

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. К. Хеннер, К. Б. Циберкин

**КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
(ОСНОВНЫЕ ПРОЦЕССЫ)**

*Допущено методическим советом Пермского государственного
национального исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов физического факультета*

Пермь 2012

УДК 530.145

ББК 22.315

X 38

Хеннер В.К., Циберкин К. Б.

X 38 Квантовая электродинамика (основные процессы):
учеб. пособие / В.К. Хеннер, К.Б. Циберкин; Перм.
гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2012.– 89 с.

ISBN 978-5-7944-1960-3

В учебном пособии изложена методика вычисления сечения основных процессов квантовой электродинамики в низших порядках теории возмущений. Рассмотрено понятие амплитуды рассеяния, способы учёта поляризационных состояний частиц. Приведены примеры подробных вычислений амплитуды рассеяния и сечений различных процессов. На основе описания на языке кинематических инвариантов обобщённой реакции показана взаимосвязь процессов.

Предназначено для студентов старших курсов, специализирующихся по теоретической физике.

УДК 530.145

ББК 22.315

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: зав.лаб. кинетики анизотропных жидкостей ИМСС УрО РАН, д.ф.-м.н, профессор **Ю.Л. Райхер**; профессор каф. прикладной математики и информатики ПГНИУ, д.ф.-м.н., профессор **Е.Л. Тарунин**

ISBN 978-5-7944-1960-3

© Хеннер В.К., Циберкин К. Б, 2012

© Пермский государственный национальный
исследовательский университет, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ	5
2. УЧЁТ СПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ ЧАСТИЦ	10
2.1. Понятие о матрице плотности.....	10
2.2. Эволюционное уравнение матрицы плотности.....	13
2.3. Поляризационная матрица плотности фотона	15
2.4. Поляризационная матрица плотности фермиона.....	17
2.5. Суммирование по поляризациям	21
2.6. Вероятности процессов с участием поляризованных частиц	25
3. РЕАКЦИИ С УЧАСТИЕМ НЕПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЧАСТИЦ.....	28
3.1. Рассеяние электрона на ядре	28
3.2. Комптоновское рассеяние	34
3.3. Рассеяние электрона на электроном.....	43
3.4. Рассеяние позитрона на электроном	52
3.5. Образование электрон-позитронной пары двумя фотонами.....	54
3.6. Аннигиляция электрон-позитронной пары в два фотона	63
4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ.....	67
4.1. Рассеяние фотона электроном.....	67
4.2. Двухфотонная аннигиляция электрон-позитронных пар	72
4.3. Поляризационные эффекты при рассеянии электронов..	74
5. КРОСС-ИНВАРИАНТНОСТЬ: ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ПРОЦЕССАМИ	75
5.1. Кинематические инварианты	75
5.2. Физические области	78
5.3. Сечения рассеяния в переменных Манделштама.....	83
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	88

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория поля является динамично развивающейся и одной из передовых ветвей современной физики. В своей основе она содержит квантовую электродинамику, рассматривающую взаимодействие электромагнитных полей на микроскопическом уровне.

Сложность и нетривиальность языка теории затрудняет ее освоение на основе стандартных курсов, и основной целью предлагаемого пособия является простое изложение базовых методов теории поля.

Первая часть пособия рассказывает о квантовании полей, формализме теории и языке диаграмм Фейнмана. Вторая часть проводит связь между аппаратом теории поля и физическими величинами, находимыми при экспериментальных исследованиях.

В данном учебном пособии детально излагается методика вычисления сечения основных процессов квантовой электродинамики в низших порядках теории возмущений. Рассмотрено понятие амплитуды рассеяния, способы учёта поляризационных состояний частиц. Приведены подробные примеры вычислений амплитуд рассеяния и сечений различных процессов. На основе описания на языке кинематических инвариантов обобщённой реакции показана взаимосвязь процессов в различных каналах.

1. АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ

Кратко напомним теорию рассеяния, изложенную в [1].
Оператор рассеяния имеет вид

$$S = T \exp\left(-i \int H_{int}(x) dx\right), \quad (1.1)$$

где T – оператор хронологического упорядочивания, $H_{int}(x)$ – гамильтониан взаимодействия. Переход из начального состояния $|i\rangle$ в конечное $|f\rangle$ описывается матричным элементом S -оператора. Вероятность перехода даётся матричным элементом:

$$W_{if} = |\langle f | S - I | i \rangle|^2, \quad (1.2)$$

или, с учётом разложения экспоненты в (1.1) по степеням аргумента, рядом:

$$W_{if} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f | S^{(n)} | i \rangle|^2, \quad (1.3)$$

что позволяет использовать теорию возмущений. Методика вычисления матричных элементов подробно описана в [1].

Если в описываемом процессе участвуют только свободные частицы (нет внешних полей), то выполняется закон сохранения 4-импульса, и из матричного элемента может быть выделена дельта-функция, содержащая разность 4-импульсов частиц в начальном и конечном состоянии:

$$W_{if} = |M_{if}|^2 (2\pi)^8 \delta^2(p_i - p_f), \quad (1.4)$$

где p_i, p_f – суммарные 4-импульсы частиц в начальном и конечном состояниях, M_{if} – амплитуда рассеяния. Заменяя одну из дельта-функций её интегральным определением:

$$\delta(p_i - p_f) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(p_i - p_f)x} d^4x, \quad (1.5)$$

и полагая, что область интегрирования ограничена объёмом V и интервалом времени Δt , можем записать её как $V\Delta t / (2\pi)^4$. Таким образом, вероятность процесса W_{if} оказывается

пропорциональна интервалу времени, и можно ввести вероятность процесса в данном объёме за единицу времени:

$$w_{if} = \frac{W_{if}}{\Delta t}. \quad (1.6)$$

Соответственно, плотность вероятности процесса, при условии, что конечные 4-импульсы частиц лежат в интервалах от p_f до $p_f + dp_f$, может быть определена как

$$dw_{if} = \frac{1}{V} (2\pi)^4 |M_{if}|^2 \delta(p_i - p_f) d\Gamma, \quad (1.7)$$

где $d\Gamma = dp_{f1} dp_{f2} \dots dp_{fn}$ – дифференциалы 4-импульсов всех частиц конечного состояния.

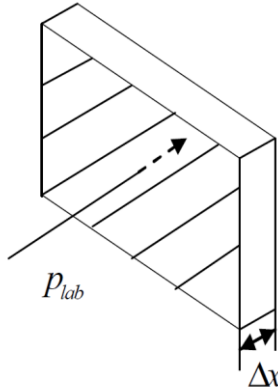


Рис. 1. Элементарный объём

Полученная плотность вероятности непосредственно зависит от объёма, который в общем случае произволен. Чтобы ликвидировать возникшую неопределённость, вводится величина, называемая *эффективным сечением рассеяния*.

В лабораторной системе отсчёта (где мишень покоится) выделим элемент объёма сечением ΔS и толщиной Δx (рис. 1).

Пусть на него ортогонально площадке ΔS налетает поток частиц со скоростью в данной системе отсчёта \vec{v}_1^{lab} . Тогда вероятность обнаружить любую частицу пучка в пределах заданного объёма следующая:

$$P_1 = \rho_1^{lab} \vec{v}_1^{lab} \Delta S \Delta t, \quad (1.8)$$

где ρ_1^{lab} – плотность вероятности обнаружения частицы в объёме $\Delta S \Delta x$.

Вероятность взаимодействия налетающей частицы, находящейся внутри выделенного объёма $\Delta S \Delta x$, с веществом мишени равна относительному поперечному сечению частиц мишени $d\sigma$, умноженному на вероятность нахождения частицы мишени в данном объёме ρ_2^{lab} :

$$P_2 = \frac{d\sigma}{\Delta S} \rho_2^{lab} \Delta S \Delta x. \quad (1.9)$$

С учётом (1.7), получаем для вероятности взаимодействия частиц налетающего пучка и мишени:

$$d\omega_{if} \Delta S \Delta x \Delta t = P_1 P_2, \quad (1.10)$$

$$d\omega_{if} \Delta S \Delta x \Delta t = \rho_1^{lab} v_1^{lab} \Delta S \Delta t \frac{d\sigma}{\Delta S} \rho_2^{lab} \Delta S \Delta x. \quad (1.11)$$

Отсюда непосредственно выражается $d\sigma$:

$$d\sigma = \frac{dw_{if}}{j}, \quad (1.12)$$

где поток j определён как

$$j = v_1^{lab} \rho_1^{lab} \rho_2^{lab}. \quad (1.13)$$

Полученная величина $d\sigma$ не зависит от рассматриваемого объёма и интервала времени, в течение которого ведётся наблюдение, и называется *дифференциальным сечением рассеяния* процесса.

В случае движущейся мишени, исходя из требования релятивистской инвариантности сечения рассеяния, выражение для потока переопределяется следующим образом:

$$j = -\rho_1 \rho_2 \frac{\sqrt{(p_1, p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad (1.14)$$

где p, ε, m – соответственно 4-импульсы, энергии (нулевые компоненты 4-импульсов) и массы взаимодействующих частиц в энергетических единицах, а ρ_1, ρ_2 связаны с 4-векторами потоков соотношением

$$\rho_1^{lab} \rho_2^{lab} = -j_\alpha^{(1)} j_\alpha^{(2)} = \rho_1 \rho_2 \frac{(p_1, p_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (1.15)$$

Отметим, что для скалярного произведения вектором мы будем использовать обозначение (a, b) или $a \cdot b$.

В конечном итоге, дифференциальное эффективное сечение изучаемого процесса перехода $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ для пространственных (трёхмерных) импульсов конечных частиц в интервале от p_f до $p_f + dp_f$ имеет следующий вид [2]:

$$d\sigma = (2\pi)^4 |M_{if}|^2 \delta(p_i - p_f) \times \\ \times \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sqrt{(p_1, p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}. \quad (1.16)$$

Множитель $(2\pi)^3$ учитывает непрерывность спектра значений импульса (для упрощения формул используется система единиц, в которой $\hbar, c = 1$). Для процесса взаимодействия, где на входе и выходе присутствуют только две частицы:

$$d\sigma = (2\pi)^4 |M_{if}|^2 \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\ \times \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sqrt{(p_1, p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3}, \quad (1.17)$$

штрихами обозначены импульсы частиц в конечном состоянии.

В предельном частном случае, когда масса одной из частиц достаточно велика, и её состояние в результате взаимодействия практически не изменяется, её роль в реакции сводится к неподвижному (в соответствующей системе отсчёта) источнику постоянного поля, с которым взаимодействует другая пролетающая частица.

В постоянном поле сохраняется энергия, но изменяется импульс налетающей частицы. Соответственно, видоизменяется выражение для вероятности перехода между начальным и конечным состоянием [2]:

$$W_{if} = |M_{if}|^2 (2\pi)^2 \delta^2(\varepsilon_i - \varepsilon_f). \quad (1.18)$$

Здесь ε_f – суммарная энергия всех частиц, присутствующих в конечном состоянии. Действуя аналогично случаю отсутствия внешних полей, заменим одну из дельта-функций интегральным определением:

$$\delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(\varepsilon_i - \varepsilon_f)t} dt, \quad (1.19)$$

и получим выражение для плотности вероятности процесса:

$$dw_{if} = \frac{1}{V} (2\pi) |M_{if}|^2 \delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f) d\Gamma. \quad (1.20)$$

Поток (1.13) для одной частицы следующий:

$$j = \frac{|\vec{p}_i|}{\varepsilon_i}. \quad (1.21)$$

Отсюда согласно (1.12) находим дифференциальное сечение рассеяния:

$$d\sigma = 2\pi |M_{if}|^2 \delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f) \frac{\varepsilon_i}{|\vec{p}_i|} \prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}. \quad (1.22)$$

При упругом рассеянии во внешнем поле начальное и конечное состояние содержит только по одной частице, а энергия и абсолютная величина импульса не изменяются. Благодаря этому выражение (1.22) может быть дополнительно упрощено. Перейдём в сферические координаты в пространстве импульсов:

$$d^3 \vec{p}_f = \vec{p}_f^2 d|\vec{p}_f| d\Omega,$$

где $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ – элемент телесного угла. Воспользуемся выражением для релятивистской связи между пространственным импульсом и энергией:

$$\vec{p}^2 - \varepsilon^2 = p^2 - m^2 = \text{const}. \quad (1.23)$$

Дифференцируя левую и правую часть, получим соотношение между $d|\vec{p}|$ и $d\varepsilon$:

$$2|\vec{p}| d|\vec{p}| = 2\varepsilon d\varepsilon.$$

Соответственно, можем перейти от импульса к энергии по правилу [2]:

$$d^3 \vec{p}_f = |\vec{p}_f| \varepsilon_f d\varepsilon_f d\Omega. \quad (1.24)$$

Далее, интегрируя по энергии с помощью дельта-функции, и учитывая, что $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i|$, получим сечение в виде

$$d\sigma = \frac{1}{4\pi^2} |M_{if}|^2 \varepsilon^2 d\Omega, \quad (1.25)$$

где $\varepsilon \equiv \varepsilon_i = \varepsilon_f$ – энергия рассеивающейся частицы.

2. УЧЁТ СПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ ЧАСТИЦ

2.1. Понятие о матрице плотности

Прежде чем непосредственно перейти к вопросу вычисления амплитуды рассеяния, рассмотрим понятия чистого и смешанного состояния и введём понятие матрицы плотности системы.

Система, описываемая волновой функцией, в реальности соответствует некоторому идеальному случаю, когда описание является максимально полным. Система при этом рассматривается как изолированная и не взаимодействует с внешним окружением. Такое описание отвечает заданию определённых значений всех одновременно измеримых величин, характеризующих систему (т.е. коммутирующих между собой). Данный набор величин называется *полным набором коммутирующих наблюдаемых* (или *совместных наблюдаемых*), а состояние может быть задано конкретно определённой волновой функцией, и пребывание системы в этом состоянии является достоверным, т.е. определено с единичной вероятностью. Такое состояние называется *чистым*. Условно обозначим его вектором $|\psi\rangle$. Для него характерно, что значение любой измеряемой величины определяется однозначно как матричный элемент соответствующего оператора $\langle\psi|A|\psi\rangle$.

Однако полное описание часто оказывается невозможным, например, при исследовании обширной незамкнутой системы. В таком случае система не имеет единственной волновой функции. Неполный набор наблюдаемых величин позволяет лишь указать вероятности p_1, p_2, \dots, p_m пребывания системы в

состояниях $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |m\rangle$. Такое состояние принято называть *смешанным*.

Главное его отличие от чистого состояния заключается в неоднозначности определения значений измеряемых величин. Каждый возможный результат измерения может реализоваться с некоторой вероятностью, и определяется только среднее по известному из теории вероятностей правилу для дискретных наборов величин:

$$\langle A \rangle = \sum_m p_m \frac{\langle m|A|m\rangle}{\langle m|m\rangle}. \quad (2.1.1)$$

Вероятности p_1, p_2, \dots, p_m нормированы:

$$p_m \geq 0, \quad \sum_m p_m = 1. \quad (2.1.2)$$

Часто такой подход применяется к сложным системам, например, термодинамическим, содержащим порядка 10^{23} частиц. Дисциплина, изучающая эти системы, называется *квантовой статистической механикой*, или *квантовой статистикой*, и использует специальный математический аппарат.

Для описания смешанного состояния вводится *матрица плотности*, определяемая соотношением [3]

$$\rho = \sum_m |m\rangle p_m \langle m|, \quad (2.1.3)$$

$$\langle m|m\rangle = 1.$$

Отдельные состояния $|m\rangle$ здесь нормированы на единицу, но не обязательно ортогональны. Для обозначения матрицы плотности также употребляется термин *статистический оператор*. Опишем коротко её основные свойства.

Среднее значение наблюдаемой величины определяется через матрицу плотности следующим образом:

$$\langle A \rangle = \text{Sp}(\rho A). \quad (2.1.4)$$

В самом деле, воспользуемся определением (2.1.3) и свойством инвариантности шпура к циклической перестановке операторов:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\rho A) &= \text{Sp}\left(\sum_m |m\rangle p_m \langle m|A\right) = \\ &= \sum_m p_m \text{Sp}(|m\rangle \langle m|A) = \sum_m p_m \langle m|A|m\rangle. \end{aligned}$$

В случае $A=1$ этот результат даёт условие нормировки матрицы плотности:

$$\text{Sp} \rho = 1. \quad (2.1.5)$$

Также из определения следует, что оператор матрицы плотности является положительно определённым и эрмитовым.

Вероятность нахождения системы в состоянии $|\psi\rangle$ равна соответствующим диагональным элементам матрицы плотности и может быть вычислена по правилу

$$w_\psi = \text{Sp}(\rho|\psi\rangle \langle \psi|) = \langle \psi|\rho|\psi\rangle. \quad (2.1.6)$$

Описание посредством матрицы плотности более универсально, в отличие от волновой функции. Система с заданной волновой функцией, пребывающая в чистом состоянии, также может быть описана в рамках формализма матрицы плотности.

Пусть система находится в чистом состоянии $|\psi\rangle$ с единичной нормировкой. Такое состояние можно рассматривать как смешанное, но содержащее лишь один член с единичной вероятностью p_m . Непосредственно из определения следует, что матрица плотности чистого состояния имеет вид

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (2.1.7)$$

Такой оператор называется *проектором*, т.к. с его помощью можно производить переходы между различными пространствами состояний. Основные свойства проектора:

$$\rho^2 = \rho, \quad (2.1.8)$$

$$\text{Sp} \rho^2 = 1.$$

Для матрицы произвольного смешанного состояния может быть показано:

$$\text{Sp} \rho^2 \leq 1. \quad (2.1.9)$$

Заметим также, что матрица плотности состояния *всегда определяется единственным образом*, в то время как даже для

чистого состояния волновая функция определена с точностью до фазового множителя.

Приведём простой пример задачи с использованием матрицы плотности. Известно, что электронный луч в катодной трубке имеет изотропное распределение спинов, т.е.

$$\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = \langle S_z \rangle = 0. \quad (2.1.10)$$

Вычислим матрицу плотности для частиц в таком луче, считая матрицу оператора S_z диагональной. В этом случае оператор спина имеет вид

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}, \quad (2.1.11)$$

где $\vec{\sigma}$ – вектор, образованный матрицами Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.12)$$

Поскольку ориентация спинов изотропна, то вероятность обнаружить в пучке частицу с компонентой спина $S_z = \pm 1/2$ равна $1/2$. Согласно (2.1.6), диагональные элементы матрицы плотности также равны $1/2$:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1.13)$$

что непосредственно даёт

$$\langle S_z \rangle = \text{Sp } \rho S_z = \text{Sp } \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Нетрудно показать, что и прочие компоненты спинового момента также равны нулю.

2.2. Эволюционное уравнение матрицы плотности

Получим уравнение, описывающее динамику оператора плотности. Пусть в момент времени t_0 система находится в состоянии, представляемом смесью векторов $|1\rangle_0, |2\rangle_0, \dots, |m\rangle_0, \dots$ с соответствующими им вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_m, \dots$. Эволюция отдельных состояний задаётся унитарным оператором $U(t, t_0)$ согласно

$$|m\rangle_t = U(t, t_0)|m\rangle_0, \quad (2.2.1)$$

и в момент времени t система описывается смесью новых состояний $|1\rangle_t, |2\rangle_t, \dots, |m\rangle_t, \dots$, но с теми же вероятностями $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots$. Отсюда можно определить закон эволюции матрицы плотности:

$$\begin{aligned} \rho_t &= \sum_m |m\rangle_t \langle m|_t P_m = \sum_m U |m\rangle_0 \langle m|_0 P_m U^\dagger = \\ &= U \left(\sum_m |m\rangle_0 \langle m|_0 P_m \right) U^\dagger = U \rho_0 U^\dagger. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Используем далее уравнения для $U(t, t_0)$ и сопряжённого оператора $U^\dagger(t, t_0)$:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} U(t, t_0) &= H U(t, t_0), \\ -i \frac{d}{dt} U^\dagger(t, t_0) &= U^\dagger(t, t_0) H, \\ U(t_0, t_0) &= 1, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

где H – гамильтониан системы. Эти уравнения возникают непосредственно из явного вида оператора $U(t, t_0)$, который изначально определяется из условия периодичности движения консервативной системы.

Принимая, что система движется периодически с частотой ω , мы тем самым требуем, чтобы вектор состояния менялся по гармоническому закону:

$$|u(t)\rangle = e^{-i\omega(t-t_0)} |u(t_0)\rangle = e^{-iE(t-t_0)} |u(t_0)\rangle,$$

где $E = \hbar\omega$ – энергия системы в системе единиц $\hbar, c = 1$. В то же время, учитывая уравнение собственных значений гамильтониана:

$$H|u\rangle = E|u\rangle,$$

можем совершить переход $E \rightarrow H$ и записать:

$$|u(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)} |u(t_0)\rangle,$$

что при сопоставлении с (2.2.1) непосредственно определяет вид оператора эволюции $U(t, t_0)$. Начальное условие для оператора

вытекает непосредственно из его действия на вектор состояния системы (2.2.1). В теории принимается обобщение (2.2.3) на случай произвольных систем, при этом вид оператора $U(t, t_0)$ может быть другим, однако его уравнения динамики не изменяются.

