end{cases}$, $\begin{cases} y_2=3x^2-2x \\ z_2=x. \end{cases}$

9. Понятие о прямых методах вариационного исчисления

Основным методом, доказательства существования и нахождения решения вариационных задач, которым мы пользовались в предыдущих разделах, было решение краевой задачи, базирующейся на уравнениях Эйлера и его модификациях. Существует другой подход, основанный на так называемых *прямых методах.* Его основная идея заключается в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для некоторой задачи на экстремум *функции* конечного числа переменных. Эта задача решается обычными методами, а затем предельным переходом, при котором строится последовательность функций, сходящейся к искомой функции, получается решение соответствующей вариационной задачи.

Прямые методы вариационного исчисления оказались полезными и для решения дифференциальных уравнений. Действительно, если дифференциальное уравнение можно рассматривать как уравнение Эйлера для некоторого функционала и если установлено, что этот функционал имеет экстремум, то тем самым доказано, что исходное дифференциальное уравнение имеет решение при рассматриваемых краевых условиях. Так как прямой метод состоит в построении последовательности функций, сходящейся к искомой функции, то с его помощью не только устанавливается существование решения, но и дается способ приближенного построения этого решения.

Большинство прямых методов основано на следующей идее. Рассмотрим, для определенности, задачу о нахождении минимума некоторого функционала $V[y]$, определенного на каком-то классе M допустимых кривых. Для того чтобы задача имела смысл, следует предположить, что в классе M существуют кривые, для которых функционал $V[y]$ конечен, а также конечна точная нижняя грань $\inf\limits_{y\in M} V[y] = \mu > -\infty$.

В этом случае, по определению точной нижней грани, существует такая последовательность кривых $y_1, y_2, ..., y_n$ из M (*минимизирующая последовательность*), что

$$\lim_{n\to\infty} V\left[y_n\right] = \mu.$$

Если для последовательности $\left\{y_n\right\}$ существует предельная кривая $y^{(0)}$ и если окажется законным предельный переход

$$V\left[y^{(0)}\right]=\lim_{n\to\infty}V\left[y_n\right],$$

то тогда

$$V\left[y^{(0)}\right]=\mu$$

т.е. предельная кривая $y^{(0)}$ и будет решением рассматриваемой задачи.

Таким образом, решение вариационной задачи прямым методом слагается из

1) построения минимизирующей последовательности $\{y_n\}$,
2) доказательства существования у этой последовательности предельной кривой $y^{(0)}$,
3) доказательства законности предельного перехода (1).

Сами члены минимизирующей последовательности можно рассматривать как приближенные решения соответствующей вариационной задачи.

Главная трудность при строгом обосновании прямых методов вариационного исчисления заключается в том, что минимизирующие последовательности могут не сходиться к какой-то предельной функции даже в тех случаях, когда существование решения является несомненным. Обсуждая ниже метод Ритца и метод ломаных, мы даем способы фактического построения приближенных решений, оставив в стороне вопросы сходимости и существования точного решения.

9.1. Конечно-разностный метод Эйлера

Каждую задачу о нахождении экстремума функционала $\int_a^b F(x,y,y')dx$ можно (приближенно) заменить задачей о нахождении экстремума для функции конечного числа переменных, если искомую функцию заменить ломаной, вершины которой имеют фиксированные абсциссы $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$, а е` производную $y'(x)$ – разностным отношением $\dfrac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{\Delta x_i}$.

Рассмотрим простейшую вариационную задачу: найти экстремум функционала

$$V[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx, \qquad (9.1)$$
$$y(a)=y_a, \quad y(b)=y_b.$$

Идея конечно-разностного метода заключается в том, что значения функционала $V[y]$ рассматриваются не на произвольных, допустимых в данной вариационной задаче кривых, а лишь на ломаных, составленных из заданного числа n прямолинейных звеньев, с заданными абсциссами вершин:

$$x_i=a+i\Delta x,$$

где $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$. На таких ломаных функционал $V[y]$ превращается в функцию $\Phi(y_1,y_2,...,y_{n-1})$ ординат $y_1,y_2,...,y_{n-1}$ вершин ломаной.

Ординаты $y_1,y_2,...,y_{n-1}$ выбираются так, чтобы функция $\Phi(y_1,y_2,...,y_{n-1})$ достигала экстремума, т. е. $y_1,y_2,...,y_{n-1}$ определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y_2}=0,\ ...,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y_{n-1}}=0.$$

Полученная ломаная является приближенным решением вариационной задачи (9.1).

Пример 9.1. Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала [2]

$$V[y]=\int_0^1\left(y'^2+2y\right)dx,$$

$$y(0)=y(1)=0.$$

Решение. Возьмем $\Delta x = \dfrac{1-0}{5} = 0.2$ и положим

$$y_0 = y(0) = 0, \quad y_1 = y(0.2), \quad y_2 = y(0.4),$$
$$y_3 = y(0.6), \quad y_4 = y(0.8), \quad y_5 = y(1) = 0.$$

Значения производных приближенно заменим по формуле

$$y_i' = y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}.$$

Тогда

$$y'(0) = \frac{y_1 - 0}{0.2}, \quad y'(0.2) = \frac{y_2 - y_1}{0.2}, \quad y'(0.4) = \frac{y_3 - y_2}{0.2},$$
$$y'(0.6) = \frac{y_4 - y_3}{0.2}, \quad y'(0.8) = \frac{0 - y_4}{0.2}.$$

Данный интеграл заменяем суммой по формуле прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) \right] \Delta x.$$

Получим

$$\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = \left[\left(\frac{y_1}{0.2} \right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{0.2} \right)^2 + 2y_1 + \left(\frac{y_3 - y_2}{0.2} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2y_2 + \left(\frac{y_4 - y_3}{0.2} \right)^2 + 2y_3 + \left(-\frac{y_4}{0.2} \right)^2 + 2y_4 \right] \cdot 0.2.$$

Составляем систему уравнений для определения ординат y_1, y_2, y_3, y_4 искомой ломаной:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{0.2}\cdot\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_1}=\dfrac{y_1}{0.02}-\dfrac{y_2-y_1}{0.02}+2=0, \\ \dfrac{1}{0.2}\cdot\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_2}=\dfrac{y_2-y_1}{0.02}-\dfrac{y_3-y_2}{0.02}+2=0, \\ \dfrac{1}{0.2}\cdot\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_3}=\dfrac{y_3-y_2}{0.02}-\dfrac{y_4-y_3}{0.02}+2=0, \\ \dfrac{1}{0.2}\cdot\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_4}=\dfrac{y_4-y_3}{0.02}-\dfrac{y_4}{0.02}+2=0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2y_1-y_2=-0.04, \\ -y_1+2y_2-y_3=-0.04, \\ -y_2+2y_3-y_4=-0.04, \\ -y_3+2y_4=-0.04, \end{cases}$$

Решение этой системы: $y_1=-0.08$, $y_2=-0.12$, $y_3=-0.12$, $y_4=-0.08$.

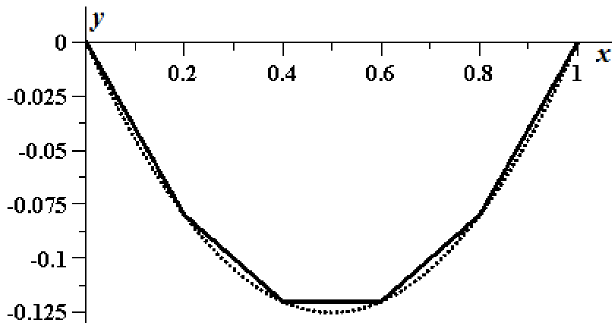


Рис. 9. Сплошная линия – приближенное решение; точечная линия – точное решение $y(x)=0.5x(1-x)$.

Значения точного решения $y=0.5x(x-1)$ в точках y_1, y_2, y_3, y_4 совпадают со значениями приближенного решения (рис. 9).