Дифференцируя соотношение (2.2.2) по времени, получим:

$$i \frac{d\rho_t}{dt} = \left(i \frac{dU}{dt} \rho_0 U^\dagger + iU \frac{d\rho_0}{dt} U^\dagger + iU \rho_0 \frac{dU^\dagger}{dt} \right) = \\ = HU \rho_0 U^\dagger - U \rho_0 U^\dagger H = H \rho_t - \rho_t H = [H, \rho_t]_-,$$

здесь производная по времени от ρ_0 равна нулю. Таким образом, эволюция оператора плотности описывается уравнением [3]:

$$i \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho]_-. \quad (2.2.4)$$

Оно называется *уравнением Шрёдингера для матрицы плотности*. Входящие в это уравнение операторы являются операторами в представлении Шрёдингера.

2.3. Поляризационная матрица плотности фотона

Задача вычисления сечения рассеяния процесса сводится к расчёту амплитуды рассеяния M_{if} . Покажем далее, как производить вычисление в случае поляризованных и неполяризованных частиц.

Волновая функция фотона может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн с определёнными поляризациями [1]:

$$A_\mu(x) \sim a_\lambda(k) e^{ikx} e_\mu^\lambda, \quad (2.3.1)$$

где e_μ^λ – вектор поляризации. В силу поперечности электромагнитных волн физически существуют только два ортогональных вектора e_μ^λ – невозможна поляризация вдоль направления распространения волны и вдоль временной оси.

Введём поляризационную матрицу плотности как тензор второго ранга, описывающий вероятности w возможных состояний поляризации фотона [2]:

$$w = \rho_{\lambda\lambda'} e^{\lambda*} e^{\lambda'}, \quad (2.3.2)$$

где индексы λ, λ' пробегает значения 1,2. Диагональные компоненты матрицы плотности определяют вероятности линейных поляризаций во взаимно перпендикулярных направлениях.

Матрица плотности вводится таким образом, чтобы для чистого состояния фотона выполнялось соотношение

$$\rho_{\lambda\lambda'} = e^{\lambda} e^{\lambda'*}. \quad (2.3.3)$$

В случае полностью неполяризованного фотона все направления будут равновероятными:

$$\rho_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{2} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.3.4)$$

Для общего случая частичной поляризации, когда среди всех возможных направлений поляризации присутствует наиболее вероятное, матрица $\rho_{\lambda\lambda'}$ записывается в комплексной форме:

$$\rho_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}, \quad (2.3.5)$$

где ξ – вещественные параметры (*параметры Стокса*), изменяющиеся в пределах от -1 до $+1$ и характеризующие различные варианты поляризации фотона. Именно, параметр ξ_3 определяет вероятность поляризации вдоль оси x_1 , ξ_1 отвечает поляризации вдоль оси, направленной к x_1 под углом $\pi/4$, а ξ_2 связан с круговой поляризацией. Все они поддаются непосредственному экспериментальному определению. Видно, что при $\xi_j = 0$ матрица (2.3.5) переходит в (2.3.4) и описывает полностью неполяризованное состояние.

Объединяя параметры Стокса в вектор, можно записать матрицу плотности как

$$\rho_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{2} (I + \vec{\xi} \cdot \vec{\sigma}). \quad (2.3.6)$$

где $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули (2.1.12), I – единичная матрица 2×2 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Практически для работы удобна четырёхмерная матрица плотности, составленная из компонент 4-векторов поляризации:

$$\begin{aligned} e^1 &= (1, 0, 0, 0) & e^2 &= (0, 1, 0, 0), \\ e^3 &= (0, 0, 1, 0) & e^4 &= (0, 0, 0, i). \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Векторы e^3, e^4 отвечают нефизическим поляризациям, продольной и временной. При вычислении учитывается, что вклада в амплитуду рассеяния они не вносят. Формальное определение матрицы плотности при этом не изменяется, но индексы уже пробегают четыре значения, а не два, как было выше.

2.4. Поляризационная матрица плотности фермиона

Волновая функция фермиона может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн со спиновыми амплитудами [1]:

$$\psi(x) \sim u^r(\pm p)e^{\pm ipx}, \quad (2.4.1)$$

где величина r – спиральность фермиона, характеризующая проекцию спина на направление импульса частицы. Она может принимать значения -1 (спин направлен навстречу импульсу) или $+1$ (вдоль импульса). Значение спиральности определяет поляризацию частицы.

Возможны состояния с неопределённой поляризацией. Для их описания удобно ввести поляризационную матрицу плотности $\rho_{rr'}$ таким образом, чтобы в чистом состоянии выполнялось следующее:

$$\rho_{\mu\nu} = u_\mu(p)\bar{u}_\nu(p) = |u\rangle\langle u|. \quad (2.4.2)$$

Напомним, что обозначение \bar{a} означает дираковское сопряжение:

$$\bar{a} = a^\dagger \gamma_4. \quad (2.4.3)$$

Спинорные амплитуды $u(p), \bar{u}(p)$ удовлетворяют уравнениям Дирака [1]:

$$(\hat{p} - im)u(p) = 0, \quad (2.4.4)$$

$$\bar{u}(p)(\hat{p} + im) = 0, \quad (2.4.5)$$

где для краткости введено обозначение

$$\hat{p} = p_\mu \gamma_\mu. \quad (2.4.6)$$

Соответственно, умножая уравнения на сопряжённый биспинор, получим соотношения, которым должна удовлетворять матрица плотности электрона [2,4]:

$$\begin{aligned} (\hat{p} - im)\rho &= 0, \\ \rho(\hat{p} + im) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Исходя из полученных соотношений становится возможным установить вид матрицы плотности в полностью неполяризованном состоянии, когда поляризация частиц неизвестна либо не представляет интереса. В качестве параметра матрица при этом содержит только 4-импульс частицы. При этом уравнения (2.4.7) удовлетворяются, только если матрица плотности имеет вид

$$\rho = A(m - i\hat{p}), \quad (2.4.8)$$

где A – некоторый числовой коэффициент. Действительно, непосредственная подстановка показывает, что, с учётом релятивистской связи между энергией и импульсом

$$\vec{p}^2 - \varepsilon^2 = p^2 = -m^2 \quad (2.4.9)$$

и свойством гамма-матриц $\gamma_\mu \gamma_\mu = I$ выполняется следующее:

$$\begin{aligned} (\hat{p} - im)(m - i\hat{p}) &= \hat{p}m - i\hat{p}\hat{p} - im^2 - m\hat{p} = \\ &= -im^2 - ip_\mu p_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = -im^2 - ip^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Из принятой нормировки биспиноров [1]

$$u_\mu(p)\bar{u}_\mu(p) = 2m \quad (2.4.11)$$

и условия (2.4.2) получается условие нормировки для матрицы плотности:

$$\text{Sp } \rho = \rho_{\mu\mu} = 2m. \quad (2.4.12)$$

Отсюда непосредственно следует окончательное выражение для матрицы плотности полностью неполяризованного состояния электрона:

$$\rho = \frac{1}{2}(m - i\hat{p}). \quad (2.4.13)$$

В случае позитрона формально используется спинорная амплитуда с отрицательной энергией $u(-p)$, а нормировка биспиноров имеет вид

$$u_{\mu}(-p)\bar{u}_{\mu}(-p) = -2m. \quad (2.4.14)$$

Соответственно этому, матрица плотности для полностью неполяризованного позитрона выглядит как

$$\rho = -\frac{1}{2}(m + i\hat{p}). \quad (2.4.15)$$

Теперь получим выражение для матрицы плотности поляризованного электрона. Рассмотрим неподвижный (нерелятивистский) электрон, находящийся в некотором произвольном состоянии. Так как величина его спина равна $\frac{1}{2}$, то состояние поляризации всегда можно охарактеризовать, указав направление, проекция спина на которое равна $+\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$. Для определённости примем, что известно направление положительной проекции спина. Пусть оно задаётся некоторым единичным вектором \vec{n} . Состояние нерелятивистского электрона описывается двухкомпонентным спинором $|\varphi\rangle$, для которого выполняется соотношение

$$\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}|\varphi\rangle = \frac{1}{2}|\varphi\rangle, \quad (2.4.16)$$

где $\vec{\sigma}$ – вектор (2.1.12), составленный из матриц Паули.

Докажем это утверждение. Любая матрица (2×2) может быть разложена по базису из единичной матрицы и матриц Паули (по индексу i подразумевается суммирование):

$$A = \frac{1}{2}\text{Sp}(A)I + \frac{1}{2}\text{Sp}(A\sigma_i)\sigma_i, \quad i = \overline{1,3}.$$

Выбрав в качестве A матрицу $|\varphi\rangle\langle\varphi|$, получим:

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle\langle\varphi| &= \frac{1}{2}\text{Sp}(|\varphi\rangle\langle\varphi|)I + \frac{1}{2}\text{Sp}(|\varphi\rangle\langle\varphi|\sigma_i)\sigma_i = \\ &= \frac{1}{2}\langle\varphi|\varphi\rangle I + \frac{1}{2}\langle\varphi|\sigma_i|\varphi\rangle\sigma_i. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Умножим обе части равенства на $|\varphi\rangle$ справа и приведём подобные слагаемые:

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| = \frac{1}{2}\langle\varphi|\varphi\rangle I|\varphi\rangle + \frac{1}{2}\langle\varphi|\sigma_i|\varphi\rangle\sigma_i|\varphi\rangle,$$

$$\frac{1}{2}\langle\varphi|\varphi\rangle|\varphi\rangle = \frac{1}{2}\langle\varphi|\sigma_i|\varphi\rangle\sigma_i|\varphi\rangle.$$

При условии, что спинор нормирован на единицу: $\langle\varphi|\varphi\rangle=1$, придём к выражению:

$$\frac{1}{2}\langle\varphi|\sigma_i|\varphi\rangle\sigma_i|\varphi\rangle = \frac{1}{2}|\varphi\rangle, \quad (2.4.18)$$

где через среднее значение спина частицы может быть определён вектор \vec{n} :

$$\vec{n} = \langle\varphi|\vec{\sigma}|\varphi\rangle. \quad (2.4.19)$$

Видно, что при таком определении направления положительной проекции спина выражение (2.4.18) совпадает с (2.4.16). Для спинора $|\varphi\rangle$ с единичной нормировкой (2.4.17) принимает следующий вид:

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| = \frac{1}{2}(I + \vec{n}\cdot\vec{\sigma})_{\alpha\beta}. \quad (2.4.20)$$

Введём релятивистский оператор спина $\vec{\Sigma}$ [1]:

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.4.21)$$

В проекции на вектор \vec{n} действие оператора спина на биспинор неподвижного электрона $|u_0\rangle$ даёт собственное значение спина $+1/2$:

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}|u_0\rangle = \frac{1}{2}|u_0\rangle. \quad (2.4.22)$$

Вводя матрицу $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, мы можем переписать оператор спина в виде

$$\vec{\Sigma} = i\gamma_5\vec{\gamma}\vec{\gamma}_4,$$

где $\vec{\gamma}$ – вектор, составленный из матриц $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Тогда, учитывая, что согласно уравнению Дирака $\gamma_4|u_0\rangle = |u_0\rangle$, получим из (2.4.22):

$$i\gamma_5\vec{\gamma}\cdot\vec{n}|u_0\rangle = |u_0\rangle. \quad (2.4.23)$$

Переходя теперь в систему отсчёта, в которой электрон движется с импульсом \vec{p} и энергией ε , необходимо применить преобразования Лоренца к вектору \vec{n} , что даёт

$$\vec{a} = \vec{n} + \frac{(\vec{n}, \vec{p})\vec{p}}{m(m + \varepsilon)}, \quad a_0 = \frac{(\vec{n}, \vec{p})}{m}. \quad (2.4.24)$$

Полученный вектор a_μ называется 4-вектором поляризации электрона. Для него выполняются соотношения:

$$a^2 = 1, \quad (a, p) = 0. \quad (2.4.25)$$

Соотношение (2.4.23) принимает в произвольной системе отсчёта вид

$$i\gamma_3 \hat{a} |u\rangle = |u\rangle. \quad (2.4.26)$$

И в общем случае матрица плотности содержит 4-вектор поляризации фермиона a_μ в качестве второго параметра [4]:

$$\rho = \frac{1}{2}(m - i\hat{p})(I + \gamma_3 \hat{a}). \quad (2.4.27)$$

Вследствие свойства (2.4.25), нелинейный вклад вектора поляризации невозможен, т.к. любые его чётные степени дают вклад в первое, а нечётные – во второе слагаемое.

2.5. Суммирование по поляризациям

Часто нас не интересует конкретное состояние поляризации возникающих в процессе частиц (т.е. спиральности электронов и поляризации фотонов). В таких случаях вероятность процесса dw_{if} должна быть просуммирована по всем возможным состояниям поляризации частиц в конечном состоянии. Кроме того, если частицы в начальном состоянии не были поляризованы, следует дополнительно провести осреднение вероятности dw_{if} по поляризациям начального состояния [4].

Пусть в начальном и конечном состояниях имеется только один электрон. Тогда амплитуда рассеяния имеет вид

$$M_{if} = \vec{u}' A u, \quad (2.5.1)$$

где $u \equiv u(p), u' \equiv u(p')$ – спинорные амплитуды электрона в начальном и конечном состоянии, A – некоторая матрица, содержащая в качестве параметров импульсы и поляризации физических частиц, участвующих в реакции, а также характеристики виртуальных частиц.

Усреднение по поляризациям начального состояния фермиона (спиральность $r = \pm 1$, и оба значения считаются равновероятными) сводится к вычислению суммы $\frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 |M_{if}|^2$.

Коэффициент перед суммой как раз обеспечивает нахождение среднего по двум значениям. Для конечной частицы значения спиральности также будут равновероятными, и необходимо учесть оба возможных состояния. Таким образом, полный учёт всевозможных поляризаций начального и конечного состояния сводится к вычислению выражения вида $\frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \sum_{r'=1}^2 |M_{if}|^2$.

Рассмотрим подробнее квадрат амплитуды рассеяния:

$$|M_{if}|^2 = M_{if} M_{if}^* = (\bar{u}' A u) (\bar{u} A u)^*. \quad (2.5.2)$$

Преобразуем M_{if}^* . Произведём комплексное сопряжение:

$$(\bar{u}' A u)^* = u' \gamma_4^* A^* u^* = u^* A^\dagger \gamma_4 u'. \quad (2.5.3)$$

В силу общего для матриц Дирака свойства $\gamma_4 \gamma_4 = I$ можно искусственно внести указанное произведение в (2.5.3) перед оператором A^\dagger :

$$u^* A^\dagger \gamma_4 u' = u^* \gamma_4 \gamma_4 A^\dagger \gamma_4 u' = \bar{u} \bar{A} u', \quad (2.5.4)$$

где введено обозначение $\bar{A} = \gamma_4 A^\dagger \gamma_4$. Таким образом, для квадрата амплитуды в рассматриваемом случае одного фермиона получается:

$$|M_{if}|^2 = (\bar{u}' A u) (\bar{u} \bar{A} u'). \quad (2.5.5)$$

Перепишем это выражение в тензорных обозначениях:

$$|M_{if}|^2 = \bar{u}'_\mu A_{\mu\nu} u_\nu \bar{u}_\rho \bar{A}_{\rho\sigma} u'_\sigma. \quad (2.5.6)$$

В (2.5.6) явным образом выделяются комбинации $u'_\sigma \bar{u}'_\mu$ и $u_\nu \bar{u}_\rho$, непосредственно являющиеся поляризационными матрицами

плотности электрона в начальном и конечном состояниях (сравните с (2.4.2)). В итоге квадрат амплитуды рассеяния выглядит как

$$|M_{if}|^2 = \rho'_{\sigma\mu} A_{\mu\nu} \rho_{\nu\rho} \bar{A}_{\rho\sigma}, \quad (2.5.7)$$

или, с учётом правила суммирования по повторяющимся индексам:

$$|M_{if}|^2 = \text{Sp}\{\rho' A \rho \bar{A}\}. \quad (2.5.8)$$

В интересующем нас далее случае полностью неполяризованного электрона выполним суммирование и усреднение по поляризациям (значениям спиральности). Подставляя явный вид матрицы плотности (2.4.13), получим для реакции с одним электроном:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r,r'} |M_{if}|^2 &= 2 \text{Sp} \left\{ \frac{1}{2} (m - i\hat{p}') A \frac{1}{2} (m - i\hat{p}) \bar{A} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \text{Sp} \{ (m - i\hat{p}') A (m - i\hat{p}) \bar{A} \}. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Аналогичный результат получится и при наличии одного позитрона в начальном и конечном состоянии:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r,r'} |M_{if}|^2 &= 2 \text{Sp} \left\{ \frac{1}{2} (m + i\hat{p}') A \frac{1}{2} (m + i\hat{p}) \bar{A} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \text{Sp} \{ (m + i\hat{p}') A (m + i\hat{p}) \bar{A} \}. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Для более сложных реакций схема вычисления амплитуды рассеяния принципиально не изменяется. Рассмотрим ситуацию, когда в начале и конце взаимодействия имеются два электрона, которым соответствуют биспиноры u_1, u_2 . Обобщённый вид амплитуды рассеяния:

$$M_{if} = (\bar{u}'_1 A u_1) (\bar{u}'_2 B u_2) + (\bar{u}'_2 C u_1) (\bar{u}'_1 D u_2). \quad (2.5.11)$$

Квадрат M_{if} следующий:

$$\begin{aligned}
|M_{if}|^2 &= |\bar{u}'_1 A u_1|^2 |\bar{u}'_2 B u_2|^2 + |\bar{u}'_2 C u_1|^2 |\bar{u}'_1 D u_2|^2 + \\
&+ (\bar{u}'_1 A u_1)(\bar{u}'_2 B u_2)(\bar{u}'_2 C u_1)^* (\bar{u}'_1 D u_2)^* + \\
&+ (\bar{u}'_1 A u_1)^* (\bar{u}'_2 B u_2)^* (\bar{u}'_2 C u_1)(\bar{u}'_1 D u_2).
\end{aligned} \tag{2.5.12}$$

Первые два слагаемых приводятся к произведениям шпуров типа (2.5.8):

$$|\bar{u}'_1 A u_1|^2 |\bar{u}'_2 B u_2|^2 = \text{Sp}\{\rho'_1 A \rho_1 \bar{A}\} \text{Sp}\{\rho'_2 B \rho_2 \bar{B}\}, \tag{2.5.13}$$

$$|\bar{u}'_2 C u_1|^2 |\bar{u}'_1 D u_2|^2 = \text{Sp}\{\rho'_2 C \rho_1 \bar{C}\} \text{Sp}\{\rho'_1 D \rho_2 \bar{D}\}. \tag{2.5.14}$$

Вторые, соответственно, к шпурам вида

$$\begin{aligned}
(\bar{u}'_1 A u_1)(\bar{u}'_2 B u_2)(\bar{u}'_2 C u_1)^* (\bar{u}'_1 D u_2)^* &= \\
&= \text{Sp}\{\rho'_1 A \rho_1 \bar{C} \rho'_2 B \rho_2 \bar{D}\},
\end{aligned} \tag{2.5.15}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{u}'_2 C u_1)(\bar{u}'_1 D u_2)(\bar{u}'_1 A u_1)^* (\bar{u}'_2 B u_2)^* &= \\
&= \text{Sp}\{\rho'_2 C \rho_1 \bar{A} \rho'_1 D \rho_2 \bar{B}\}.
\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

В итоге суммирование и усреднение по поляризациям в реакции с двумя электронами даёт для амплитуды рассеяния выражение

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{\hat{p}_1, \hat{p}'_1, \hat{p}_2, \hat{p}'_2} |M_{if}|^2 &= \frac{1}{4} \left[\text{Sp}\{(m - i\hat{p}'_1) A (m - i\hat{p}_1) \bar{A}\} \times \right. \\
&\times \text{Sp}\{(m - i\hat{p}'_2) B (m - i\hat{p}_2) \bar{B}\} + \\
&+ \text{Sp}\{(m - i\hat{p}'_2) C (m - i\hat{p}_1) \bar{C}\} \times \\
&\times \text{Sp}\{(m - i\hat{p}'_1) D (m - i\hat{p}_2) \bar{D}\} + \\
&+ \text{Sp}\{(m - i\hat{p}'_1) A (m - i\hat{p}_1) \bar{C} (m - i\hat{p}'_2) B (m - i\hat{p}_2) \bar{D}\} + \\
&+ \left. \text{Sp}\{(m - i\hat{p}'_2) C (m - i\hat{p}_1) \bar{A} (m - i\hat{p}'_1) D (m - i\hat{p}_2) \bar{B}\} \right].
\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Коэффициент $\frac{1}{4}$ перед суммой усредняет начальные состояния двух электронов.

Точно таким же образом вычисляются $|M_{if}|^2$ для реакций с двумя позитронами, либо электрон-позитронными парами в начальном и конечном состоянии. Формально учёт позитрона

сводится к смене знака импульса соответствующей ему частицы.

Перейдём к учёту поляризации участвующих в реакции фотонов. Если фотон фигурирует как в начальном состоянии с вектором поляризации e^λ , так и в конечном с поляризацией $e^{\lambda'}$, то квадрат амплитуды рассеяния обязательно содержит тензор вида $e^\lambda e^{\lambda'*}$, который является поляризационной матрицей плотности фотона (2.3.3). В случае взаимодействия фермиона и фотона амплитуда рассеяния может быть обобщена как

$$M_{if} = \bar{u}' A \hat{e}^\lambda B u, \quad (2.5.18)$$

где A, B – некоторые матрицы. Суммирование по поперечным поляризациям производится как

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\lambda'=1}^2 |M_{if}|^2 &= \sum_{\lambda, \lambda'} |\bar{u}' A \hat{e}^\lambda B u|^2 = \\ &= - \sum_{\lambda, \lambda'} (\bar{u}' A \hat{e}^\lambda B u) (\bar{u} \bar{A} \hat{e}^{\lambda'*} \bar{B} u'). \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

Однако, как говорилось выше, практически удобнее использовать 4-векторы поляризации. Тогда матрица плотности задаётся дельта-символом (2.3.4) с индексами, пробегающими значения 1, 2, 3, 4, и, соответственно, суммирование сведётся к свёртке по соответствующим индексам, а векторы поляризации заменятся гамма-матрицами:

$$\sum_{\lambda, \lambda'} |M_{if}|^2 = - (\bar{u}' A \gamma_\mu B u) (\bar{u} \bar{A} \gamma_\mu \bar{B} u'). \quad (2.5.20)$$

Если необходимо произвести усреднение по поляризациям фотона, то перед суммой в (2.5.20) возникает коэффициент $\frac{1}{2}$, учитывающий две физически возможные поперечные поляризации.

2.6. Вероятности процессов с участием поляризованных частиц

Наконец, рассмотрим, как производится вычисление вероятности и сечения реакции поляризованных частиц.

Пусть в начальном и конечном состоянии имеется только один электрон. Тогда амплитуда рассеяния определяется как

(2.5.1), а вероятность процесса пропорциональна (2.5.7). В отличие от процессов с неполяризованными частицами, в последнем выражении следует записывать полную матрицу плотности. Для начального состояния она имеет вид (2.4.27). С учётом свойства $a^2 = 1$ видно, что вероятность обнаружения в конечном состоянии электрона с поляризацией a будет линейной функцией a :

$$|M_{if}|^2 = A + B \cdot a. \quad (2.6.1)$$

Все возможные слагаемые с чётными степенями вектора a внесут вклад в первое, а с нечётными – во второе слагаемое в данном выражении.

Получим матрицу плотности конечного состояния. В системе отсчёта, связанной с электроном, трёхмерный вектор поляризации равен \vec{n} (см. п. 2.2) и

$$|M_{if}|^2 = A + \vec{B} \cdot \vec{n} = A \left(1 + \frac{\vec{B} \cdot \vec{n}}{A} \right). \quad (2.6.2)$$

В то же время вероятность обнаружения полностью поляризованной частицы в состоянии с таким вектором поляризации следующая

$$w(\vec{n}) = |u^*(\vec{n})u_f|^2,$$

где u_f – спинор конечного состояния данной частицы, а $u(\vec{n})$ – спинор, описывающий полностью поляризованную частицу с вектором поляризации \vec{n} . В рассмотрении можно перейти к матрице плотности:

$$\begin{aligned} |u^*(\vec{n})u_f|^2 &= u^*(\vec{n})u_f u_f^* u(\vec{n}) = u^*(\vec{n})\rho_f u(\vec{n}), \\ w(\vec{n}) &= u^*(\vec{n})\rho_f u(\vec{n}). \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Подстановка явного вида ρ_f в собственной системе отсчёта электрона (2.4.20):

$$\rho_f = \left(I + \vec{\zeta}_f \cdot \vec{\sigma} \right),$$

где $\vec{\zeta}_f$ – вектор поляризации, приводит к выражению для вероятности (напомним, матрицы Паули являются бесследовыми):

$$w(\vec{n}) = \frac{1}{4} \text{Sp} \left[(I + \vec{\zeta}_f \cdot \vec{\sigma})(I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \right] = \frac{1}{2} (1 + \vec{\zeta}_f \cdot \vec{n}). \quad (2.6.4)$$

Из сопоставления (2.6.4) с (2.6.2) видно, что в системе отсчёта электрона

$$\vec{\zeta}_f = \frac{\vec{B}}{A} \quad (2.6.5)$$

В произвольной системе за счёт преобразований Лоренца (2.6.5) приводится к виду

$$a_f = A^{-1} \left(B + \frac{(B, p)p}{m^2} \right). \quad (2.6.6)$$

Данный результат представляет 4-вектор поляризации электрона в произвольной системе отсчёта.

Теперь рассмотрим процессы, в которых фигурируют частично поляризованные фотоны. Для простоты положим, что начальное и конечное состояния включают только по одному фотону. Тогда амплитуда рассеяния имеет вид [4]

$$M_{if} = e_i^\alpha A_{\alpha\beta} e_f^{\beta*},$$

а вероятность процесса пропорциональна величине

$$|M_{if}|^2 = e_i^\alpha A_{\alpha\beta} e_f^{\beta*} e_i^{\alpha'*} A_{\alpha'\beta'} e_f^{\beta'}.$$

Здесь индексы i, f отвечают начальному и конечному состояниям, а α, β – номера векторов поперечной поляризации, принимающие значения 1,2 (см. (2.3.7)). Обобщение на произвольную поляризацию, как и для фермионов, производится согласно определению матрицы рассеяния и сводится, для матрицы плотности начального состояния, к заменам следующего вида:

$$e_i^\alpha e_i^{\alpha'*} \rightarrow \rho_{i;\alpha\alpha'} = \frac{1}{2} (I + \vec{\xi} \cdot \vec{\sigma})_{i\alpha'} e^{i\alpha} e^{i\alpha'*}.$$

Матрицу плотности фотона в конечном состоянии находим аналогично фермионам. Вероятность обнаружения электрона в состоянии с заданным вектором Стокса $\vec{\xi}$ пропорциональна величине

$$|M_{if}|^2 = A + \vec{B} \cdot \vec{\xi}. \quad (2.6.7)$$

Вектор Стокса, таким образом, определяется формулой

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{B}}{A}. \quad (2.6.8)$$

3. РЕАКЦИИ С УЧАСТИЕМ НЕПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЧАСТИЦ

3.1. Рассеяние электрона на ядре

В качестве первого, наиболее простого, примера получим дифференциальное сечение упругого рассеяния электрона в электростатическом поле неподвижного атомного ядра. Поле будем считать классическим (не содержащим операторов).

Матричные элементы такого процесса не равны нулю уже в первом порядке теории возмущений [1]. В общем случае

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(1)} | i \rangle = & -\frac{\pi e}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon'}} \bar{u}^{r'}(p') \gamma_4 u^r(p) \times \\ & \times A_4(\vec{q}) \delta(\varepsilon - \varepsilon'), \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

где $\varepsilon, \varepsilon'$ – соответственно энергии начального и конечного состояния электрона, $A_4(\vec{q})$ – Фурье-разложение 4-потенциала электромагнитного поля в импульсном пространстве.

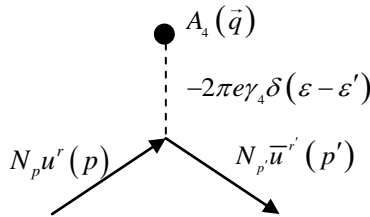


Рис. 2. Диаграмма Фейнмана рассеяния электрона в постоянном внешнем поле (1-й порядок)

Напомним, что матричный элемент в [1] содержит множители $N_p, N_{p'}$, выписанные здесь явно. В общем случае они равны:

$$N_p = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}, \quad (3.1.2)$$

однако при рассмотрении упругого рассеяния в постоянном поле импульс не изменяется, и формально в (1.18) уже проведено интегрирование по пространственной части дельта-функций. В итоге получим

$$N_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}. \quad (3.1.3)$$

В случае кулоновского электростатического потенциала

$$A_\mu(x) = \left\{ 0, 0, 0, -i \frac{Ze}{|\vec{r}|} \right\}, \quad (3.1.4)$$

$$A_\mu(\vec{q}) = -\int e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{r}} \frac{Ze}{|\vec{r}|} d^3\vec{r}, \quad (3.1.5)$$

здесь Z – зарядовое число ядра, $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$ – импульс, переданный полю. Рассмотрение задачи ведётся в системе координат, связанной с рассеивающим центром. Диаграмма рассматриваемого процесса приведена на рис. 2.

Сопоставляя формулы (1.18), (1.25) и (3.1.1), определяем амплитуду рассеяния:

$$M_{if} = -\frac{e}{2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}} \bar{u}^{r'}(p') \gamma_4 u^r(p) A_4(\vec{q}). \quad (3.1.6)$$

Если поляризация начального состояния электрона неизвестна, а в конечном состоянии не представляет интереса, то производится усреднение по поляризациям:

$$\frac{1}{2} \sum_{r,r'} |M_{if}|^2 = \frac{1}{2} \text{Sp} \{ (m - i\hat{p}) \bar{A} (m - i\hat{p}') A \}. \quad (3.1.7)$$

Матрица перехода между состояниями A при этом есть не что иное, как γ_4 . Из амплитуды рассеяния явно выделяется величина $|eA_4(\vec{q})|^2$, в нерелятивистском пределе равная Фурье-компоненте потенциальной энергии электрона в поле. Вычислим шпур:

$$\begin{aligned} I &= \text{Sp} \{ (m - i\hat{p}) \gamma_4 (m - i\hat{p}') \gamma_4 \} = \\ &= \text{Sp} \{ m^2 \gamma_4 \gamma_4 - im \hat{p} \gamma_4 \gamma_4 - im \gamma_4 \hat{p}' \gamma_4 - \hat{p} \gamma_4 \hat{p}' \gamma_4 \}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

В качестве справочной информации перечислим ниже свойства гамма-матриц Дирака, которые будут активно

применяться и при рассмотрении последующих вопросов. Антисимметричный коммутатор гамма-матриц равен удвоенному четырёхмерному дельта-символу [1]:

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (3.1.9)$$

Все гамма-матрицы являются бесследовыми:

$$\text{Sp} \gamma_\mu = 0, \quad (3.1.10)$$

и квадрат любой матрицы Дирака равен единичной матрице I :

$$\gamma_\mu \gamma_\mu = I. \quad (3.1.11)$$

Применяя эти свойства, можно вычислить свёртки любого количества матриц [2]:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\mu &= 4I, \\ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\mu &= -2\gamma_\nu, \\ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu &= 4\delta_{\nu\lambda} I, \\ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho \gamma_\mu &= -2\gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

и шпуры их различных комбинаций:

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} &= 4\delta_{\mu\nu}, \\ \text{Sp} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \} &= 4(\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Тот факт, что матрицы Дирака – бесследовые, приводит к равенству нулю шпура любого нечётного их числа. При вычислении шпуров необходимо учитывать и свойства единичной матрицы:

$$\begin{aligned} \text{Sp} I &= 4, \\ \text{Sp} \delta_{\mu\nu} I &= 4\delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Вернёмся к описанию упругого рассеяния электрона в стационарном поле. Шпур (3.1.8) равен:

$$\begin{aligned} Q &= \text{Sp} \{ m^2 \gamma_4 \gamma_4 - im \hat{p} \gamma_4 \gamma_4 - im \gamma_4 \hat{p}' \gamma_4 - \hat{p} \gamma_4 \hat{p}' \gamma_4 \} = \\ &= 4m^2 - p_\mu p'_\nu \text{Sp} \{ \gamma_\mu \gamma_4 \gamma_\nu \gamma_4 \} = \\ &= 4m^2 - 4p_\mu p'_\nu (\delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} - \delta_{\mu\nu} \delta_{44} + \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4}) = \\ &= 4m^2 + 4p \cdot p'. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

С учётом релятивистской связи между энергией и импульсом (2.4.9), а также сохранения энергии и абсолютной величины пространственной компоненты импульса получим:

$$Q = 4m^2 + 4\vec{p} \cdot \vec{p}' + 4\varepsilon^2. \quad (3.1.16)$$

Обозначая угол между начальным и конечным направлениями движения за θ , можем переписать скалярное произведение импульсов:

$$\vec{p} \cdot \vec{p}' = \vec{p}^2 \cos \theta = \vec{p}^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right),$$

и тогда для шпура:

$$\begin{aligned} Q &= 4m^2 + 4\varepsilon^2 + 4\vec{p}^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \\ &= 8\varepsilon^2 \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

С учётом уменьшения амплитуды рассеяния в два раза вследствие усреднения по поляризациям электрона, для сечения получается следующая формула:

$$d\sigma = \frac{|eA_4(\vec{q})|^2}{4\pi^2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\Omega. \quad (3.1.18)$$

В принципе, данный результат является общим для произвольного электростатического поля, создаваемого некоторым распределением зарядов с плотностью $\rho(\vec{r})$. Фигурирующая в формуле (3.1.18) компонента 4-потенциала может быть выражена через *форм-фактор* $\rho(\vec{q})$ плотности зарядов [2]:

$$A_4(\vec{q}) = -\frac{4\pi\rho(\vec{q})}{\vec{q}^2}, \quad (3.1.19)$$

где форм-фактор определяется как

$$\rho(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}. \quad (3.1.20)$$

Как видно из определения, форм-фактором называется Фурье-образ плотности распределения в пространстве импульсов. В рассматриваемом случае кулоновского потенциала точечного

заряда величиной Ze в начале координат плотность заряда выражается через дельта-функцию:

$$\rho(\vec{r}) = 4\pi\delta(\vec{r})Ze,$$

соответственно, форм-фактор оказывается равным $\rho(\vec{q}) = Ze$. Тогда сечение рассеяния электрона на ядре:

$$d\sigma = \frac{4(Ze^2)^2}{\vec{q}^4} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\Omega. \quad (3.1.21)$$

Изменение импульса $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$ можно переписать через угол рассеяния:

$$\vec{q}^2 = 4\vec{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.1.22)$$

Потому окончательно дифференциальное сечение сможем записать так [4]:

$$d\sigma = \frac{(Ze^2)^2}{4\vec{p}^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\Omega. \quad (3.1.23)$$

Легко видеть, что в нерелятивистском пределе ($\vec{p}^2 / \varepsilon^2 \ll 1$) получается классическая формула Резерфорда для рассеяния частицы в кулоновском центральном поле:

$$d\sigma = \frac{(Ze^2)^2}{4m^2 \bar{v}^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega, \quad (3.1.24)$$

где \bar{v} – скорость налетающей частицы в системе отсчёта рассеивающего центра. Такой же результат достигается и при рассмотрении рассеяния скалярных частиц (с нулевым спином), с тем отличием, что множитель $1 - \frac{\vec{p}^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$ при этом отсутствует. Его наличие для частиц, имеющих ненулевое значение спина, объясняется взаимодействием спинового магнитного момента с магнитным полем ядра.

Учтём теперь возможность экранировки поля ядра электронной оболочкой атома. При этом кулоновский

потенциал модифицируется, и в простейшем случае может быть записан в форме *потенциала Юкавы*:

$$A_4(x) = -\frac{Ze}{r} e^{-r/a}, \quad (3.1.25)$$

где a – радиус экранировки. Для атома он обычно равен $a = r_0 Z^{-1/3}$, r_0 – боровский радиус водорода (в системе единиц $\hbar, c = 1$):

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi m}, \quad (3.1.26)$$

m – масса электрона. Фурье-образ модифицированного потенциала выглядит следующим образом:

$$A_4(\vec{q}) = -\frac{4\pi Ze}{\vec{q}^2 + \frac{1}{a^2}}. \quad (3.1.27)$$

Вычислим его:

$$\begin{aligned} I &= \int dr^3 \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{r} e^{-\lambda r} = 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \int_{-\pi}^\pi d\theta \sin\theta e^{iqr \cos\theta} e^{-\lambda r} = \\ &= 2\pi \int_0^\infty r dr \int_{-1}^1 dx e^{iqrx} e^{-\lambda r} = 2\pi \int_0^\infty r dr \frac{1}{iqr} (e^{iqr-\lambda r} - e^{-iqr-\lambda r}) = \\ &= 2\pi \frac{1}{iq} \left(-\frac{1}{iq-\lambda} + \frac{1}{-iq-\lambda} \right) = \frac{4\pi}{q^2 + \lambda^2}. \end{aligned}$$

Положив $\lambda \rightarrow 0$, непосредственно получаем Фурье-образ кулоновского потенциала (3.1.19). Фурье-образ потенциала Юкавы является сходящимся для любых ненулевых значений λ , что подтверждает сходимость интеграла (3.1.5).

Сечение рассеяния в экранированном поле принимает следующий вид:

$$d\sigma = \frac{(Ze^2)^2}{4} \frac{\varepsilon^2 \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}{\left(\vec{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4a^2} \right)^2} d\Omega. \quad (3.1.28)$$

В отличие от незранированного потенциала, здесь при вычислении полного сечения не возникает расходимости подынтегральной функции для углов рассеяния, близких к нулю.

3.2. Комптоновское рассеяние

Рассмотрим процесс рассеяния фотона на электроне, или *эффект Комптона*:

$$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma.$$

Примем обозначения: k и p – 4-импульсы начальных фотона и электрона, k' и p' – 4-импульсы конечных фотона и электрона, r, r' – спиральности начального и конечного электронов, λ, λ' – индексы векторов поляризации начального и конечного фотонов соответственно.

Вычисление матричного элемента даёт [1]:

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle = & \frac{e^2 (2\pi)^4}{4\sqrt{\varepsilon\varepsilon'\omega\omega'}} \delta(p' + k' - p - k) \times \\ & \times \left[\bar{u}^{r'}(p') e_{\alpha}^{\lambda'} \gamma_{\alpha} \frac{\hat{p} + \hat{k} + im}{(p+k)^2 + m^2} e_{\beta}^{\lambda} \gamma_{\beta} u^r(p) + \right. \\ & \left. + \bar{u}^{r'}(p') e_{\alpha}^{\lambda} \gamma_{\alpha} \frac{\hat{p} - \hat{k}' + im}{(p-k')^2 + m^2} e_{\beta}^{\lambda'} \gamma_{\beta} u^r(p) \right], \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

где $\varepsilon, \varepsilon', \omega, \omega'$ – нулевые компоненты 4-импульсов электрона и фотона в начальном и конечном состоянии; $e^{\lambda}, e^{\lambda'}$ – 4-векторы поляризации фотона. Соответствующая процессу диаграмма Фейнмана во втором порядке показана на рис. 3.

Очевидно, матричный элемент (3.2.1) не равен нулю только при выполнении закона сохранения 4-импульса, т.е. при соотношении

$$p' + k' = p + k. \quad (3.2.2)$$

Отсюда можно получить формулу для сдвига частоты рассеянного фотона. Возведём это выражение в квадрат и с учётом релятивистской связи между энергией и импульсом (2.4.9) получим

$$p^2 = p'^2 = -m^2, \quad k^2 = k'^2 = 0, \quad (3.2.3)$$

$$p \cdot k = p' \cdot k'.$$

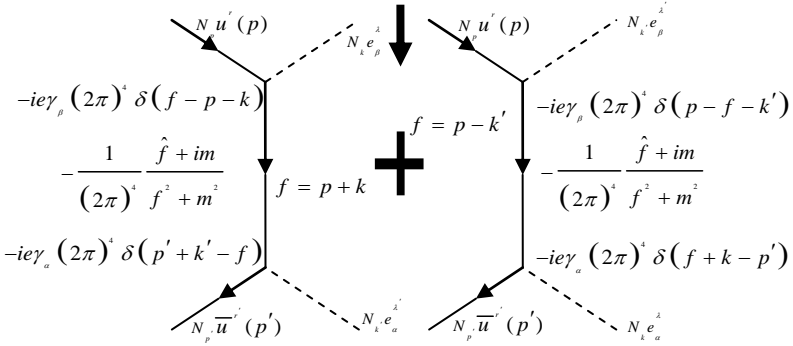


Рис. 3. Диаграмма Фейнмана для эффекта Комптона. Стрелка указывает направление входящих частиц

Умножая скалярно (3.2.2) на k' , получим

$$p \cdot k = p \cdot k' + k \cdot k'. \quad (3.2.4)$$

Схематичное изображение процесса рассеяния фотона на электроне с разъяснением дальнейших обозначений приведено на рис. 4. Здесь показаны углы между начальным и конечным импульсами фотона θ , фотона и электрона θ_2 , а также начальными импульсами электрона и фотона θ_1 .

Выделяя в (3.2.4) временные и пространственные компоненты четырёхмерных импульсов электрона и фотона (напомним, что в используемых здесь координатах Минковского $p = \{\vec{p}, i\varepsilon\}, k = \{\vec{k}, i\omega\}$), придём к соотношению между частотами падающего и рассеянного фотона:

$$\omega(1 - v_1 \cos \theta_1) =$$

$$= \omega'(1 - v_1 \cos \theta_2) + \frac{\omega \omega'}{\varepsilon} (1 - \cos \theta), \quad (3.2.5)$$

где v_1 – начальная скорость электрона.