9.2. Метод Ритца

Одним из важнейших практических методов для построения минимизирующих последовательностей является метод Ритца. Пусть надо найти минимум функционала

$$V\left[y(x)\right]=\int_a^b F\left(x,y,y'\right)dx, \qquad (9.2)$$
$$y(a)=y_a, \quad y(b)=y_b.$$

Предполагается, что $y(x)\in C^{(1)}$ и функция F непрерывна по всем аргументам.

Основная идея метода Ритца заключается в том, что при разыскании экстремума функционала $V[y]$ рассматривается не все пространство допустимых функций, а лишь всевозможные линейные комбинации допустимых функций:

$$y_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x), \qquad (9.3)$$

где α_k – постоянные, а $\left\{\varphi_k(x)\right\}$ – полная система линейно независимых *базисных функций*. На базисные функции накладываются дополнительные условия типа гладкости или удовлетворения граничным условиям.

На линейных комбинациях (9.3) функционал $V[y]$ обращается в функцию аргументов $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n$:

$$V\left[y_n(x)\right]=\int_a^b F\left(x,\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x),\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k'(x)\right)dx. \qquad (9.4)$$

В интеграле все функции заданы и выполнив интегрирование получают определенную функцию $\Phi\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)$. Коэффициенты α_k надо выбрать так, чтобы функция Φ принимала минимальное значение. Необходимым условием экстремума функции Φ будет

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{9.5}$$

Система уравнений (9.5) – это система нелинейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$. Найденные из этой системы коэффициенты α_k определяют приближенное решение $y_n(x)$ экстремальной задачи. Беря разные *n*, строят минимизирующую последовательность $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$. Если эта последовательность сходится к некоторой предельной функции, то она является решением исходной задачи:

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x) .$$

Для оценки точности результатов на практике, вычислив y_n и y_{n+1}, сравнивают их между собой в нескольких точках отрезка $[a, b]$. Если в пределах требуемой точности их значения совпадают, то считают, что с требуемой точностью решение рассматриваемой вариационной задачи равно y_n. Если же значения y_n и y_{n+1} хотя бы в некоторых из выбранных точек в пределах заданной точности не совпадают, то вычисляют y_{n+2} и сравнивают это значение с y_{n+1}. Этот процесс продолжается до тех пор, пока значения y_{n+k} и y_{n+k+1} не совпадут в пределах заданной точности.

Замечание 1. Решение системы уравнений (9.5), вообще говоря, является весьма сложной задачей. Эта задача значительно упрощается, если подынтегральное выражение $F(x, y, y')$ квадратично относительно y и y'. В этом случае уравнения, которые получаются для определения коэффициентов α_k будут линейными, и следовательно, нахождение этих коэффициентов не представляет существенных трудностей.

Замечание 2. Быстрота сходимости метода Ритца для данной вариационной задачи зависит как от самой рассматриваемой задачи, так и от выбора функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ ...,\ \varphi_n(x),\ ...$$

Следует подчеркнуть, что во многих случаях достаточно взять линейную комбинацию совсем небольшого числа функций φ_n (3–4, иногда даже меньше) для того, чтобы получить вполне удовлетворительное приближение к точному решению.

На практике последовательность $\{\varphi_n\}$ обычно строят с помощью системы многочленов $1,\ x,\ ...,\ x^n$ или системы тригонометрических функций $\sin x,\ \sin 2x,\ ...,\ \sin nx$. Обе системы являются полными в пространстве непрерывных функций.
При нулевых граничных условиях в качестве координатных функций можно выбрать

$$\varphi_k(x) = (x-a)^{k-1}(x-b)\psi_k(x) \quad (k = 1, 2, ...),$$

где $\psi_k(x)$ – какие-нибудь непрерывные функции, или

$$\varphi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{2} \cdot \frac{x-a}{b-a}\right) \quad (k = 1, 2, ...),$$

или какие-нибудь другие функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0.$$