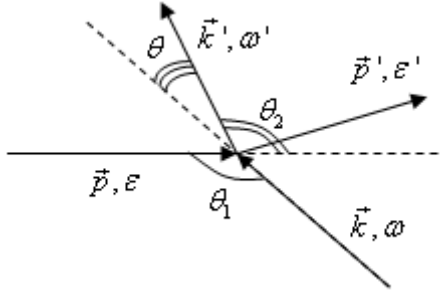


Рис. 4. Схематичное изображение рассеяния фотона электром

В случае рассеяния на неподвижном электроне (т.е. при условии $v_1 = 0, \varepsilon = m$) получим известную *формулу Комптона* для сдвига частоты [4]:

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)}. \quad (3.2.6)$$

Теперь займёмся вычислением дифференциального сечения рассеяния процесса. Сопоставляя (3.2.1) и (1.17), получаем после интегрирования по одной из дельта-функций и подстановки энергии и массы частиц в поток (1.14):

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{|\bar{u}^r(p') A u^r(p)|^2}{16|(p, k)| \varepsilon' \omega'} \times \quad (3.2.7)$$

$$\times \delta(p' + k' - p - k) d^3 p' d^3 k',$$

где для краткости введены следующие обозначения:

$$A = \hat{e}^\nu \frac{\hat{f} + im}{m^2 \varkappa_1} \hat{e}^\mu + \hat{e}^\mu \frac{\hat{f}' + im}{m^2 \varkappa_2} \hat{e}^\nu, \quad (3.2.8)$$

$$f = p + k = p' + k', \quad (3.2.9)$$

$$f' = p - k' = p' - k,$$

и инварианты:

$$\varkappa_1 = \frac{f^2 + m^2}{m^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{f'^2 + m^2}{m^2}. \quad (3.2.10)$$

Инварианты \varkappa_1, \varkappa_2 являются 4-скалярами, и потому сохраняются при любых преобразованиях координат. Также в дальнейшем заменим комбинацию $|(p, k)|$ в знаменателе (3.2.7)

на $\frac{1}{2}m^2 |\varkappa_1|$.

Используя дельта-функцию, можно отдельно проинтегрировать по \vec{p}', ω' , перейдя таким образом к зависимости от телесного угла. Интегрирование формально сводится к заменам [4]:

$$\delta(\vec{p} + \vec{k} - \vec{p}' - \vec{k}') d^3 p' \rightarrow 1,$$

$$\delta(\varepsilon + \omega - \varepsilon' - \omega') d^3 k' \rightarrow \omega'^2 \left| \frac{\partial}{\partial \omega'} (\omega' + \varepsilon') \right|^{-1} d\Omega.$$

Здесь $d\Omega$ – элемент телесного угла, в котором лежит вектор k' . В последнем соотношении в силу закона сохранения энергии выполняется

$$\varepsilon'^2 = m^2 + (\vec{p} + \vec{k} - \vec{k}')^2$$

и потому

$$\frac{\partial}{\partial \omega'} (\omega' + \varepsilon') = -\frac{m^2 \varkappa_1}{2\varepsilon' \omega'}.$$

Таким образом, для дифференциального сечения рассеяния получается выражение

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{\omega'^2}{4m^4 \varkappa_1^2} |\bar{u}^{r'}(p') Au^r(p)|^2 d\Omega. \quad (3.2.11)$$

Если начальное состояние электрона не поляризовано, а поляризация конечного состояния не представляет интереса, то следует усреднить по поляризациям электронов:

$$\frac{1}{2} \sum_{r, r'} |\bar{u}^{r'}(p') Au^r(p)|^2 = \frac{1}{2} \text{Sp} \{ (m - i\hat{p}) \bar{A} (m - i\hat{p}') A \}. \quad (3.2.12)$$

Точно так же учитываются возможные поляризации фотонов. Суммирование по поляризациям фотонов сводится к замене $\hat{e}^\mu, \hat{e}^\nu \rightarrow \gamma_\mu, \gamma_\nu$ (см. п. 2.2), поэтому

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \frac{1}{2} \text{Sp} \{ (m - i\hat{p}) \bar{A} (m - i\hat{p}') A \} = \\
& = -\frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu} \text{Sp} \{ (m - i\hat{p}) (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) (m - i\hat{p}') (A_1 + A_2) \},
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

где слагаемые в матрице (3.2.8) обозначены как A_1, A_2 .

Окончательно, в соответствии с (2.5.9), (2.5.20), квадрат матричного элемента заменяется суммой шпуров следующего вида:

$$\begin{aligned}
& |\bar{u}^{r'}(p') Au^r(p)|^2 \rightarrow \\
& \rightarrow -\frac{1}{m^4 \varkappa_1^2} \text{Sp} \{ (m - i\hat{p}) \gamma_\nu (\hat{f} + im) \gamma_\mu \times \\
& \quad \times (m - i\hat{p}') \gamma_\mu (\hat{f} + im) \gamma_\nu \} - \\
& -\frac{1}{m^4 \varkappa_1 \varkappa_2} \text{Sp} \{ (m - i\hat{p}) \gamma_\nu (\hat{f} + im) \gamma_\mu \times \\
& \quad \times (m - i\hat{p}') \gamma_\nu (\hat{f}' + im) \gamma_\mu \} - \\
& -\frac{1}{m^4 \varkappa_1 \varkappa_2} \text{Sp} \{ (m - i\hat{p}) \gamma_\nu (\hat{f}' + im) \gamma_\mu \times \\
& \quad \times (m - i\hat{p}') \gamma_\nu (\hat{f} + im) \gamma_\mu \} - \\
& -\frac{1}{m^4 \varkappa_2^2} \text{Sp} \{ (m - i\hat{p}) \gamma_\nu (\hat{f}' + im) \gamma_\mu \times \\
& \quad \times (m - i\hat{p}') \gamma_\mu (\hat{f}' + im) \gamma_\nu \}.
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Как видно, первое слагаемое здесь переходит в четвёртое, а второе – в третье после замены $f \rightarrow f', \varkappa_1 \rightarrow \varkappa_2$, что позволяет упростить процесс вычисления.

Продemonстрируем подробное вычисление одного из шпуров с применением свойств (3.1.9)–(3.1.13). Первый шпур содержит 16 слагаемых, 8 из которых равны нулю, т.к. содержат нечётное число матриц Дирака. Потому мы сразу их опустим:

$$\begin{aligned}
Q_1 &\equiv \text{Sp}\left\{(m - i\hat{p})\gamma_\nu(\hat{f} + im)\gamma_\mu \times \right. \\
&\quad \left. \times (m - i\hat{p}')\gamma_\mu(\hat{f} + im)\gamma_\nu\right\} = \\
&= \text{Sp}\left\{m^2\gamma_\nu\hat{f}\gamma_\mu\gamma_\mu\hat{f}\gamma_\nu + m^2\gamma_\nu\hat{f}\gamma_\mu\hat{p}'\gamma_\mu\gamma_\nu - \right. \\
&\quad - m^4\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\mu\gamma_\nu + m^2\gamma_\nu\gamma_\mu\hat{p}'\gamma_\mu\hat{f}\gamma_\nu + \\
&\quad + m^2\hat{p}'\gamma_\nu\hat{f}\gamma_\mu\gamma_\mu\gamma_\nu - \hat{p}'\gamma_\nu\hat{f}\gamma_\mu\hat{p}'\gamma_\mu\hat{f}\gamma_\nu + \\
&\quad \left. + m^2\hat{p}'\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\mu\hat{f}\gamma_\nu + m^2\hat{p}'\gamma_\nu\gamma_\mu\hat{p}'\gamma_\mu\gamma_\nu\right\}. \tag{3.2.15}
\end{aligned}$$

Вычислим по отдельности каждое из оставшихся слагаемых, учитывая, что $\hat{a} = a_\mu\gamma_\mu$:

$$\begin{aligned}
\text{Sp}\left(\gamma_\nu\hat{f}\gamma_\mu\gamma_\mu\hat{f}\gamma_\nu\right) &= 4\text{Sp}\left(\gamma_\nu\hat{f}\hat{f}\gamma_\nu\right) = 16f_\alpha f_\beta \text{Sp}\left(\delta_{\alpha\beta}I\right) = \\
&= 64(f, f), \\
\text{Sp}\left(\gamma_\nu\hat{f}\gamma_\mu\hat{p}'\gamma_\mu\gamma_\nu\right) &= -2\text{Sp}\left(\gamma_\nu\hat{f}\hat{p}'\gamma_\nu\right) = -8f_\alpha p'_\beta \text{Sp}\left(\delta_{\alpha\beta}I\right) = \\
&= -32(f, p'), \\
\text{Sp}\left(\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\mu\gamma_\nu\right) &= 4\text{Sp}\left(\gamma_\nu\gamma_\nu\right) = 16\text{Sp}\left(I\right) = 64, \\
\text{Sp}\left(\gamma_\nu\gamma_\mu\hat{p}'\gamma_\mu\hat{f}\gamma_\nu\right) &= -2\text{Sp}\left(\gamma_\nu\hat{p}'\hat{f}\gamma_\nu\right) = -8p'_\alpha f_\beta \text{Sp}\left(\delta_{\alpha\beta}I\right) = \\
&= -32(f, p'), \\
\text{Sp}\left(\hat{p}'\gamma_\nu\hat{f}\gamma_\mu\gamma_\mu\gamma_\nu\right) &= 4\text{Sp}\left(\hat{p}'\gamma_\nu\hat{f}\gamma_\nu\right) = -8p_\alpha f_\beta \text{Sp}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta\right) = \\
&= -32(f, p), \\
\text{Sp}\left(\hat{p}'\gamma_\nu\hat{f}\gamma_\mu\hat{p}'\gamma_\mu\hat{f}\gamma_\nu\right) &= -2\text{Sp}\left(\hat{p}'\gamma_\nu\hat{f}\hat{p}'\hat{f}\gamma_\nu\right) = \\
&= 4p_\alpha f_\beta p'_\rho f_\sigma \text{Sp}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\rho\gamma_\sigma\right) = \\
&= 16p_\alpha f_\beta p'_\rho f_\sigma \left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}\right) = \\
&= 16\left[(p, f)(p', f) - (p, p')(f, f) + (p, f)(p', f)\right].
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, после всех преобразований получим следующее:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \text{Sp} \left\{ (m - i\hat{p})\gamma_\nu (\hat{f} + im)\gamma_\mu \times \right. \\
&\quad \left. \times (m - i\hat{p}')\gamma_\mu (\hat{f} + im)\gamma_\nu \right\} = \\
&= 16 \left[2(p, f)(p', f) - (p, p')(f^2 + m^2) + \right. \\
&\quad \left. + 4m^2((p, f) + (p', f) - f^2) + 4m^4 \right].
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Действуя аналогичным образом, вычислим и второй шпур:

$$\begin{aligned}
Q_2 &\equiv \text{Sp} \left\{ (m - i\hat{p})\gamma_\nu (\hat{f} + im)\gamma_\mu \times \right. \\
&\quad \left. \times (m - i\hat{p}')\gamma_\nu (\hat{f}' + im)\gamma_\mu \right\} = \\
&= 16 \left[m^2((f, f') + (p, p') + (p', f') + \right. \\
&\quad \left. + (p, f) + (p, f') + (p', f)) + \right. \\
&\quad \left. + 2m^4 + 2(p, p')(f, f') \right].
\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Запишем входящие в (3.2.16), (3.2.17) скалярные произведения 4-векторов через инвариантные величины:

$$(p, f) = m^2 \left(1 - \frac{\varkappa_1}{2} \right), \tag{3.2.18}$$

$$(p', f) = m^2 \left(1 - \frac{\varkappa_1}{2} \right), \tag{3.2.19}$$

$$(p, p') = m^2 \left(1 - \frac{\varkappa_1}{2} - \frac{\varkappa_1}{2} \right), \tag{3.2.20}$$

$$(f, f') = -m^2, \tag{3.2.21}$$

$$(p', f') = m^2 \left(1 - \frac{\varkappa_2}{2} \right), \tag{3.2.22}$$

$$(p, f') = m^2 \left(1 - \frac{\varkappa_2}{2} \right). \tag{3.2.23}$$

Подстановка данных произведений даёт следующие значения шпуров:

$$Q_1 = 8m^4 (4 - 2\varkappa_1 - \varkappa_1 \varkappa_2), \tag{3.2.24}$$

$$Q_2 = 8m^4(4 - \varkappa_1 - \varkappa_2), \quad (3.2.25)$$

$$Q_3 = 8m^4(4 - \varkappa_2 - \varkappa_1), \quad (3.2.26)$$

$$Q_4 = 8m^4(4 - 2\varkappa_2 - \varkappa_1\varkappa_2). \quad (3.2.27)$$

В итоге дифференциальное сечение рассеяния определяется выражением

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{\omega'^2}{2m^4 \varkappa_1^2} \times \left[4 \left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2} \right) - \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \right) \right] d\Omega. \quad (3.2.28)$$

В системе отсчёта, где электрон в начальном состоянии покоился (т.е. $\vec{p}_1 = 0$), соотношения существенно упрощаются:

$$\left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2} \right) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta), \quad (3.2.29)$$

$$\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \right) = \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega}, \quad (3.2.30)$$

и дифференциальное сечение рассеяния принимает вид

$$d\sigma = \frac{e^4}{8(2\pi)^2 m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \theta \right) d\Omega. \quad (3.2.31)$$

Наконец, вводя боровский радиус электрона (3.1.26), получим окончательное выражение для дифференциального сечения [4]:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \theta \right) d\Omega. \quad (3.2.32)$$

Формула (3.2.32) известна как *формула Клейна–Нишины*. Следует отметить, что полученный результат содержит в знаменателе массу рассеивающей частицы. Потому при $m \rightarrow \infty$ рассеяние становилось бы невозможным. Тем не менее такой вывод не является точным, т.к. здесь рассмотрена диаграмма лишь второго порядка. В четвёртом порядке теории возмущений появляются матричные элементы, отвечающие рассеянию на бесконечно тяжёлом неподвижном центре. Они соответствуют явлению *когерентного рассеяния* фотона на ядре [2].

Подставляя частоту рассеянного фотона из формулы (3.2.6), получим зависимость сечения от начальной частоты и угла рассеяния:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{\left[1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)\right]^2} \times \left\{ 1 + \frac{\frac{\omega^2}{m^2}(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta) \left[1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)\right]} \right\} d\Omega. \quad (3.2.33)$$

При малых энергиях получается классическая формула Томсона:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega. \quad (3.2.34)$$

Здесь сечение перестаёт зависеть от частоты и, соответственно, энергии фотона.

Непосредственное интегрирование по углам даёт выражение для полного сечения рассеяния. Обозначив $\gamma = \omega/m$, получим

$$\sigma = 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{1 + \gamma}{\gamma^3} \left[\frac{2\gamma(1 + \gamma)}{1 + 2\gamma} - \ln(1 + 2\gamma) \right] + \frac{\ln(1 + 2\gamma)}{2\gamma} - \frac{1 + 3\gamma}{(1 + 2\gamma)^2} \right\}. \quad (3.2.35)$$

Графическое изображение данной зависимости сечения рассеяния от энергии приведено на рис. 5.

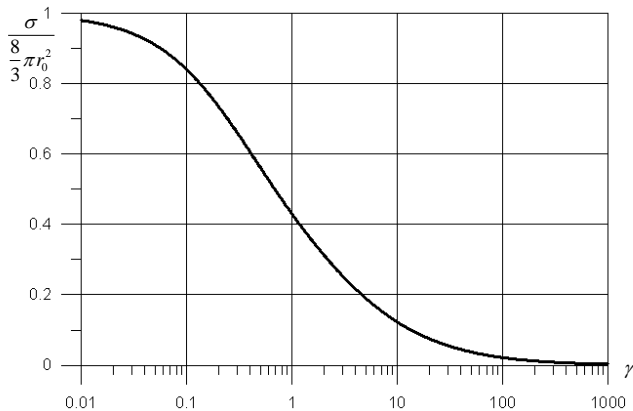


Рис. 5. Зависимость полного сечения комптоновского рассеяния от энергии фотона

Кроме того, можно привести выражения для предельных случаев. При малых энергиях фотонов ($\omega \ll m$) разложение в ряд по параметру γ даёт слабую зависимость сечения от частоты фотона:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 (1 - 2\gamma + \dots). \quad (3.2.36)$$

Для высокоэнергетических фотонов ($\omega \gg m$), напротив, сечение в пределе получается обратно пропорциональным частоте:

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{\gamma} \left(\ln 2\gamma + \frac{1}{2} \right). \quad (3.2.37)$$

Из последней формулы видно, что с ростом энергии фотонов сечение рассеяния быстро уменьшается и оказывается практически нулевым для жёсткого гамма-излучения.

3.3. Рассеяние электрона на электроне

Рассмотренный выше эффект Комптона включает взаимодействие фотонного и спинорного полей. Теперь рассмотрим процесс, в котором не происходит испускания или поглощения фотонов, – рассеяние электрона на электроне (рис. 6).

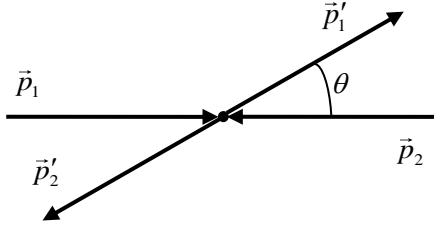


Рис. 6. Рассеяние электрона на электроне в системе центра масс

С точностью до обозначений описание данной реакции совпадает с рассеянием позитрона на позитроне, поэтому последнее не рассматривается отдельно.

Матрица рассеяния первого порядка всегда содержит только элементы, отвечающие за испускание и поглощение фотона, поэтому данный процесс относится к эффектам второго порядка.

Рассеяние электрона на электроне $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ во втором порядке теории возмущений описывается матричным элементом [1]:

$$\begin{aligned}
 \langle f | S^{(2)} | i \rangle = & \frac{ie^2 (2\pi)^4}{4\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon'_1 \varepsilon'_2}} \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\
 & \times \left(\frac{\bar{u}^{r'_1}(p'_1) \gamma_\alpha u^{r_1}(p_1) \bar{u}^{r'_2}(p'_2) \gamma_\alpha u^{r_2}(p_2)}{(p_1 - p'_1)^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{\bar{u}^{r'_1}(p'_1) \gamma_\alpha u^{r_2}(p_2) \bar{u}^{r'_2}(p'_2) \gamma_\alpha u^{r_1}(p_1)}{(p_1 - p'_2)^2} \right). \quad (3.3.1)
 \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: p, ε, r – 4-импульсы, энергии и поляризации электронов в начальном состоянии, p', ε', r' – в конечном. Индексы 1,2 нумеруют взаимодействующие частицы. Диаграмма процесса во втором порядке теории возмущений показана на рис. 7.

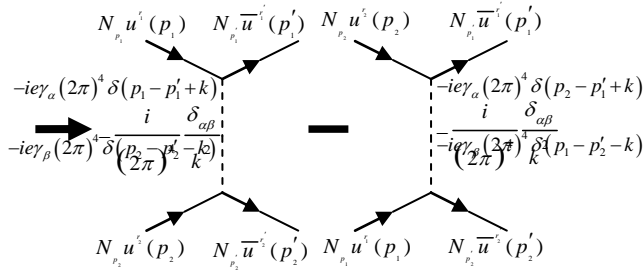


Рис. 7. Диаграмма Фейнмана рассеяния электрона на электроне во 2-м порядке. Знак минус отвечает статистике Ферми для электронов

Соответственно (3.3.1) и (1.17), выражение для дифференциального сечения рассеяния может быть записано как:

$$d\sigma = \frac{e^4 (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')}{4\sqrt{(p_1, p_2)^2 - m^4}} |M_{fi}|^2 \frac{d^3 p_1' d^3 p_2'}{2\varepsilon_1' \varepsilon_2' (2\pi)^6}, \quad (3.3.2)$$

где амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = \frac{\bar{u}^{r_1'}(p_1') \gamma_\alpha u^{r_1}(p_1) \bar{u}^{r_2'}(p_2') \gamma_\alpha u^{r_2}(p_2)}{(p_1 - p_1')^2} - \frac{\bar{u}^{r_1'}(p_1') \gamma_\alpha u^{r_2}(p_2) \bar{u}^{r_2'}(p_2') \gamma_\alpha u^{r_1}(p_1)}{(p_1 - p_2')^2}, \quad (3.3.3)$$

а поток

$$j = \frac{\sqrt{(p_1, p_2)^2 - m^4}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (3.3.4)$$

В системе отсчёта, связанной с центром масс взаимодействующих электронов (см. рис. б), выполняется закон сохранения 4-импульса:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2', \quad (3.3.5)$$

а также соотношения

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0,$$

$$\sqrt{(p_1, p_2)^2 - m^4} = 2\varepsilon |\vec{p}_1|,$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ – полная энергия. Поэтому можно исключить дельта-функцию по пространственной части 4-импульсов. Ещё более существенно можно упростить выражение для дифференциального сечения, перейдя к зависимости от угловых переменных, исключив при этом и дельта-функцию по энергиям электронов аналогично выражению (1.24) с учётом наличия двух частиц [2]:

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2 64\varepsilon^2} |M_{fi}|^2 d\Omega. \quad (3.3.6)$$

Далее будем считать, что исходные частицы не поляризованы, а поляризация конечного состояния интереса не представляет. Поэтому требуется выполнить усреднение сечения рассеяния по поляризациям, что, согласно (2.5.17), даёт:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{r,r'} |M_{fi}|^2 = \\ & = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(p_1 - p'_1)^4} \text{Sp} \{ \gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_1) \gamma_\beta (m - i\hat{p}_1) \} \times \right. \\ & \quad \times \text{Sp} \{ \gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_2) \gamma_\beta (m - i\hat{p}_2) \} + \\ & \quad + \frac{1}{(p_1 - p'_2)^4} \text{Sp} \{ \gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_1) \gamma_\beta (m - i\hat{p}_2) \} \times \\ & \quad \times \text{Sp} \{ \gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_2) \gamma_\beta (m - i\hat{p}_1) \} + \\ & \quad + \frac{2}{(p_1 - p'_1)^2 (p_1 - p'_2)^2} \text{Sp} \{ \gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_1) \gamma_\beta (m - i\hat{p}'_2) \times \\ & \quad \left. \times \gamma_\alpha (m - i\hat{p}_1) \gamma_\beta (m - i\hat{p}_2) \} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Как видно, в (3.3.7) требуется вычислить такие шпуры:

$$Q_1 = \text{Sp} \{ \gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_1) \gamma_\beta (m - i\hat{p}_1) \}, \quad (3.3.8)$$

$$Q_2 = \text{Sp}\{\gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_1)\gamma_\beta (m - i\hat{p}'_2) \times \\ \times \gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_1)\gamma_\beta (m - i\hat{p}'_2)\}. \quad (3.3.9)$$

С учётом свойств гамма-матриц (3.1.9)–(3.1.13), вычисление (3.3.8) даёт следующее:

$$Q_1 = m^2 \text{Sp}\{\gamma_\alpha \gamma_\beta\} - p'_\mu p_\nu \text{Sp}\{\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu\} = \\ = 4m^2 \delta_{\alpha\beta} - 4p'_\mu p_\nu (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) = \quad (3.3.10) \\ = 4(m^2 \delta_{\alpha\beta} + (p, p') \delta_{\alpha\beta} - p_\alpha p'_\beta - p'_\alpha p_\beta).$$

После перемножения шпуров и подстановки соответствующих импульсов для первых двух слагаемых в (3.3.7) получается

$$\text{Sp}\{\gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_1)\gamma_\beta (m - i\hat{p}'_1)\} \times \\ \times \text{Sp}\{\gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_2)\gamma_\beta (m - i\hat{p}'_2)\} = \quad (3.3.11) \\ = 64m^2 + 32[(p_1, p_2)(p'_1, p'_2) + (p_1, p'_2)(p'_1, p_2)] + \\ + 32m^2 [(p_1, p'_1) + (p_2, p'_2)],$$

$$\text{Sp}\{\gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_1)\gamma_\beta (m - i\hat{p}'_2)\} \times \\ \times \text{Sp}\{\gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_2)\gamma_\beta (m - i\hat{p}'_1)\} = \quad (3.3.12) \\ = 64m^2 + 32[(p_1, p_2)(p'_1, p'_2) + (p_1, p'_1)(p_2, p'_2)] + \\ + 32m^2 [(p_1, p'_2) + (p'_1, p_2)].$$

Теперь вычислим шпур Q_2 . Раскрывая скобки и сразу исключая слагаемые с нечётным числом гамма-матриц, получим

$$Q_2 = \text{Sp}\{\gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_1)\gamma_\beta (m - i\hat{p}'_2) \times \\ \times \gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_1)\gamma_\beta (m - i\hat{p}'_2)\} = \quad (3.3.13) \\ = \text{Sp}\{m^4 \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\alpha \gamma_\beta - m^2 \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\alpha \hat{p}'_1 \gamma_\beta \hat{p}'_2 \\ - m^2 \gamma_\alpha \gamma_\beta \hat{p}'_2 \gamma_\alpha \gamma_\beta \hat{p}'_1 - m^2 \gamma_\alpha \gamma_\beta \hat{p}'_2 \gamma_\alpha \hat{p}'_1 \gamma_\beta - \\ - m^2 \gamma_\alpha \hat{p}'_1 \gamma_\beta \gamma_\alpha \gamma_\beta \hat{p}'_2 - m^2 \gamma_\alpha \hat{p}'_1 \gamma_\beta \gamma_\alpha \hat{p}'_1 \gamma_\beta - \\ - m^2 \gamma_\alpha \hat{p}'_1 \gamma_\beta \hat{p}'_2 \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\alpha \hat{p}'_1 \gamma_\beta \hat{p}'_2 \gamma_\alpha \hat{p}'_1 \gamma_\beta \hat{p}'_2\}.$$

Рассмотрим каждое слагаемое по отдельности. Здесь удобно применять свойство инвариантности шпура к циклической перестановке сомножителей:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\alpha\gamma_\beta\} &= 4(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\beta} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}) = \\ &= 4(4 - 16 + 4) = -32,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\alpha\hat{p}_1\gamma_\beta\hat{p}_2\} &= -2\mathrm{Sp}\{\gamma_\beta\hat{p}_1\gamma_\beta\hat{p}_2\} = \\ &= -8((p_1, p_2) + (p_2, p_1) - 4(p_1, p_2)) = 16(p_1, p_2),\end{aligned}$$

$$\mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha\gamma_\beta\hat{p}'_2\gamma_\alpha\gamma_\beta\hat{p}'_2\} = 4p'_{2\mu}p_{2\nu}\mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha\delta_{\mu\alpha}\gamma_\nu\} = 16(p_2, p'_2).$$

Циклическая перестановка в третьем слагаемом позволяет привести его к виду, равнозначному второму шпуру:

$$\mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha\gamma_\beta\hat{p}'_2\gamma_\alpha\hat{p}'_1\gamma_\beta\} = \mathrm{Sp}\{\gamma_\beta\gamma_\alpha\gamma_\beta\hat{p}'_2\gamma_\alpha\hat{p}'_1\} = 16(p_1, p'_2),$$

$$\mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha\hat{p}'_1\gamma_\beta\gamma_\alpha\gamma_\beta\hat{p}'_2\} = -2\mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha\hat{p}'_1\gamma_\alpha\hat{p}'_2\} = 16(p'_1, p_2),$$

$$\mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha\hat{p}'_1\gamma_\beta\gamma_\alpha\hat{p}'_1\gamma_\beta\} = 4p'_{1\mu}p_{1\nu}\mathrm{Sp}\{\gamma_\beta\delta_{\mu\beta}\gamma_\nu\} = 16(p_1, p'_1).$$

В седьмом слагаемом также используется циклическая перестановка, приводящая ко второму слагаемому:

$$\mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha\hat{p}'_1\gamma_\beta\hat{p}'_2\gamma_\alpha\gamma_\beta\} = \mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\alpha\hat{p}'_1\gamma_\beta\hat{p}'_2\} = 16(p'_1, p'_2),$$

$$\mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha\hat{p}'_1\gamma_\beta\hat{p}'_2\gamma_\alpha\hat{p}'_1\gamma_\beta\hat{p}'_2\} =$$

$$= -2p'_{1\mu}p'_{2\nu}p_{1\rho}p_{2\sigma}\mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\rho\gamma_\sigma\} =$$

$$= -8p'_{1\mu}p'_{2\nu}p_{1\rho}p_{2\sigma}\mathrm{Sp}\{\delta_{\mu\nu}\gamma_\rho\gamma_\sigma\} =$$

$$= -32p'_{1\mu}p'_{2\nu}p_{1\rho}p_{2\sigma}\delta_{\rho\sigma}\delta_{\mu\nu} = -32(p_1, p_2)(p'_1, p'_2).$$

Объединяя вычисленные шпуры и приводя подобные, получим в итоге

$$\begin{aligned}Q_2 &= \mathrm{Sp}\{\gamma_\alpha(m - i\hat{p}'_1)\gamma_\beta(m - i\hat{p}'_2)\times \\ &\quad \times \gamma_\alpha(m - i\hat{p}_1)\gamma_\beta(m - i\hat{p}_2)\} = \\ &= 64m^4 + 64(p_1, p_2)(p'_1, p'_2) + \\ &+ 32m^2[(p_1, p_2) + (p_1, p'_2) + (p'_1, p_2) + \\ &\quad + (p'_1, p'_2) + (p'_1, p_1) + (p_2, p'_2)].\end{aligned}\tag{3.3.14}$$

Подстановка результатов в формулу (3.3.7) даёт выражение для усреднённого по поляризациям квадрата амплитуды рассеяния:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \sum_{r,r'} |M_{fi}|^2 &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(p_1 - p'_1)^4} (64m^4 + \right. \\
 &+ 32[(p_1, p_2)(p'_1, p'_2) + (p'_1, p_2)(p_1, p'_2)] + \\
 &+ 32m^2 [(p_1, p'_2) + (p'_1, p_2)] + \\
 &+ \frac{1}{(p_1 - p'_2)^4} (64m^4 + \\
 &+ 32[(p_1, p_2)(p'_1, p'_2) + (p'_1, p_1)(p_2, p'_2)] + \quad (3.3.15) \\
 &+ 32m^2 [(p'_1, p_1) + (p_2, p'_2)] + \\
 &+ \frac{2}{(p_1 - p'_1)^2 (p_1 - p'_2)^2} (64m^4 + 64(p_1, p_2)(p'_1, p'_2) + \\
 &+ 32m^2 ((p_1, p_2) + (p_1, p'_2) + (p'_1, p_2) + \\
 &+ (p'_1, p'_2) + (p'_1, p_1) + (p_2, p'_2))) \left. \right].
 \end{aligned}$$

Результат (3.3.15) является общим и справедлив для любых систем отсчёта. Для упрощения перейдём в систему центра масс. Из закона сохранения 4-импульса (3.3.5) выводится ряд соотношений:

$$\begin{aligned}
 (p_1, p_2) &= (p'_1, p'_2), \\
 (p_1, p'_1) &= (p_2, p'_2), \\
 (p_1, p'_2) &= (p'_1, p_2).
 \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Из релятивистской связи импульса, массы и энергии (2.4.9) устанавливается связь между скалярными произведениями 4-импульсов частиц:

$$(p_1, p'_1) + (p_1, p'_2) = (p_1, p_2) - m^2. \quad (3.3.17)$$

Заменяя произведения 4-импульсов согласно (3.3.16) и выделяя слагаемые вида (3.3.17), возможно упростить (3.3.15):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \sum_{r,r'} |M_{ji}|^2 = \\
& = 8 \left[\frac{(p_1, p_2)^2 + (p_1, p'_2)^2 + 2m^2(p_1, p_2) - 2m^2(p_1, p'_2)}{(p_1 - p'_1)^4} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(p_1, p_2)^2 + (p_1, p'_1)^2 + 2m^2(p_1, p_2) - 2m^2(p_1, p'_1)}{(p_1 - p'_2)^4} \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{(p_1, p_2)^2 + 2m^2(p_1, p_2)}{(p_1 - p'_1)^2 (p_1 - p'_2)^2} \right]. \tag{3.3.18}
\end{aligned}$$

Помимо вышеперечисленного, в системе центра масс выполняется соотношение

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}'_1| = |\vec{p}'_2| \equiv p, \tag{3.3.19}$$

что легко установить из проекций импульсов частиц на их начальные направления (см. рис. 6). Тогда в терминах угла рассеяния θ скалярные произведения 4-импульсов и разности в (3.3.18) переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
(p_1, p_2) &= -p^2 - \varepsilon^2, \\
(p_1, p'_2) &= -p^2 \cos \theta - \varepsilon^2, \\
(p_1, p'_1) &= +p^2 \cos \theta - \varepsilon^2, \\
(p_1 - p'_2)^2 &= 2p^2 (1 + \cos \theta), \\
(p_1 - p'_1)^2 &= 2p^2 (1 - \cos \theta).
\end{aligned}$$

Для упрощения дальнейших преобразований полезно использовать тригонометрические формулы половинных углов:

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1, \\
\cos^2 \theta &= 1 + 4 \sin^4 \frac{\theta}{2} - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\
\cos^2 \theta &= 1 + 4 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим по отдельности слагаемые в амплитуде рассеяния (3.3.18). Для первого, раскрывая скобки, приводя подобные и перегруппируя с учётом (2.4.9), получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{(p_1, p_2)^2 + (p_1, p'_2)^2 + 2m^2(p_1, p_2) - 2m^2(p_1, p'_2)}{(p_2 - p'_1)^4} = \\
 & = \frac{(p^2 + \varepsilon^2)^2 + (p^2 \cos \theta + \varepsilon^2)^2 - 2m^2(p^2 + \varepsilon^2) + 2m^2(p^2 \cos \theta + \varepsilon^2)}{16p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \\
 & = \frac{2(p^2 + \varepsilon^2)^2 + 4p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2} - 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{16p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \\
 & = \frac{2(p^2 + \varepsilon^2)^2 + 4p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2} - 4p^2(p^2 + \varepsilon^2 + m^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}}{16p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \\
 & = \frac{1}{4} + \frac{(2\varepsilon^2 - m^2)^2}{8p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{\varepsilon^2}{2p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.
 \end{aligned}$$

Для второго:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(p_1, p_2)^2 + (p_1, p'_1)^2 + 2m^2(p_1, p_2) - 2m^2(p_1, p'_1)}{(p_1 - p'_2)^4} = \\
 & = \frac{1}{4} + \frac{(2\varepsilon^2 - m^2)^2}{8p^4 \cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{\varepsilon^2}{2p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}.
 \end{aligned}$$

Наконец, для третьего:

$$\frac{(p_1, p_2)^2 + 2m^2(p_1, p_2)}{(p_1 - p'_1)^2 (p_1 - p'_2)^2} = \frac{(2\varepsilon^2 - m^2)(2\varepsilon^2 - 3m^2)}{8p^4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Отсюда, объединяя слагаемые и приводя подобные, можно получить окончательное выражение для дифференциального сечения рассеяния [4]:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{4v^4} \frac{(2\gamma-1)}{\gamma} \times \left[\frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} + \frac{(\gamma-1)^2}{(2\gamma-1)^2} \left(1 + \frac{4}{\sin^2 \theta} \right) \right] d\Omega, \quad (3.3.20)$$

где введены следующие обозначения: $\gamma = \varepsilon^2/m^2$, $v = p/m$ – скорость электронов в системе центра масс.

В нерелятивистском пределе $\gamma \rightarrow 1$ сечение выражается известной формулой Резерфорда, незначительно модифицирующейся вследствие обменных процессов, описываемых вторым слагаемым в диаграмме рис. 7:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{16v^4} \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) d\Omega. \quad (3.3.21)$$

Ультрарелятивистское приближение $\gamma \gg 1$ даёт для дифференциального сечения компактное выражение

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{4\varepsilon^2} \left(\frac{3 + \cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} \right)^2 d\Omega, \quad (3.3.22)$$

здесь в формуле использована постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$.

3.4. Рассеяние позитрона на электроне

Процесс рассеяния позитрона электроном

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$$

подобен рассеянию электрона на электроне. В частности, матричный элемент и диаграмма процесса могут быть получены сменой знака 4-импульса и времени для одного из электронов в рассеянии электрона на электроне (3.3.1) [1,4]:

$$p_2 = -p'_+, \quad (3.4.1)$$

$$p'_2 = -p_+, \quad (3.4.2)$$

где 4-импульс позитрона обозначен как p_+ . Для 4-импульса электрона, соответственно, будет применяться обозначение p_- . Матричный элемент процесса во втором порядке теории возмущений:

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle = & \frac{ie^2 (2\pi)^4}{4\sqrt{\varepsilon_+ \varepsilon_- \varepsilon'_+ \varepsilon'_-}} \delta(p_- + p_+ - p'_- - p'_+) \times \\ & \times \left(\frac{\bar{u}^{r'_-}(p'_-) \gamma_\alpha u^{r_-}(p_-) \bar{u}^{r_+}(-p_+) \gamma_\alpha u^{r'_+}(-p'_+)}{(p_- - p'_-)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\bar{u}^{r'_-}(p'_-) \gamma_\alpha u^{r'_+}(-p'_+) \bar{u}^{r_+}(-p_+) \gamma_\alpha u^{r_-}(p_-)}{(p_- + p'_+)^2} \right), \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

где $\varepsilon_+, \varepsilon_-$ – соответственно энергия позитрона и электрона в начальном состоянии, а $\varepsilon'_+, \varepsilon'_-$ – то же в конечном состоянии.

Усреднение по поляризациям начального и конечного состояний даёт для амплитуды рассеяния следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{r, r'} |M_{fi}|^2 = & \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(p_- - p'_-)^4} \text{Sp} \{ \gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_-) \gamma_\beta (m - i\hat{p}'_-) \} \times \right. \\ & \times \text{Sp} \{ \gamma_\alpha (m + i\hat{p}_+) \gamma_\beta (m + i\hat{p}_+) \} + \\ & + \frac{1}{(p_- + p_+)^4} \text{Sp} \{ \gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_-) \gamma_\beta (m + i\hat{p}'_+) \} \times \\ & \times \text{Sp} \{ \gamma_\alpha (m + i\hat{p}_+) \gamma_\beta (m - i\hat{p}'_-) \} + \\ & \left. + \frac{2}{(p_- - p'_-)^2 (p_- + p_+)^2} \text{Sp} \{ \gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_-) \gamma_\beta (m + i\hat{p}'_+) \} \times \right. \\ & \left. \times \gamma_\alpha (m - i\hat{p}'_-) \gamma_\beta (m + i\hat{p}'_+) \right]. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Опуская дальнейшие вычисления шпуров, непосредственно получаемых из выражений (3.3.8), (3.3.9) при выполнении

замены импульсов (3.4.1), (3.4.2), приведём конечную формулу для дифференциального сечения в системе центра инерции [4]:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{16\gamma} \left[\frac{1 + 4(\gamma - 1)\cos^2 \frac{\theta}{2} + 2(\gamma - 1)^2 \left(1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}\right)}{(\gamma - 1)^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{3 + 4(\gamma - 1) + 4(\gamma - 1)^2 \left(1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^4 \frac{\theta}{2}\right)}{\gamma^2} - \frac{3 + 8(\gamma - 1)\cos^2 \frac{\theta}{2} + 4(\gamma - 1)^2 \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\gamma(\gamma - 1)\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]. \quad (3.4.5)$$

В нерелятивистском пределе $\gamma \rightarrow 1$ сечение рассеяния выразится формулой Резерфорда без обменных слагаемых:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{16v^4} \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} \right) d\Omega. \quad (3.4.6)$$

Результат отличается от взаимодействий однотипных частиц, в которых, как мы видели выше, обменная диаграмма (второе слагаемое в (3.4.3)) вносит вклад одного порядка с рассеивающей диаграммой.

Ультрарелятивистский предел $\gamma \gg 1$ приводит сечение рассеяния к виду

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{16\varepsilon^2} \left(\frac{3 + \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta} \right)^2 d\Omega. \quad (3.4.7)$$

3.5. Образование электрон-позитронной пары двумя фотонами

Рассмотрим ещё два важных примера электродинамических явлений второго порядка. Первым из них будет образование электрон-позитронной пары при

взаимодействии двух фотонов. Поскольку данные процессы не рассматривались в [1], то для образования пары фотонами приведём дополнительно подробное вычисление матричных элементов и построение диаграммы Фейнмана.

Рассматривается процесс

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+.$$

Определим начальное и конечное состояние системы действием соответствующих операторов рождения и уничтожения частиц на вакуум:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= a_\lambda^+(k) a_{\lambda'}^+(k') |0\rangle, \\ |f\rangle &= d_{r_+}^+(p_+) c_{r_-}^+(p_-) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Здесь обозначены: k, k' – 4-импульсы начальных фотонов, λ, λ' – векторы их поляризации, p_+, p_-, r_+, r_- – 4-импульсы и спиральности позитрона и электрона соответственно.

Рассмотрим первый порядок теории возмущений. Матричный элемент оператора рассеяния имеет следующий вид [1]:

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = -e \int dx \langle f | N(\bar{\psi}(x) \gamma_\alpha \psi(x)) A_\alpha | i \rangle. \quad (3.5.2)$$

Явным образом выпишем фигурирующие в матричном элементе полевые функции фермионов $\psi, \bar{\psi}$ и фотонов A_α [1]:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \\ &= \sum_{r=\pm 1} \int N_p \left[c_r^-(p) u^r(p) e^{ipx} + d_r^+(p) u^r(-p) e^{-ipx} \right] d\vec{p} = \\ &= \psi^{(+)} + \psi^{(-)}, \\ \bar{\psi}(x) &= \\ &= \sum_{r=\pm 1} \int N_p \left[c_r^+(p) \bar{u}^r(p) e^{-ipx} + d_r^-(p) \bar{u}^r(-p) e^{ipx} \right] d\vec{p} = \\ &= \bar{\psi}^{(-)} + \bar{\psi}^{(+)}, \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

$$A_\alpha = \sum_{\lambda=1}^4 \int N_k e_\alpha^\lambda \left[a_\lambda(k) e^{ikx} + a_\lambda^+(k) e^{-ikx} \right] d\vec{k} = A_\alpha^{(+)} + A_\alpha^{(-)}.$$

Выражение для матричного элемента (3.5.2) содержит оператор нормального произведения N . Если подставить

полевые функции в виде сумм $\psi^{(+)} + \psi^{(-)}$, $\bar{\psi}^{(-)} + \bar{\psi}^{(+)}$ и $A_{\alpha}^{(+)} + A_{\alpha}^{(-)}$ и раскрыть оператор, возникают четыре слагаемых с попарными произведениями компонент полевых функций спинорного поля. Фотонные операторы коммутируют с фермионными, и потому для доказательства равенства нулю матричного элемента первого порядка достаточно рассмотреть

$$\begin{aligned} \langle f | A_{\alpha} | i \rangle &= \langle 0 | d_{r^+}(p_+) c_{r^-}(p_-) \times \\ &\times (A_{\alpha}^{(+)} + A_{\alpha}^{(-)}) a_{\lambda}^+(k) a_{\lambda'}^+(k') | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Здесь $A_{\alpha}^{(-)}$ непосредственно может быть перенесён к состоянию $\langle 0 |$. Подействовав на него, он даст ноль. Остаётся слагаемое вида $\langle 0 | A_{\alpha}^{(+)} a_{\lambda}^+(k) a_{\lambda'}^+(k') | 0 \rangle$. Для его вычисления используем коммутатор:

$$\left[A_{\alpha}^{(+)}, a_{\lambda}^+ \right]_- = N_{\alpha} e_{\alpha}^{\lambda} e^{ikx}. \quad (3.5.5)$$

Данное выражение непосредственно может быть получено из вида электромагнитного поля в (3.5.3). Дважды переставляя местами операторы в (3.5.4), получим

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_{\lambda}^+(k) a_{\lambda'}^+(k') A_{\alpha}^{(+)} + \\ + N_{\alpha} e_{\alpha}^{\lambda'} e^{ik'x} a_{\lambda}^+(k) + N_{\alpha} e_{\alpha}^{\lambda} e^{ikx} a_{\lambda'}^+(k') | 0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Операторы рождения действуют на вектор $\langle 0 |$, и, таким образом, в первом порядке матричный элемент равен нулю.