Если краевые условия неоднородны, например $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, то проще всего искать решение вариационной задачи в виде

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x),$$

где $\varphi_0(x)$ удовлетворяет заданным граничным условиям $\varphi_0(a) = y_a$, $\varphi_0(b) = y_b$, а все остальные $\varphi_k(x)$ удовлетворяют соответствующим однородным граничным условиям. В качестве функции $\varphi_0(x)$ можно выбрать, например, линейную функцию

$$\varphi_0(x) = y_a + \frac{y_b - y_a}{b-a}(x-a)$$

или функцию

$$\varphi_0(x) = y_a + \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x-a}{b-a}\right)\left(y_b - y_a\right).$$

Все сказанное выше относится к функционалам $V\left[z(x_1, x_2, ..., x_n)\right]$, причем в этом случае функции φ_k должны быть уже функциями переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, а также к функционалам, зависящим от нескольких функций.

Пример 9.2. Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$V\left[y\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(y'^2 + y^2 + 2y\sin x\right)dx, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

и сравнить с точным решением.

Решение. В качестве базисных функций $\varphi_k(x)$ можно взять

$$\varphi_k(x) = (1-x)x^k \qquad (k = 1, 2, ...).$$

Функции $\varphi_k(x)$, очевидно, удовлетворяют краевым условиям

$$\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0,$$

являются линейно независимыми и представляют в пространстве $C^1[0,1]$ полную систему.

Решение задачи минимизации будем искать в виде

$$y_n(x) = \alpha_1 x\left(\pi - x\right) + \alpha_2 x^2\left(\pi - x\right) + ... + \alpha_n x^n\left(\pi - x\right).$$

Заметим, что при всех значениях n и любых α_k функция $y_n(x)$ удовлетворяет граничным условиям. Ограничиваясь первым слагаемым, получаем

$$y_1(x) = \alpha_1 x\left(\pi - x\right)$$

и

$$\Phi\left[y_1\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\alpha_1^2(\pi-2x)^2 + \alpha_1^2 x^2(\pi-x)^2 + 2\alpha_1 x(\pi-x)\sin x\right]dx.$$

Коэффициент α_1 найдем из условия

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1} = 0\,,$$

которое приводит к уравнению

$$\alpha_1\int_0^{\pi}\left[(\pi-2x)^2 + x^2(\pi-x)^2\right]dx = \int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin x dx.$$

Из него получаем

$$\frac{\pi^3(\pi^2+10)}{30}\alpha_1 = -4\,,$$

что дает значение $\alpha_1 = -0.1948$ и выражение для искомого приближения $y_1(x)$

$$y_1(x) = -0.1948x(\pi - x)\,.$$

Сравним с *точным решением*. Уравнение Эйлера для данного функционала:

$$y'' - y = \sin x.$$

Решая это неоднородное линейное уравнение и используя граничные условия $y(0) = y(\pi) = 0$, находим

$$y(x) = -\frac{1}{2}\sin x.$$

На рис. 10 приведены графики приближенного и точного решений. Максимальная разница между найденным приближенным и точным решениями равна ~ 0.02, что составляет около 4%. Таким образом, вполне допустимая для большинства практических целей точность достигнута уже при $n=1$.

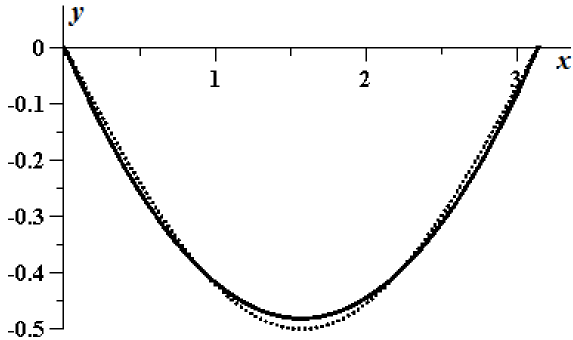


Рис. 10. Сплошная линия – приближенное решение $y_1(x)$; точечная линия – точное решение $y(x)=-0.5\sin x$

Пример 9.3. Методом Ритца найти приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$V[y]=\int_0^1 \left(y'^2-y^2+2xy\right)dx, \quad y(0)=y(1)=0$$

и сравнить с точным решением.