Во втором порядке матричный элемент процесса [1]

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle &= -\frac{(-ie)^2}{2} \langle f | \int T(N(\bar{\psi}(x) \gamma_{\alpha} \psi(x)) \times \\ &\times N(\bar{\psi}(x') \gamma_{\beta} \psi(x'))) \times \\ &\times T(N(A_{\alpha}(x) A_{\beta}(x'))) dx dx' | i \rangle. \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Хронологическое произведение фотонных операторов раскрывается по следующему правилу:

$$\begin{aligned}
& T\left(N\left(A_\alpha(x)A_\beta(x')\right)\right)= \\
& = N\left(A_\alpha(x)A_\beta(x')\right)+\dot{A}_\alpha(x)\dot{A}_\beta(x').
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

При этом свёртка не содержит фотонных операторов и вклада в матричный элемент не вносит. В нормальном произведении ненулевой вклад будет только от слагаемого $A_\alpha^{(+)}A_\beta^{(+)}$.

Преобразуем комбинацию $A_\alpha^{(+)}A_\beta^{(+)}a_\lambda^{(+)}A_{\lambda'}^{(+)}$ с использованием коммутатора (3.5.5). В итоге, ненулевой вклад будет от слагаемых

$$N_k N_{k'}\left(e_\alpha^\lambda e_\beta^{\lambda'} e^{i(kx+k'x')} + e_\alpha^{\lambda'} e_\beta^\lambda e^{i(kx+k'x')}\right). \tag{3.5.9}$$

Хронологическое произведение фермионных операторов раскрывается как:

$$\begin{aligned}
& T\left(N\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha\psi(x)\right)N\left(\bar{\psi}(x')\gamma_\beta\psi(x')\right)\right)= \\
& = N\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha\psi(x)\bar{\psi}(x')\gamma_\beta\psi(x')\right)+ \\
& +2N\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha\dot{\bar{\psi}}(x)\dot{\bar{\psi}}(x')\gamma_\beta\psi(x')\right)+ \\
& +\dot{\bar{\psi}}(x)\gamma_\alpha\ddot{\bar{\psi}}(x)\ddot{\bar{\psi}}(x')\gamma_\beta\dot{\bar{\psi}}(x').
\end{aligned} \tag{3.5.10}$$

Здесь ненулевыми могут быть только члены, содержащие по одному оператору рождения электрона и позитрона, и они содержатся только во втором слагаемом формулы – ненулевой вклад даст член $2\bar{\psi}^{(-)}(x)\gamma_\alpha\dot{\bar{\psi}}(x)\dot{\bar{\psi}}(x')\gamma_\beta\psi^{(-)}(x')$. Преобразуем эту комбинацию в действии на сопряжённый вектор конечного состояния (3.5.1), для чего используем коммутационные соотношения операторов рождения и уничтожения электронов и позитронов. Антиккоммутаторы

$$\begin{aligned}
& \left[c_r(p), c_{r'}^+(p')\right]_+ = \delta_{rr'}\delta(p-p'), \\
& \left[d_r(p), d_{r'}^+(p')\right]_+ = \delta_{rr'}\delta(p-p')
\end{aligned}$$

в совокупности с (3.5.3) приводят к антикоммутаторам:

$$\left[c_r(p), \bar{\psi}^{(-)}(x)\right]_+ = N_p \bar{u}^r(p) e^{-ipx},$$

$$\left[d_r(p), \psi^{(-)}(x) \right]_+ = N_p \bar{u}^r(-p) e^{-ipx}.$$

Свёртка спинорных полей равна

$$\dot{\psi}(x) \dot{\bar{\psi}}(x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\hat{p} + im}{p^2 + m^2} e^{ip(x-x')} dp. \quad (3.5.11)$$

Применяя полученные выражения, преобразуем:

$$\begin{aligned} & d_{r'}(p') c_r(p) \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\alpha \times \\ & \times \dot{\psi}(x) \dot{\bar{\psi}}(x') \gamma_\beta \psi^{(-)}(x') = \\ & = d_{r'}(p') c_r(p) \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\alpha \times \\ & \times \dot{\psi}(x) \dot{\bar{\psi}}(x') \gamma_\beta d_{r'}(p') \psi^{(-)}(x') = \\ & = \left(-\bar{\psi}^{(-)} c_r(p) + N_p \bar{u}^r(p) e^{-ipx} \right) \gamma_\alpha \times \\ & \times \dot{\psi}(x) \dot{\bar{\psi}}(x') \gamma_\beta \left(-\psi^{(-)}(x') d_{r'}(p') + N_p u^{r'}(-p') e^{-ip'x'} \right). \end{aligned}$$

Подставляя (3.5.11) и учитывая, что действие операторов рождения на сопряжённый вектор вакуумного состояния даёт ноль, получим следующую комбинацию операторов с ненулевым вкладом в матричный элемент:

$$\begin{aligned} & N_p \bar{u}^r(p) e^{-ipx} \gamma_\alpha \frac{-1}{(2\pi)^4} \times \\ & \times \int \frac{\hat{p} + im}{p^2 + m^2} e^{ip(x-x')} dp \gamma_\beta N_{p'} u^{r'}(-p') e^{-ip'x'}. \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Поскольку (3.5.12) не содержит операторов, действующих на вакуумное состояние, то, с учётом нормировки вакуумного состояния на единицу, можно записать матричный элемент в виде

$$\begin{aligned}
\langle f | S^{(2)} | i \rangle = & - \int N_p \bar{u}^r(p) e^{-ipx} (-ie\gamma_\alpha) \times \\
& \times \frac{-1}{(2\pi)^4} \frac{\hat{p} + im}{p^2 + m^2} e^{ip(x-x')} (-ie\gamma_\beta) \times \\
& \times N_{p'} u^{r'}(-p') e^{-ip'x'} \times \\
& \times N_k N_{k'} \left(e_\alpha^\lambda e_\beta^{\lambda'} e^{i(kx+k'x')} + e_\alpha^{\lambda'} e_\beta^\lambda e^{i(k'x+kx')} \right) dx dx' dp.
\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

Используя интегральное представление дельта-функции, проинтегрируем (3.5.13) по 4-координатам и получим матричный элемент в форме, позволяющей построить диаграмму Фейнмана:

$$\begin{aligned}
\langle f | S^{(2)} | i \rangle = & - \int N_k l_\alpha^\lambda N_{k'} l_\beta^{\lambda'} N_p \bar{u}^r(p) \times \\
& \times (-ie\gamma_\alpha) (2\pi)^4 \delta(p - p_- + k) \frac{-1}{(2\pi)^4} \frac{\hat{p} + im}{p^2 + m^2} \times \\
& \times (-ie\gamma_\beta) (2\pi)^4 \delta(p + p_+ - k') N_{p'} u^{r'}(-p') dp - \\
& - \int N_k l_\alpha^{\lambda'} N_{k'} l_\beta^\lambda N_p \bar{u}^r(p) \times \\
& \times (-ie\gamma_\alpha) (2\pi)^4 \delta(p - p_- + k') \frac{-1}{(2\pi)^4} \frac{\hat{p} + im}{p^2 + m^2} \times \\
& \times (-ie\gamma_\beta) (2\pi)^4 \delta(p + p_+ - k) N_{p'} u^{r'}(-p') dp.
\end{aligned} \tag{3.5.14}$$

Диаграмма рассматриваемого процесса во втором порядке теории возмущений приведена на рис. 8.

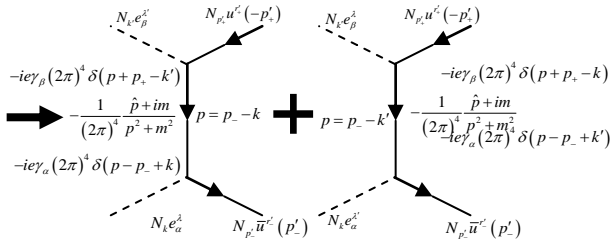


Рис. 8. Диаграмма Фейнмана для процесса образования электрон-позитронной пары двумя фотонами

Перейдём к вычислению сечения рассеяния во втором порядке. Проинтегрируем (3.5.14) по 4-импульсу с использованием свойств дельта-функции и получим

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle &= (2\pi)^4 N_k N_{k'} N_p N_{p'} e^2 \times \\ &\delta(p_+ + p_- - k - k') \bar{u}^r(p_-) \times \\ &\times \left(e_\alpha^\lambda \gamma_\alpha \frac{\hat{p}_- - \hat{k} + im}{p_-^2 + m^2} \gamma_\beta e_\beta^{\lambda'} + \right. \\ &\left. + e_\alpha^{\lambda'} \gamma_\alpha \frac{-\hat{p}_+ + \hat{k} + im}{p_+^2 + m^2} \gamma_\beta e_\beta^\lambda \right) u^{r'}(-p_+). \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Подставляя явный вид нормировочных множителей $N_k, N_{k'}, N_p, N_{p'}$ (см. (3.1.3)) и применяя обозначение (2.4.6) к векторам поляризации, перепишем матричный элемент процесса:

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle &= \frac{ie^2 (2\pi)^4}{4\sqrt{\omega\omega'\varepsilon_-\varepsilon_+}} \delta(k + k' - p_- - p_+) \times \\ &\times \bar{u}(p_-) \left(\hat{e}^{\lambda'} \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \varkappa_1} \hat{e}^\lambda + \hat{e}^\lambda \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2 \varkappa_2} \hat{e}^{\lambda'} \right) u(-p_+), \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} f_1 &= p_- - k' = -p_+ + k, \\ f_2 &= -p_+ + k' = p_- - k, \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

$$\begin{aligned} m^2 \varkappa_1 &= -2(p_+, k) = -2(p_-, k'), \\ m^2 \varkappa_2 &= -2(p_+, k') = -2(p_-, k). \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Напомним, что произведения 4-векторов и гамма-матриц обозначены как $\hat{f} = f_\alpha \gamma_\alpha$.

Как можно заметить, формально данный процесс не отличается от комптоновского рассеяния – матричный элемент последнего приводится к (3.5.16) заменами

$$\begin{aligned} p_1 &= -p_+, & p_2 &= p_-, \\ k_1 &= k, & k_2 &= -k'. \end{aligned}$$

Потому можно воспользоваться приведёнными выше результатами для эффекта Комптона. Дифференциальное сечение рассеяния для неполяризованных частиц:

$$\begin{aligned}
 d\sigma = & -\frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{1}{4kk'} \left[4 \left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2} \right)^2 - \right. \\
 & \left. -4 \left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2} \right) - \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_2} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \right) \right] \times \\
 & \times \delta(\vec{k} + \vec{k}' - \vec{p}_+ - \vec{p}_-) \delta(\omega + \omega' - \varepsilon_+ - \varepsilon_-) \frac{d^3 p_- d^3 p_+}{4\varepsilon_- \varepsilon_+}.
 \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

Переход к угловым переменным в системе центра инерции исходных фотонов, где выполняется ряд соотношений

$$\vec{k}' = -\vec{k}, \quad \vec{p}_+ = \vec{p}_-, \quad \omega = \omega' = \varepsilon_- = \varepsilon_+ = \omega_0, \quad (k, k') = 2\omega_0^2,$$

приводит к следующему выражению для сечения рассеяния:

$$\begin{aligned}
 d\sigma = & -\frac{r_0^2}{8} \frac{m^2 \sqrt{\omega_0^2 - m^2}}{\omega_0^3} \left[4 \left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2} \right)^2 - \right. \\
 & \left. -4 \left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2} \right) - \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_2} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \right) \right] d\Omega,
 \end{aligned} \tag{3.5.20}$$

здесь $d\Omega$ – элемент телесного угла, в котором находится позитрон. Выражая инварианты \varkappa_1, \varkappa_2 через угол θ между векторами \vec{k} и \vec{p}_+ :

$$\begin{aligned}
 m^2 \varkappa_1 = & -2(\vec{p}_+, \vec{k}) + 2\varepsilon_+ \omega = 2\omega_0 \left(\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - m^2} \cos\theta \right), \\
 m^2 \varkappa_2 = & -2(\vec{p}_-, \vec{k}) + 2\varepsilon_- \omega = 2(\vec{p}_+, \vec{k}) + 2\varepsilon_+ \omega = \\
 = & 2\omega_0 \left(\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 - m^2} \cos\theta \right),
 \end{aligned}$$

получим для дифференциального сечения выражение

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{8} \frac{m^2 \sqrt{\omega_0^2 - m^2}}{\omega_0^3} \left[\frac{2(\omega_0^2 - m^2)^2 \sin^2 \theta}{(m^2 \cos^2 \theta + \omega_0^2 \sin^2 \theta)^2} - \frac{2\omega_0^2 - m^2 + (\omega_0^2 - m^2) \sin^2 \theta}{m^2 \cos^2 \theta + \omega_0^2 \sin^2 \theta} \right] d\Omega. \quad (3.5.21)$$

Если произвести интегрирование по углам, то полное сечение образования электрон-позитронной пары двумя фотонами выразится формулой [4]

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{\gamma^2} \left[\left(2 + \frac{2}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma^4} \right) \ln \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) - \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \left(1 + \frac{1}{\gamma^2} \right) \right], \quad (3.5.22)$$

где обозначено $\gamma = \omega_0 / m$.

В ультрарелятивистском пределе $\gamma \gg 1$ сечение рассеяния убывает очень быстро, почти пропорционально квадрату энергии фотонов:

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{\gamma^2} (2 \ln 2\gamma - 1). \quad (3.5.23)$$

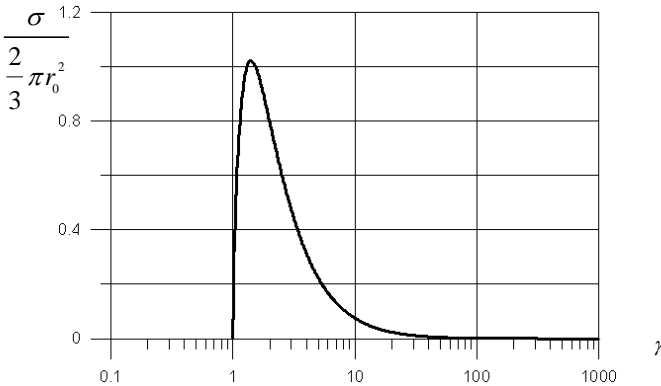


Рис. 9. Зависимость сечения образования электрон-позитронной пары от энергии фотонов

Хорошо видно, что параметр γ не может быть меньше единицы, в противном случае выражение для сечения теряет смысл. При $\gamma=1$ сечение, вычисленное по (3.5.22), в точности равно нулю. Это находится в полном соответствии с релятивистским соотношением между массой и энергией – при недостаточной энергии фотонов рождение пары массивных частиц становится невозможным. Вблизи предельного значения

$$\sigma = 3\pi r_0^2 (\gamma - 1). \quad (3.5.24)$$

График энергетической зависимости полного сечения во втором порядке теории возмущений изображён на рис. 9.

3.6. Аннигиляция электрон-позитронной пары в два фотона

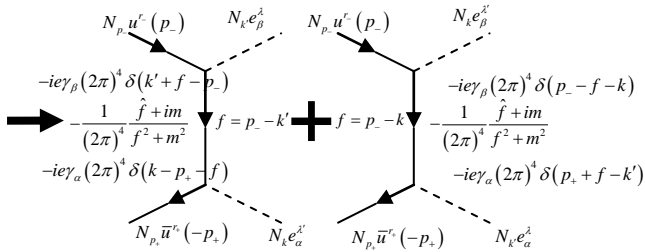


Рис. 10. Диаграмма Фейнмана двухфотонной аннигиляции электрона и позитрона во 2-м порядке

Не менее интересен и обратный предыдущему процесс аннигиляции пары частица–античастица. Рассмотрим наиболее простой и в то же время важный случай, когда свободные электрон и позитрон превращаются в пару фотонов. Диаграмма данного процесса практически совпадает с диаграммой рождения электрон-позитронной пары двумя фотонами. Матричный элемент во втором порядке имеет следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle &= \frac{ie^2 (2\pi)^4}{4\sqrt{\omega\omega'\varepsilon_-\varepsilon_+}} \delta(p_+ + p_- - k - k') \times \\ &\times \bar{u}(-p_+) \left(\hat{e} \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \varkappa_1} \hat{e}' + \hat{e}' \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2 \varkappa_2} \hat{e} \right) u(p_-), \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

где использованы обозначения (3.5.17), (3.5.18) предыдущего пункта. Диаграмма процесса показана на рис. 10.

Структура матрицы рассеяния при двухфотонной аннигиляции не отличается от матрицы эффекта Комптона (3.2.1) и получается из неё посредством замен:

$$\begin{aligned} p &= p_-, & p' &= -p_+, \\ k &= -k', & k' &= k. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Поэтому опустим подробные вычисления и используем результаты п. 3.4. Дифференциальное сечение аннигиляции неполяризованного электрона и позитрона даётся формулой

$$\begin{aligned} d\sigma &= -\frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{1}{4\sqrt{(p_-, p_+)^2 - m^4}} \times \\ &\times \left[4\left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2}\right) - \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_2} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right) \right] \times \\ &\times \delta(\vec{p}_+ + \vec{p}_- - \vec{k} - \vec{k}') \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega - \omega') \frac{d^3k d^3k'}{4\omega\omega'}. \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Далее удобно работать в системе центра масс исходной пары, где выполняется

$$\begin{aligned} \vec{p}_+ &= -\vec{p}_- \equiv \vec{p}_0, & \varepsilon_+ &= \varepsilon_- \equiv \varepsilon_0, \\ \vec{k}' &= -\vec{k}, & \omega &= \omega', & \sqrt{(p_-, p_+)^2 - m^4} &= 2\varepsilon_0 |\vec{p}_0|. \end{aligned}$$

Интегрируя по d^3k' и $d\omega$, переходим в сечении к угловым переменным:

$$\begin{aligned} d\sigma &= -\frac{r_0^2 m^2}{8p_0 \varepsilon_0} \left[4\left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2}\right) - \right. \\ &\left. - 4\left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2}\right) - \left(\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_2} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Элемент телесного угла $d\Omega$ соответствует направлению импульса фотона \vec{k} . Здесь и далее обозначено $p_0 = |\vec{p}_0|$. Используя выражения для инвариантов через угол θ между векторами \vec{p}_0 и \vec{k}

$$m^2 \varkappa_1 = -2(p_+, k) = 2(\vec{p}_0, \vec{k}) + 2\varepsilon_0 \omega = 2\varepsilon_0 (\varepsilon_0 + p_0 \cos \theta),$$

$$m^2 \varkappa_2 = -2(p_-, k) = -2(\vec{p}_0, \vec{k}) + 2\varepsilon_0 \omega = 2\varepsilon_0 (\varepsilon_0 - p_0 \cos \theta),$$

получим для дифференциального сечения рассеяния

$$d\sigma = \frac{r_0^2 m^2}{4\varepsilon_0 p_0} \left[\frac{\varepsilon_0^2 + p_0^2 + p_0^2 \sin^2 \theta}{\varepsilon_0^2 - p_0^2 \cos^2 \theta} - \frac{2p_0^4 \sin^4 \theta}{(\varepsilon_0^2 - p_0^2 \cos^2 \theta)^2} \right] d\Omega. \quad (3.6.5)$$

Удобным оказывается переход от импульса к скорости электрона и позитрона в системе центра масс. Приводя в (3.6.5) к общему знаменателю и раскрыв скобки, с учётом явного вида компонент 4-импульса частицы

$$\varepsilon_0 = \frac{m^2}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \vec{p}_0 = \frac{m\vec{v}_0}{\sqrt{1-v^2}}$$

получим

$$d\sigma = \frac{r_0^2 m^2}{4\varepsilon_0^2 v_0} \frac{(1 + 2v_0^2 \sin^2 \theta - v_0^4 (1 + \sin^4 \theta))}{(1 - v_0^2 \cos^2 \theta)^2} d\Omega.$$

Полное сечение аннигиляции вычисляется интегрированием по углам, однако, т.к. конечные фотоны неразличимы, то по азимутальному углу φ сразу следует интегрировать в пределах от 0 до π (что равнозначно усреднению по состояниям фотонов). Таким образом, имеем

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2 m^2}{4v_0 \varepsilon_0^2} \left[\frac{3 - v_0^4}{v_0} \ln \left(\frac{1 + v_0}{1 - v_0} \right) + 2(v_0^2 - 2) \right]. \quad (3.6.6)$$

Наконец, перейдём в систему отсчёта, связанную с электроном. Для этого достаточно выразить энергию и импульс в новой системе:

$$\varepsilon_0^2 = \frac{m(m + \varepsilon_+)}{2}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_+ - m}{\varepsilon_+ + m}},$$

где ε_+ – энергия позитрона в системе отсчёта покоящегося электрона. Подставляя эти выражения в (3.6.6), получим [4]

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{\gamma + 1} \left[\frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right], \quad (3.6.7)$$

где $\gamma = \varepsilon_+ / m$. Графическая зависимость сечения аннигиляции приведена на рис. 11.

При низкой энергии позитрона, т.е. $\gamma \rightarrow 1$, сечение рассеяния обратно пропорционально потоку (т.е. скорости частиц):

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{v_+}, \quad (3.6.8)$$

где v_+ – скорость позитрона. Вероятность аннигиляции при этом даётся простой формулой и не зависит от скорости пучка:

$$w = Z n v_+ \sigma = Z n \pi r_0^2, \quad (3.6.9)$$

где Z – зарядовое число ядер вещества мишени, n – концентрация атомов мишени. Данный результат становится неприменимым, когда скорость движения настолько мала, что оказывается существенным кулоновское взаимодействие частиц.

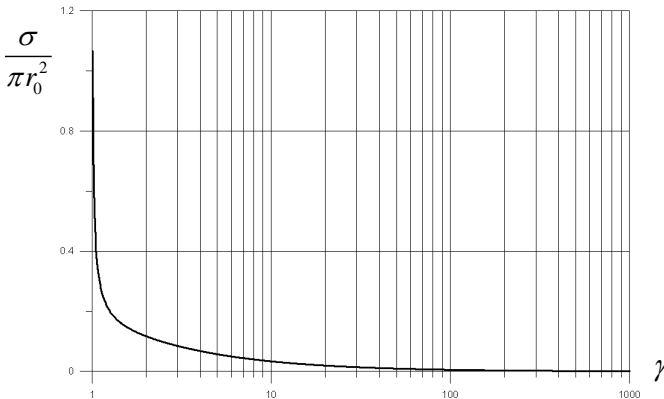


Рис. 11. Зависимость сечения аннигиляции электрон-позитронной пары от энергии частиц

В ультррелятивистском пределе $\gamma \gg 1$ формула полного сечения принимает вид

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{\gamma} (\ln 2\gamma - 1). \quad (3.6.10)$$

В реальности сечение аннигиляции за счёт электромагнитного взаимодействия быстро убывает по мере роста энергии частиц, и начинают преобладать механизмы слабого взаимодействия. Кроме того, при взаимодействии частиц с высокой энергией повышаются вероятности образования не двух, а трёх и более фотонов, формирования новых массивных частиц. Другой интересной особенностью процесса является тот факт, что при малой относительной скорости электрона и позитрона велика вероятность образования ими связанного состояния – так называемого *позитрония*, и аннигиляция происходит уже в процессе распада этого состояния [3].

Сравним сечения реакций аннигиляции и рассеяния позитрона на электроне. Для этого необходимо вычислить полное сечение процесса рассеяния. Интегрируя (3.4.7) по углам, получим

$$\sigma_s = \frac{\pi r_0^2}{16\gamma} \int_0^\pi \left(\frac{3 + \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta} \right)^2 \sin \theta d\theta. \quad (3.6.11)$$

Интеграл не зависит от энергии частиц, поэтому вероятность рассеяния определяется множителем перед ним. Сравнивая с выражением (3.6.10), мы видим, что сечение процесса аннигиляции оказывается больше благодаря логарифмическому множителю. Соответственно, аннигиляция преобладает над рассеянием.

4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ

4.1. Рассеяние фотона электроном

Перейдём к рассмотрению влияния на сечение рассеяния поляризационных состояний частиц в начальном и конечном состоянии. Как было показано выше (п. 2), формальный учёт поляризации сводится к замене в амплитуде рассеяния

билинейных комбинаций волновых функций частиц на соответствующие матрицы плотности.

Выполнение упомянутой замены приводит формулу для дифференциального сечения комптоновского рассеяния к виду

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\omega'^2}{m^2 \varkappa_1^2} \text{Sp} \left\{ A_{ab} \rho^{(1)} \rho_{aa'}^{(1)} \bar{A}_{a'b'} \rho_{bb'}^{(2)} \rho^{(2)} \right\} d\Omega, \quad (4.1.1)$$

где $\rho^{(1)}, \rho_{aa'}^{(1)}$ – матрицы плотности электрона и фотона в начальном состоянии, $\rho^{(2)}, \rho_{bb'}^{(2)}$ – матрицы плотности конечного состояния, и матрица перехода

$$A_{ab} = \hat{e}'_b \frac{\hat{f} + im}{m^2 \varkappa_1} \hat{e}_a + \hat{e}_a \frac{\hat{f}' + im}{m^2 \varkappa_2} \hat{e}'_b, \quad a, b = \overline{1, 2}.$$

4-векторы поляризации e, e' с нулевой временной компонентой ортогональны импульсам соответствующих фотонов k, k' . Их удобно выбрать в виде трёхмерных векторов поляризации:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{k} \times \vec{k}'}{|\vec{k} \times \vec{k}'|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{k} \times \vec{e}_1}{\omega}, \quad \vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}'_2 = \frac{\vec{k}' \times \vec{e}'_1}{\omega'}. \quad (4.1.2)$$

Матрица плотности электрона может быть выражена через вектор поляризации электрона в собственной системе отсчёта, а фотона – через параметры Стокса. Таким образом, непосредственно подставляя выражения (2.3.6), (2.4.20), получим, что дифференциальное сечение линейным образом зависит от каждого из векторов поляризации, хотя их компоненты входят в выражение для $d\sigma$ и в виде произведений. Общая структура дифференциального сечения получается следующей [2]:

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{r_0^2 \omega'^2}{2m^2 \varkappa_1^2} \left\{ F_0 + F_i \xi_i + F'_i \xi'_i + (\vec{G}, \vec{\zeta}) + (\vec{G}', \vec{\zeta}') + \right. \\ \left. + F_{ij} \xi_i \xi'_j + G_{ij} \zeta_i \zeta'_j + (\vec{f}_i, \xi_i \vec{\zeta}) + (\vec{f}'_i, \xi'_i \vec{\zeta}') + \right. \\ \left. + (\vec{g}_i, \xi_i \vec{\zeta}) + (\vec{g}'_i, \xi'_i \vec{\zeta}') + \dots \right\} d\Omega, \quad (4.1.3) \end{aligned}$$

где суммирование ведётся по индексам от 1 до 3. Здесь приведены лишь слагаемые, содержащие произведения не более двух поляризационных параметров, т.к. они несущественны в

случаях, когда поляризационные параметры двух других частиц равны нулю. Опуская подробное вычисление возникающих здесь шпуров, приведём конечный результат для фигурирующих в (4.1.3) коэффициентов:

$$F_0 = \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \theta, \quad (4.1.4)$$

$$F_1 = F_2 = 0, \quad F_3 = \sin^2 \theta, \quad F'_i = F_i, \quad (4.1.5)$$

$$\vec{G} = \vec{G}' = 0, \quad (4.1.6)$$

$$F_{11} = 2 \cos \theta,$$

$$F_{22} = \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} \right) \cos \theta, \quad (4.1.7)$$

$$F_{33} = 1 + \cos^2 \theta,$$

$$F_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\vec{f}_1 = \vec{f}_3 = \vec{f}'_1 = \vec{f}'_3 = 0,$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{1}{m}(1 - \cos \theta)(\vec{k} \cos \theta + \vec{k}'), \quad (4.1.8)$$

$$\vec{f}'_2 = -\frac{1}{m}(1 - \cos \theta)(\vec{k}' \cos \theta + \vec{k}),$$

$$\vec{g}_1 = \vec{g}_3 = \vec{g}'_1 = \vec{g}'_3 = 0,$$

$$\vec{g}_2 = -\frac{1}{m}(1 - \cos \theta) \times$$

$$\times \left(\vec{k} \cos \theta + \vec{k}' - (1 - \cos \theta) \frac{\omega + \omega'}{\omega - \omega' + 2m} (\vec{k} - \vec{k}') \right), \quad (4.1.9)$$

$$\vec{g}'_2 = -\frac{1}{m}(1 - \cos \theta) \times$$

$$\times \left(\vec{k}' \cos \theta + \vec{k} - (1 - \cos \theta) \frac{\omega + \omega'}{\omega - \omega' + 2m} (\vec{k} - \vec{k}') \right).$$

Вполне очевидно, что при равенстве всех поляризационных параметров нулю результат приводится к полученному ранее для полностью неполяризованных частиц.

Проанализируем некоторые частные случаи. Положим в (4.1.3) $\xi'_i = 0$, $\zeta'_i = 0$, $\xi'_3 = 0$. Тогда, выполнив суммирование по поляризациям конечного состояния (что равнозначно умножению (4.1.3) на 4), получим дифференциальное сечение рассеяния поляризованных фотонов на неполяризованных электронах. Получается следующее:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - (1 - \xi_3) \sin^2 \theta \right) d\Omega. \quad (4.1.10)$$

Видно, что сечение рассеяния фотона, поляризованного перпендикулярно плоскости рассеяния (т.е. $\xi_3 = 1$), больше, чем сечение поляризованного в плоскости рассеяния ($\xi_3 = -1$). В то же время круговая поляризация на сечение не влияет.

Подобным образом записывается и сечение рассеяния неполяризованных фотонов с образованием поляризованного. Данный случай реализуется при $\xi'_i \neq 0$ и равенстве нулю всех остальных поляризационных параметров. С учётом суммирования по поляризациям электрона в конечном состоянии получится

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - (1 - \xi'_3) \sin^2 \theta \right) d\Omega. \quad (4.1.11)$$

Если считать, что фотон поляризован как в начальном, так и в конечном состоянии, то дифференциальное сечение имеет следующий вид:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(F_0 + F_3 (\xi_3 + \xi'_3) + F_{11} \xi_1 \xi'_1 + F_{22} \xi_2 \xi'_2 + F_{33} \xi_3 \xi'_3 \right) d\Omega. \quad (4.1.12)$$

Из данного выражения можно найти параметры Стокса для конечного состояния фотона. Согласно (2.6.8), они равны отношению коэффициентов при ξ'_i к слагаемому, не содержащему компоненты этого вектора, и, таким образом, определяются через поляризационные параметры исходного фотона:

$$\begin{aligned}
\xi'_1 &= \frac{F_{11}\xi_1}{F_0 + F_3\xi_3}, \\
\xi'_2 &= \frac{F_{22}\xi_2}{F_0 + F_3\xi_3}, \\
\xi'_3 &= \frac{F_3 + F_{33}\xi_3}{F_0 + F_3\xi_3}.
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

В частности, положив начальное состояние неполяризованным ($\xi_i = 0$ для всех i), видим, что фотон частично поляризуется при рассеянии:

$$\begin{aligned}
\xi'_1 &= \xi'_2 = 0, \\
\xi'_3 &= \frac{\sin^2 \theta}{\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \theta} > 0.
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Конечное состояние фотона поляризовано перпендикулярно плоскости рассеяния. Образование фотона с круговой поляризацией становится возможным только при наличии круговой поляризации исходного состояния.

Рассмотрим ещё одну возможность, когда исходный фотон полностью линейно поляризован ($\xi_1^2 + \xi_3^2 = 1$, $\xi_2 = 0$), и рассеянный фотон также обладает линейной поляризацией. Опуская вычисления, приведём только конечную формулу для дифференциального сечения рассеяния линейно поляризованного фотона на неподвижном электроде:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4 \cos^2 \Theta \right) d\Omega, \tag{4.1.15}$$

где Θ – угол между направлениями поляризации исходного и конечного фотона.

Возможны два основных предельных случая – когда векторы поляризации фотонов перпендикулярны и когда они лежат в одной плоскости. В первом случае, для нерелятивистского предела ($\omega \ll m$, $\omega' \approx \omega$) результаты совпадают с классической теорией:

$$d\sigma_{\perp} = 0, \quad d\sigma_{\parallel} = r_0^2 \cos^2 \Theta d\Omega. \tag{4.1.16}$$

В ультрарелятивистском случае важно отличать случаи больших и малых углов рассеяния. При рассеянии на малые углы ($\theta^2 \ll m/\omega$) результат совпадает с (4.1.16). В области больших углов отличие в линейной поляризации фотонов оказывается несущественным, и сечения

$$d\sigma_{\perp} = d\sigma_{\parallel} = \frac{r_0^2}{4} \frac{\omega'}{\omega} d\Omega = \frac{r_0^2}{4} \frac{m}{\omega(1-\cos\theta)} d\Omega. \quad (4.1.17)$$

Конечно, этот результат не относится к фотонам с круговой поляризацией – для них соответствующий параметр Стокса пропорционален косинусу угла рассеяния:

$$\xi'_2 \approx \xi_2 \cos\theta. \quad (4.1.18)$$

Учёт поляризации электронов более громоздок. Укажем лишь некоторые особенности. В частности, при рассеянии неполяризованных фотонов поляризованным электроном конечное состояние электрона не поляризуется. Это происходит только в случае, когда фотон обладает круговой поляризацией, а вектор поляризации электрона при этом лежит в плоскости рассеяния.

4.2. Двухфотонная аннигиляция электрон-позитронных пар

Не останавливаясь подробно на применении описанной выше методики (п. 2.4) к вычислению сечения рассеяния, рассмотрим некоторые результаты.

Дифференциальное сечение аннигиляции неполяризованной пары с образованием двух линейно поляризованных фотонов имеет следующий вид [2]:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{8} \frac{m^2}{v_0 \varepsilon_0^2} \left\{ \frac{1}{1-v_0^2 \cos^2 \theta} \left[1 - (1-v_0^2 \cos^2 \theta)(\vec{e}, \vec{e}')^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 4(\vec{v}_0, \vec{e})(\vec{v}_0, \vec{e}')(\vec{e}, \vec{e}') \right] - \frac{4(\vec{v}_0, \vec{e})^2 (\vec{v}_0, \vec{e}')^2}{(1-v_0^2 \cos^2 \theta)^2} \right\} d\Omega, \quad (4.2.1)$$

где ε_0, \vec{v}_0 – энергия и скорость позитрона, θ – угол между направлением импульса позитрона и фотона в системе центра масс, \vec{e}, \vec{e}' – трёхмерные векторы поляризации фотонов. Вектор

\vec{e} лежит в плоскости аннигиляции, определяемой векторами \vec{p}_0 , \vec{k} , а вектор \vec{e}' ортогонален ей. При малой скорости позитрона образуются фотоны, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях, что следует из фундаментального закона сохранения чётности.

В случае, когда векторы поляризации электрона и позитрона имеют ненулевые компоненты только вдоль их относительной скорости (обозначим их далее как ζ_3^-, ζ_3^+), дифференциальное сечение следующее:

$$d\sigma = d\sigma_0 (1 + \zeta_3^- \zeta_3^+ f). \quad (4.2.2)$$

Здесь и далее $d\sigma_0$ означает дифференциальное сечение реакции с полностью неполяризованными частицами (3.6.5). Для краткости введено обозначение

$$f = \frac{v_0^2 (1 - \cos^4 \theta) - 1 + v_0^4 - v_0^2 (1 - v_0^2) \sin^2 \theta}{v_0^2 (1 - \cos^4 \theta) + 1 - v_0^4 + v_0^2 (1 - v_0^2) \sin^2 \theta}. \quad (4.2.3)$$

Интегрируя по углам, можно получить выражение для полного сечения:

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \zeta_3^- \zeta_3^+ F), \quad (4.2.4)$$

где σ_0 – полное сечение для неполяризованных частиц (3.6.6), а F определяется скоростью позитрона:

$$F = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}. \quad (4.2.5)$$

Сечение реакции в плоскости \vec{p}_0 , \vec{k} :

$$\sigma_1 = \frac{3 + v_0^4}{2v_0^3} \ln \left(\frac{1 + v_0}{1 - v_0} \right) - \frac{3 + v_0^2}{v_0^2},$$

а в ортогональной ей:

$$\sigma_2 = \frac{3 - 3v_0^2 + 2v_0^4}{v_0^2} + \frac{1 - v_0^2}{2v_0^3} (2v_0^4 + 3v_0^2 - 3) \ln \left(\frac{1 + v_0}{1 - v_0} \right).$$

Величина F в системе отсчёта, связанной с электроном, изменяется в пределах от -1 при малых энергиях позитрона до $+1$ в ультррелятивистском случае.

Если поляризована только одна частица из пары, то сечение аннигиляции оказывается не зависящим от поляризации и совпадает с (3.6.5). Конечные фотоны в таком процессе обладают круговыми поляризациями, определяемыми следующим выражением:

$$\xi_2 = 2 \frac{v_0 - v_0^2 \frac{\varepsilon_0^2}{m^2} \sin^2 \theta \cos \theta}{1 + v_0^2 + v_0^2 \frac{\varepsilon_0^2}{m^2} \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) + v_0^2 \sin^2 \theta} \zeta_3. \quad (4.2.6)$$

4.3. Поляризационные эффекты при рассеянии электронов

При рассеянии изначально неполяризованного пучка электронов поляризация возникает только на поляризованной мишени. Аналогичный эффект имеет место и при рассеянии электрона во внешнем поле. При этом сечение рассеяния отличается от результата (3.3.20) для неполяризованных электронов, только когда изначально поляризованы и налетающие частицы, и мишень.

Здесь приведём только некоторые известные результаты для дифференциальных сечений рассеяния электрона на электроне.

Для ситуации, когда в начальном состоянии оба электрона поляризованы, а в конечном – нет, в нерелятивистском пределе получается [2]

$$d\sigma = d\sigma_0 \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} (\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2) \right), \quad (4.3.1)$$

а в ультрарелятивистском пределе:

$$d\sigma = d\sigma_0 \left(1 + \frac{\sin^4 \theta}{(3 + \cos^2 \theta)^2} |\vec{\zeta}_1| |\vec{\zeta}_2| \cos(\varphi_0 + 2\varphi) \right), \quad (4.3.2)$$

где φ_0 – угол между трёхмерными векторами поляризации электронов, φ – угол между вектором поляризации и трёхмерным импульсом первого электрона.

Аналогичный результат получается при упругом рассеянии позитрона на электроне в ультрарелятивистском пределе:

$$d\sigma = d\sigma_0 \left(1 - \frac{\sin^4 \theta}{(3 + \cos^2 \theta)^2} \left| \vec{\zeta}_+ \right| \left| \vec{\zeta}_- \right| \cos(\varphi_0 + 2\varphi) \right). \quad (4.3.3)$$

В пределе малых скоростей частиц зависимость от поляризации отсутствует (т.е. $d\sigma = d\sigma_0$), что связано с различием структуры спинорных амплитуд электрона и позитрона.

5. КРОСС-ИНВАРИАНТНОСТЬ: ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

5.1. Кинематические инварианты

Ранее мы видели, что фейнмановские диаграммы разного рода реакций могут быть получены друг из друга простыми заменами знаков 4-импульсов и зарядов частиц. Рассмотрим некоторые кинематические соотношения для парных процессов рассеяния, где в начальном и конечном состоянии имеется только по две частицы. Эти соотношения являются следствием самых общих законов сохранения и потому не привязаны к конкретным реакциям и частицам.

Обратим внимание, что в текущем разделе для большего удобства мы будем пользоваться не координатами Минковского $\{x, y, z, ict\}$, как ранее, а координатами $\{x, y, z, ct\}$ и метрикой Фейнмана [1, 3]. Другими словами, 4-импульсы имеют компоненты $p = \{\vec{p}; \varepsilon\}$, а соотношение (2.4.9) переписывается в форме

$$\vec{p}^2 + \varepsilon^2 = p^2 = m^2. \quad (5.1.1)$$

Тем не менее различать ко- и контравариантные индексы в данном разделе не понадобится, т.к. все рассматриваемые ниже величины – скаляры. Удобство здесь проявляется, прежде всего, в действительности временных компонент 4-векторов и отсутствии необходимости дополнительно учитывать знаки от мнимых единиц в тех или иных соотношениях.

Закон сохранения 4-импульса в самом общем виде запишется так:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0. \quad (5.1.2)$$

Здесь не указано, какие именно импульсы принадлежат к исходному, а какие – конечному состоянию. Можно лишь сказать, что для двух импульсов временная компонента положительная, а для двух других – отрицательная. Помимо 4-импульса, сохраняются и другие величины, в частности электрический заряд.

При конкретно заданных видах участвующих в реакции частиц квадраты 4-векторов импульса q_a являются квадратами масс соответствующих частиц (5.1.1):

$$q_a^2 = m_a^2.$$

В зависимости от знаков временных компонент и знаков заряда получаются три различные реакции. Для определённости примем, что 1 и 2 – частицы в исходном состоянии, а 3 и 4 – в конечном. Перенос частицы из левой части реакции в правую и наоборот приводит к смене знака 4-импульса и заряда. Таким образом, частица переходит в античастицу. При выполнении условия $q_{1;4} > 0$, $q_{2;4} > 0$, $q_{3;4} < 0$, $q_{4;4} < 0$ получаем процесс

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4. \quad (5.1.3)$$

При $q_{1;4} > 0$, $q_{2;4} < 0$, $q_{3;4} > 0$, $q_{4;4} < 0$ осуществляется реакция

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4. \quad (5.1.4)$$

Наконец, при $q_{1;4} > 0$, $q_{2;4} < 0$, $q_{3;4} < 0$, $q_{4;4} > 0$ – реакция

$$1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3. \quad (5.1.5)$$

Черта над цифрой обозначает античастицу. Кроме перечисленных, законами сохранения импульса и заряда не запрещаются и обратные реакции.