Решение. В качестве базисных функций $\varphi_k(x)$ выберем

$$\varphi_k(x)=(1-x)x^k \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Функции $\varphi_k(x)$, очевидно, удовлетворяют нулевым краевым условиям, являются линейно независимыми и представляют в пространстве $C^1[0,1]$ полную систему.

При $n=1$ получаем

$$y_1(x)=\alpha_1\left(x-x^2\right).$$

Подставляя это выражение для $y_1(x)$ в функционал (1), получим

$$V\left[y_1(x)\right]=\int_0^1\left[\alpha_1^2(1-2x)^2-\alpha_1^2(x-x^2)^2+2\alpha_1x(x-x^2)\right]dx=$$

$$=\frac{3}{10}\alpha_1^2+\frac{1}{6}\alpha_1=\Phi\left(\alpha_1\right).$$

Коэффициент α_1 находим из уравнения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1}=\frac{3}{5}\alpha_1+\frac{1}{6}=0,$$

откуда получаем $\alpha_1=-\dfrac{5}{18}$. Следовательно, $y_1(x)=-\dfrac{5}{18}x(1-x)$.

Сравним с *точным решением*. Уравнение Эйлера для данного функционала: $y''+y=x$. Решая это неоднородное линейное уравнение и используя граничные условия $y(0)=y(1)=0$, находим

$$y(x)=x-\frac{\sin x}{\sin 1}.$$

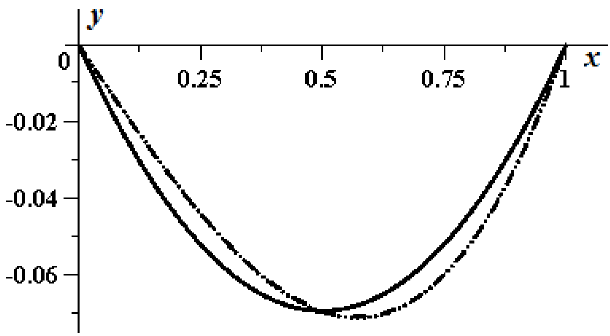


Рис. 11. Сплошная линия – приближенное решение $y_1(x)$; пунктирная линия – приближенное решение $y_2(x)$; точечная линия – точное решение $y(x)=x-\sin x/\sin 1$

Графики точного решения и приближенного решения $y_1(x)$, полученного по методу Ритца с $n=1$, приведены на рис. 11. Из графика видно, что точное решение плохо аппроксимируется многочленом второй степени – для достижения приемлемой точности требуется многочлен, степень которого не ниже третьей. Чтобы добиться более высокой степени точности возьмем еще одну базисную функцию.

При $n=2$ получаем $y_2(x)=\alpha_1 x(1-x)+\alpha_2 x^2(1-x)$. Подставляя это выражение для $y_2(x)$ в функционал $V\left[y\right]$, получим

$$V\left[y_1(x)\right]=\int_0^1\Big\{\left[\alpha_1\left(1-2x\right)+\alpha_2\left(2x-3x^2\right)\right]^2-$$

$$-\left[\alpha_1\left(x-x^2\right)+\alpha_2\left(x^2-x^3\right)\right]^2+$$

$$+2x\left[\alpha_1\left(x-x^2\right)+\alpha_2\left(x^2-x^3\right)\right]\Big\}dx=\Phi\left(\alpha_1,\alpha_2\right).$$

Коэффициенты α_1 и α_2 находим из системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1}=\dfrac{3}{5}\alpha_1+\dfrac{3}{10}\alpha_2+\dfrac{1}{6}=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha_2}=\dfrac{3}{10}\alpha_1+\dfrac{26}{105}\alpha_2+\dfrac{1}{10}=0.\end{cases}$$

Решение этой системы:

$$\alpha_1=-\frac{71}{369},\ \alpha_2=-\frac{7}{41}.$$

Следовательно,

$$y_2(x)=-x(1-x)\left(\frac{71}{369}+\frac{7}{41}x\right).$$

График приближенного решения $y_2(x)$, полученного по методу Ритца с $n=2$, также приведен на рис. 11 (пунктирная линия). Из графика видно, что две базисные функции дают уже вполне приемлемую точность аппроксимации.

Пример 9.4. Методом Ритца найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала

$$V[y]=\int_{-1}^{1}\left(y'^2-4y^2+2xy-x^2\right)dx,\ y(-1)=2,\ y(1)=4.$$

Решение. В данной задаче краевые условия неоднородны, поэтому решение вариационной задачи будем искать в виде

$$y_n(x)=\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x),$$

где $\varphi_0(x)$ удовлетворяет заданным граничным условиям $y(-1)=2$, $y(1)=4$, а все остальные $\varphi_k(x)$ удовлетворяют однородным граничным условиям.

Положим $n=1$ и будем искать приближенное решение в виде

$$y_1(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x),$$

где

$$\varphi_0(x)=2+\frac{4-2}{1+1}(x+1)=3+x,$$

$$\varphi_1(x)=\alpha_1(x+1)(x-1)=\alpha_1\left(x^2-1\right).$$

Очевидно, что при любом значении α_1 функция $y_1(x)=3+x+\alpha_1\left(x^2-1\right)$ удовлетворяет заданным краевым условиям.

Имеем

$$V[y_1(x)]=\int_{-1}^{1}\left\{\left[1+2\alpha_1x\right]^2-4\left[3+x+\alpha_1\left(x^2-1\right)\right]^2+\right.$$

$$\left.+2x\left[3+x+\alpha_1\left(x^2-1\right)\right]-x^2\right\}dx=\Phi(\alpha_1),$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = \int_{-1}^{1} \Big\{ 4x[1+2\alpha_1 x] - 8\left(x^2-1\right)\left[3 + x + \alpha_1\left(x^2-1\right)\right] +$$
$$+ 2x\left(x^2-1\right)\Big\} dx.$$

Условие $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = 0$ принимает вид

$$\alpha_1 \int_{-1}^{1} \left[8x^2 - 8\left(x^2-1\right)^2\right] dx + \int_{-1}^{1} \left[2(1-2x) - 6(4+x)\left(x - x^2\right)\right] dx = 0$$

или

$$-\frac{16}{5}\alpha_1 + 32 = 0 .$$

Отсюда получаем $\alpha_1 = 10$. Приближенное решение задачи:

$$y_1(x) = 10x^2 + x - 7 .$$

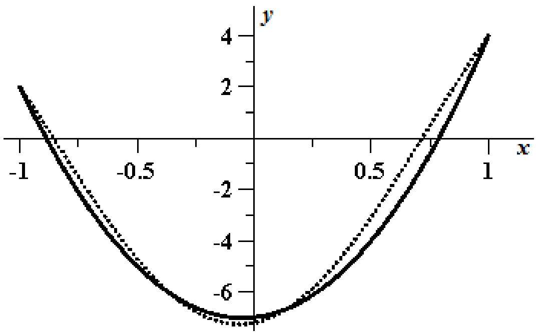


Рис. 12. Сплошная линия – приближенное решение $y_1(x)$; точечная линия – точное решение $y(x)$

Сравним с *точным решением*. Уравнение Эйлера для данного функционала:

$$y'' + 4y = x.$$

Решая это неоднородное линейное уравнение и используя граничные условия $y(-1)=2$, $y(1)=4$, находим

$$y(x)=\frac{3}{\cos 2}\cos 2x+\frac{3}{4\sin 2}\sin 2x+\frac{x}{4}.$$

Графики точного решения и приближенного решения, полученного по методу Ритца, приведены на рис. 12.