О трёх перечисленных процессах принято говорить как о перекрёстных каналах (или *кросс-каналах*) одной обобщённой реакции. Например, если частицы 1 и 3 являются электронами, а 2 и 4 – фотонами, то каналы (5.1.3) и (5.1.5) описывают комптоновское рассеяние (фотон является истинно нейтральным и не имеет античастицы), а (5.1.4) отвечает двухфотонной аннигиляции электрон-позитронной пары. В случае если все

частицы – электроны, канал (5.1.3) даёт рассеяние электрона на электроне, а (5.1.4) и (5.1.5) – позитрона на электроне.

При рассмотрении процессов рассеяния важную роль играют кинематические инварианты – скалярные величины, которые можно составить из 4-импульсов. Амплитуды рассеяния могут быть сведены к функциям, зависящим только от инвариантов. Принято вводить набор трёх инвариантов, иногда называемых *переменными Мандельштама* (Mandelstam, 1958) [3]:

$$s = (q_1 + q_2)^2 = (q_3 + q_4)^2, \quad (5.1.6)$$

$$t = (q_1 + q_3)^2 = (q_2 + q_4)^2, \quad (5.1.7)$$

$$s = (q_1 + q_4)^2 = (q_2 + q_3)^2. \quad (5.1.8)$$

Вычислим их сумму. Перенесём q_1 в (5.1.2) вправо и возведём равенство в квадрат:

$$(q_2 + q_3 + q_4)^2 = q_1^2 = m_1^2.$$

Раскрывая скобки и заменяя квадраты 4-импульсов квадратами масс, получим соотношение для произведений 4-импульсов частиц:

$$q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + 2(q_2, q_3) + 2(q_2, q_4) + 2(q_3, q_4) = m_1^2. \quad (5.1.9)$$

Возводя теперь в квадрат неизменённый закон сохранения (5.1.2), получим

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + 2(q_1, q_2) + 2(q_1, q_3) + \\ + 2(q_1, q_4) + 2(q_2, q_3) + 2(q_2, q_4) + 2(q_3, q_4) = 0.$$

Используя здесь (5.1.9), находим значение для суммы скалярных произведений 4-импульсов:

$$(q_1, q_2) + (q_1, q_3) + (q_1, q_4) = -m_1^2. \quad (5.1.10)$$

Теперь, непосредственно суммируя инварианты, получаем

$$s + t + u = 3q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + 2((q_1, q_2) + (q_1, q_3) + (q_1, q_4)) = \\ = 2m_1^2 + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) - 2m_1^2.$$

Таким образом, сумма кинематических инвариантов равна следующему:

$$s + t + u = h = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \quad (5.1.11)$$

Установим физический смысл инвариантов. Рассмотрим реакцию (5.1.3) в системе центра инерции. В ней выполняется

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0,$$

потому инвариант s равен квадрату полной энергии сталкивающихся частиц 1 и 2:

$$s = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2. \quad (5.1.12)$$

Аналогичный смысл получается для инварианта t при рассмотрении канала (5.1.4) и для u – в канале (5.1.5). Соответственно, каналы реакций называются s -, t - и u -каналами. Все инварианты могут быть выражены через энергии и импульсы частиц, участвующих в процессах.

Переход между различными кросс-каналами формально осуществляется простыми переобозначениями. Для перехода от s -канала к t необходимо произвести замену $s \rightarrow t$, $2 \rightarrow 3$; к u -каналу – замену $s \rightarrow u$, $2 \rightarrow 4$. Справедливы и обратные замены.

5.2. Физические области

При рассмотрении амплитуды рассеяния в терминах переменных s , t , u следует учитывать, что существуют физически допустимые и недопустимые области их значений. Те значения переменных Мандельштама, которые могут отвечать реальному физическому процессу рассеяния, должны удовлетворять законам сохранения и его следствиям, а также релятивистскому соотношению между массой и энергией (5.1.1).

Вполне очевидно, что для скалярного произведения двух 4-импульсов выполняется

$$(p_a \cdot p_b) \geq m_a m_b. \quad (5.2.1)$$

Поэтому, при одинаковых знаках 4-импульсов $q_a = p_a$, $q_b = p_b$ (или $q_a = -p_a$, $q_b = -p_b$)

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a + p_b)^2 \geq (m_a + m_b)^2, \quad (5.2.2)$$

а при различных (или $q_a = p_a$, $q_b = -p_b$)

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a - p_b)^2 \geq (m_a - m_b)^2. \quad (5.2.3)$$

Исходя из формул (5.1.6)–(5.1.8), получаем соотношения для s -канала реакции:

$$s \geq (m_1 + m_2)^2, \quad s \geq (m_3 + m_4)^2, \quad (5.2.4)$$

$$t \leq (m_1 - m_3)^2, \quad t \leq (m_2 - m_4)^2, \quad (5.2.5)$$

$$u \leq (m_1 - m_4)^2, \quad u \leq (m_2 - m_3)^2. \quad (5.2.6)$$

В t -, u -каналах, с учётом переобозначения переменных и номеров частиц, получаются аналогичные соотношения.

Чтобы найти остальные условия, введём 4-вектор, дуальный произведению любых трёх 4-импульсов q_a . Например:

$$L_\lambda = \varepsilon_{\lambda\nu\rho} q_{1\nu} q_{2\nu} q_{3\rho}. \quad (5.2.7)$$

При рассмотрении в собственной системе отсчёта одной из частиц выполняется $q_1 = (0; q_{14})$, и в силу свойств символа Леви-Чивиты вектор L включает только пространственные компоненты:

$$L_i = \varepsilon_{i0jk} q_{10} q_{2j} q_{3k},$$

являясь пространственно-подобным вектором – в любой системе отсчёта $L^2 \leq 0$. Расписывая квадрат L^2 , получим условие для 4-импульсов:

$$\begin{vmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_2 q_1 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3^2 \end{vmatrix} \geq 0. \quad (5.2.8)$$

Раскрыв определитель, можно выразить это условие через кинематические инварианты. Его вид будет единым для всех кросс-каналов обобщённой реакции:

$$stu \geq as + bt + cu, \quad (5.2.9)$$

где

$$ah = (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2),$$

$$bh = (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2),$$

$$ch = (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2).$$

Физически допустимые области принято изображать на плоскости Мандельштама с использованием треугольных координат (рис. 12). Координатными осями являются прямые,

образующие равносторонний треугольник. Координаты s , t , u отсчитываются в направлениях, перпендикулярных осям, и положительным принимается направление внутрь треугольника (указано стрелками). Высота треугольника равна h , чем удовлетворяется условие (5.1.11).

Рассмотрим случай, когда s -каналу отвечает упругое рассеяние. Массы частиц при этом попарно равны:

$$m_1 = m_3 \equiv m, \quad m_2 = m_4 \equiv \mu.$$

При $m > \mu$ в (5.2.9) находим:

$$h = 2(m^2 + \mu^2), \quad a = c = 0, \quad b = (m^2 - \mu^2)^2,$$

и

$$stu \geq (m^2 - \mu^2)^2 t. \quad (5.2.10)$$

Полученное неравенство задаёт область, ограниченную прямой $t = 0$ и гиперболой

$$su \geq (m^2 - \mu^2)^2. \quad (5.2.11)$$

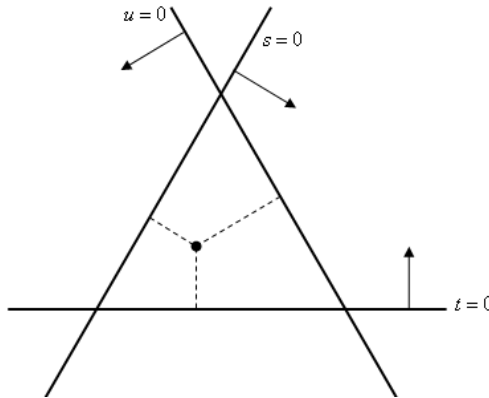


Рис. 12. Плоскость Мандельштама

Ветви этой гиперболы лежат в секторах $s > 0$, $u > 0$ и $s < 0$, $u < 0$, асимптотами являются оси $s = 0$, $u = 0$. Выражение (5.2.10) может быть записано в форме системы неравенств:

$$\begin{aligned}
 t > 0, \quad su > (m^2 - \mu^2)^2, \\
 t < 0, \quad su < (m^2 - \mu^2)^2.
 \end{aligned}
 \tag{5.2.12}$$

Также необходимо учесть условия (5.2.4), (5.2.6). В итоге s , t , u -каналам соответствуют области, заштрихованные на рис. 13:

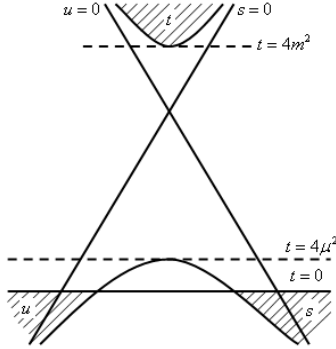


Рис. 13. Физические области упругого рассеяния

При рассеянии фотонов $\mu=0$, и картина физических областей такова:

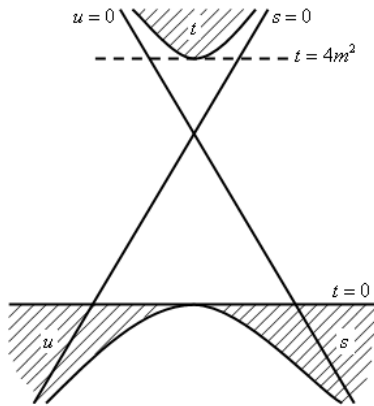


Рис. 14. Физические области упругого рассеяния фотонов

В процессе рассеяния частиц одинаковой массы $t = \mu$:

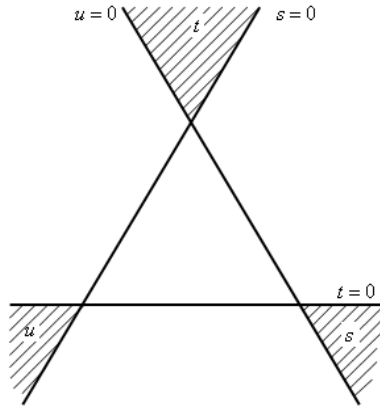


Рис. 15. Физические области упругого рассеяния частиц равной массы

В общем случае границы физических областей определяются равенством в (5.2.9) и представляют некоторую кривую третьего порядка.

Кроме того, интересен случай распада массивной частицы, когда $m_1 > m_2 + m_3 + m_4$. При таком условии реализуется дополнительный канал обобщённой реакции:

$$1 \rightarrow \bar{2} + 3 + 4. \quad (5.2.13)$$

В собственной системе отсчёта распадающейся частицы выполняется:

$$\begin{aligned} q_1 &= \{0, m_1\}, \\ q_2 &= \{-\vec{p}_2, -\varepsilon_2\}, \\ q_3 &= \{-\vec{p}_3, -\varepsilon_3\}, \\ q_4 &= \{-\vec{p}_4, -\varepsilon_4\}, \\ \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 &= m_1, \\ \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 &= 0. \end{aligned}$$

Вычислим кинематические инварианты (непосредственно по определению):

$$\begin{aligned} s &= m_1^2 + m_2^2 - 2m_1\varepsilon_2 = m_3^2 + m_4^2 + 2m_3m_4, \\ t &= m_1^2 + m_3^2 - 2m_1\varepsilon_3 = m_2^2 + m_4^2 + 2m_2m_4, \\ u &= m_1^2 + m_4^2 - 2m_1\varepsilon_4 = m_2^2 + m_3^2 + 2m_3m_4. \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Из соотношения (5.2.1) следуют неравенства:

$$\begin{aligned}(m_3 + m_4)^2 &\leq s \leq (m_1 - m_2)^2, \\(m_2 + m_4)^2 &\leq t \leq (m_1 - m_3)^2, \\(m_2 + m_3)^2 &\leq u \leq (m_1 - m_4)^2.\end{aligned}\tag{5.2.15}$$

Как видно, все три инварианта положительны, и физическая область целиком лежит внутри треугольника на плоскости Мандельштама. Подробно рассматривать решение данной задачи мы не будем, отметим только, что уравнение (5.2.9) применительно к распаду тяжёлой частицы на три более лёгких даёт замкнутую границу физической области в центре плоскости [3].

5.3. Сечения рассеяния в переменных Мандельштама

Рассмотрим полученные ранее формулы для сечений рассеяния с использованием кинематических инвариантов.

Для процесса рассеяния электрона на электроне инварианты определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}s &= (p_1 + p_2)^2 = 2(m^2 + (p_1, p_2)), \\t &= (p_1 - p'_1)^2 = 2(m^2 - (p_1, p'_1)), \\u &= (p_1 - p'_2)^2 = 2(m^2 - (p_1, p'_2)), \\s + t + u &= 4m^2.\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

Дифференциальное сечение (3.3.6) может быть представлено в виде [3]

$$\begin{aligned}d\sigma &= \frac{4\pi e^4}{s(s - 4m^2)} \{ f(t, u) + g(t, u) + \\&+ f(u, t) + g(u, t) \} dt,\end{aligned}\tag{5.3.2}$$

где функции f, g являются комбинациями шпуров вида (3.3.8), (3.3.9) соответственно. Результат их вычисления записывается через инварианты:

$$f(t, u) = \frac{1}{t^2} \left[\frac{s^2 + u^2}{2} + 4m^2(t - m^2) \right],$$

$$g(t, u) = \frac{2}{tu} \left(\frac{s}{2} - m^2 \right) \left(\frac{s}{2} - 3m^2 \right).$$
(5.3.3)

Тогда для дифференциального сечения имеем

$$d\sigma = \frac{4\pi}{s(s-4m^2)} \left\{ \frac{1}{t^2} \left[\frac{s^2 + u^2}{2} + 4m^2(t - m^2) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{u^2} \left[\frac{s^2 + t^2}{2} + 4m^2(u - m^2) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{tu} \left(\frac{s}{2} - m^2 \right) \left(\frac{s}{2} - 3m^2 \right) \right\} dt.$$
(5.3.4)

Переходя в систему центра инерции, где

$$s = 4\varepsilon^2, \quad t = -4\vec{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad u = -4\vec{p}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$-dt = -2\vec{p}^2 d \cos \theta = \frac{\vec{p}^2}{\pi} d\Omega,$$
(5.3.5)

можно свести результат к (3.3.20).

При рассеянии позитронов квадрат амплитуды рассеяния не изменяется, и переход к данной реакции формально сводится к замене $s \rightarrow u$ в знаменателе. Кинематические инварианты при этом имеют следующий вид:

$$s = (p_- - p'_+)^2, \quad t = (p_+ - p'_+)^2, \quad u = (p_- + p_+)^2, \quad (5.3.6)$$

в соответствии с заменой импульсов (3.4.1), (3.4.2). Рассеяние позитрона на электроне является u -каналом обобщённой реакции, где s -канал – рассеяние электрона на электроне.

Таким образом, вместо (5.3.4) получаем

$$\begin{aligned}
d\sigma = & \frac{4\pi}{u(u-4m^2)} \left\{ \frac{1}{t^2} \left[\frac{s^2+u^2}{2} + 4m^2(t-m^2) \right] + \right. \\
& + \frac{1}{u^2} \left[\frac{s^2+t^2}{2} + 4m^2(u-m^2) \right] + \\
& \left. + \frac{4}{tu} \left(\frac{s}{2} - m^2 \right) \left(\frac{s}{2} - 3m^2 \right) \right\} dt.
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

В системе центра инерции значения переменных Манделъштама также отличаются от предыдущего случая заменой $s \rightarrow u$, и окончательный результат совпадает с (3.4.5).

Теперь рассмотрим реакции с участием фотонов и электронов. Запишем кинематические инварианты для эффекта Комптона:

$$\begin{aligned}
s &= (p+k)^2 = (p'+k')^2 = \\
&= m^2 + 2(p,k) = m^2 + 2(p',k'), \\
t &= (p-p')^2 = (k-k')^2 = \\
&= 2(m^2 - (p,p')) = -2(k,k'), \\
u &= (p-k')^2 = (p'-k)^2 = \\
&= m^2 - 2(p,k') = m^2 - 2(p',k), \\
s+t+u &= 2m^2.
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

При их использовании, выражение для сечения рассеяния (3.2.11) принимает форму

$$\begin{aligned}
d\sigma = & \frac{\pi e^4}{(s-m^2)^2} \left\{ f(s,u) + g(s,u) + \right. \\
& \left. + f(u,s) + g(u,s) \right\} dt,
\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

где функции кинематических инвариантов содержат шпуры из (3.2.14):

$$\begin{aligned}
f(s,u) &= \frac{1}{4(s-m^2)^2} \times \\
&\times \text{Sp} \left\{ (\hat{p}' + m) \gamma_\mu (\hat{f} + m) \gamma_\nu \times \right. \\
&\quad \left. \times (\hat{p}' + m) \gamma_\nu (\hat{f} + m) \gamma_\mu \right\}, \\
g(s,u) &= \frac{1}{4(s-m^2)(u-m^2)} \times \\
&\times \text{Sp} \left\{ (\hat{p}' + m) \gamma_\mu (\hat{f} + m) \gamma_\nu \times \right. \\
&\quad \left. \times (\hat{p}' + m) \gamma_\nu (\hat{f}' + m) \gamma_\mu \right\}.
\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Их вычисление даёт

$$\begin{aligned}
f(s,u) &= \frac{2}{(s-m^2)^2} \left\{ 4m^4 - \right. \\
&\quad \left. - (s-m^2)(u-m^2) + 2m^2(s-m^2) \right\},
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

$$\begin{aligned}
g(s,u) &= \frac{2m^2}{(s-m^2)(u-m^2)} \times \\
&\quad \times \left\{ 4m^2 + (s-m^2) + (u-m^2) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

В итоге, для дифференциального сечения

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{8\pi e^4}{(s-m^2)^2} \left\{ \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{s-m^2}{u-m^2} + \frac{u-m^2}{s-m^2} \right) \right\} dt.
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Окончательные результаты получаются подстановкой значений инвариантов в конкретных системах отсчёта. В частности, в лабораторной системе, где электрон покоится до столкновения, выполняются соотношения

$$s-m^2 = 2m\omega, \quad u-m^2 = -2m\omega', \tag{5.3.14}$$

и их использование в совокупности с переходом к угловым переменным приводит к формуле Клейна–Нишины (3.2.31).

Описанное выше комптоновское рассеяние является s -каналом обобщённой реакции с участием фотона и электрона. Рассмотрим теперь двухфотонную аннигиляцию электрона и позитрона. Замена импульсов частиц (3.6.2) приводит к следующим кинематическим инвариантам:

$$\begin{aligned} s &= (p_- - k_1)^2, \\ t &= (p_- + p_+)^2 = (k_1 + k_2)^2, \\ u &= (p_- - k_2)^2. \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

Таким образом, аннигиляция является t -каналом реакции.

Квадрат амплитуды рассеяния формально не изменяет своего вида (меняется лишь смысл инвариантов), и потому переход к аннигиляции сводится к замене $s \rightarrow t$ (при этом изменяется и величина потока частиц в знаменателе) в множителе перед $|M_{if}|^2$. Дифференциальное сечение реакции:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{8\pi e^4}{t(t-4m^2)} \left\{ \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{s-m^2}{u-m^2} + \frac{u-m^2}{s-m^2} \right) \right\} ds. \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Итак, видно, что нахождение сечений рассеяния в терминах кинематических инвариантов позволяет, прежде всего, установить глубокую взаимосвязь между разнородными процессами. Идентичность амплитуд рассеяния (5.3.4) и (5.3.7), (5.3.13) и (5.3.16) не является уникальным свойством второго порядка теории возмущений. Это характерно и для высших порядков разложения. Более того, амплитуда рассеяния во всех каналах обобщённой реакции является *единой аналитической функцией*, поэтому переход между отдельными каналами формально может быть описан аналитическим продолжением функции в требуемую область параметров. Этот факт был доказан не только в рамках теории возмущений. Теория дисперсионных соотношений, в основе которой лежат

принципы причинности и аналитичности амплитуды рассеяния, приводит к таким же результатам.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Хеннер В.К., Мингалев С.В.* Введение в квантовую электродинамику и теорию поля. Перм. гос. ун-т. Пермь, 2009. 106 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов. В 10 т. Т. IV. Квантовая электродинамика / Е.М. Лифшиц, В.Б. Берестецкий, Л.П. Питаевский. М.: Физматлит, 2006. 716 с.
3. *Мессиа А.* Квантовая механика. Т.1 / ред. Л.Д. Фадеев. М.: Наука, 1978. 478 с.
4. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981. 428 с.

Учебное издание

**Хеннер Виктор Карлович
Циберкин Кирилл Борисович**

**КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
(ОСНОВНЫЕ ПРОЦЕССЫ)**

Учебное пособие

Редактор *С.Б.Русиешвили*
Корректор *Е.К. Борисова*

Подписано в печать 31.08.2012. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 5.17. Тираж 50 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел
Пермского государственного национального
исследовательского университета
614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Отпечатано на ризографе
ООО «Учебный центр „Информатика”»
614990. Пермь, ул. Букирева, 15