Пример 9.5. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала [2]

$$V\left[z(x,y)\right]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\right]dxdy\ ,$$

где D – квадрат $-a\le x\le a$, $-a\le y\le a$ и на границе квадрата $z=0$.

Решение. Приближенное решение будем искать в виде

$$z_0(x,y)=\alpha_0\left(x^2-a^2\right)\left(y^2-a^2\right).$$

Очевидно, так построенная функция $z_0(x,y)$ удовлетворяет поставленным граничным условиям. Подставляя $z_0(x,y)$, $\partial z_0(x,y)/\partial x$, $\partial z_0(x,y)/\partial y$ в функционал, получим после интегрирования

$$V\left[z_0\right]=\frac{256}{45}\alpha_0^2a^8-\frac{32}{9}\alpha_0a^6=\Phi\left(\alpha_0\right).$$

Далее,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_0}=\frac{512}{45}\alpha_0a^8-\frac{32}{9}a^6=0\,,$$

откуда $\alpha_0=\dfrac{5}{16a^2}$,

так что

$$z_0(x,y)=\frac{5}{16a^2}\left(x^2-a^2\right)\left(y^2-a^2\right).$$

Задачи:

Для следующих функционалов найти экстремали методом Ритца. Полученные приближенные решения сравнить с точными решениями.

9.1. $V[y]=\int\limits_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2-8xy+2x^2\right)dx;\quad y(-1)=3;\ y(1)=1;.$

9.2. $V[y]=\int\limits_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2+4x^2y+x\cos x\right)dx;\quad y(-1)=2;\ y(1)=0.5;$

9.3. $V[y]=\int\limits_{0}^{2}\left(y'^2-4y'\sin 2x-x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\ y(2)=-1;$

9.4. $V[y]=\int\limits_{0.5}^{1.5}\left(y'+y'^2\sin 2x-\cos 2x\right)dx;\quad y(0.5)=1;\ y(1.5)=2;$

9.5. $V[y]=\int\limits_{1}^{2}\left(y'+xy'^2-x^2y'\right)dx;\quad y(1)=2;\ y(2)=-1;$

9.6. $V[y]=\int\limits_{0}^{2}\left(y'+y'^2+x^2y'^2\right)dx;\quad y(0)=2;\ y(2)=-2;$

9.7. $V[y]=\int\limits_{-1}^{1}\left(y'^2+2y'e^x\sin x-e^x\cos x\right)dx;\quad y(-1)=2;\ y(1)=3;$

9.8. $V[y]=\int\limits_{0}^{2}\left(y'^2+2yy'-16y^2\right)dx;\quad y(0)=0;\ y(2)=0;$

9.9. $V[y]=\int\limits_{0}^{2}\left(xy'+y'^2\right)dx;\quad y(0)=1;\ y(2)=0;$

9.10. $V[y]=\int\limits_{-1}^{1}\left(y^2+y'^2-2y\sin x\right)dx;\quad y(-1)=2;\ y(1)=3;$

Литература

1. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 424 с.
2. *Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И.* Вариационное исчисление: Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 176 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М*. Теоретическая физика. Т. I: Механика. 5-е изд. М.: Физматлит, 2012. 224 с.
4. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 6: Электродинамика /Пер. с англ. 3-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 352 с.
5. *Henner V., Belozerova T., Forinash K.* Mathematical Methods in Physics. Wellesley; Massachusetts: AK Peters Ltd., 2009.
6. *Henner V., Belozerova T., Khenner M.* Ordinary and Partial Differential Equations, CRC Press, 2013.

Учебное издание

Хеннер Виктор Карлович
Белозёрова Татьяна Сергеевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:

ПРИЛОЖЕНИЯ К ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Учебное пособие

Редактор *Л. В. Хлебникова*
Корректор *М. Н. Демидова*
Компьютерная верстка *Т. С. Белозёровой*

Подписано в печать 28.04.2016. Формат 60×84. 1/16.
Усл. печ. л. 5,29. Тираж 100 экз. Заказ___

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета.
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография ПГНИУ,
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15