

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОУ ВПО «Пермский государственный университет»

*А.А. Алабужев, Т.С. Белозерова, В.К. Хеннер*

**Методы математической физики**

**Часть I**

**Специальные функции**

**Цилиндрические функции**

Учебно-методическое пособие

Пермь 2007

ББК 22.311

А45

УДК 517.58

**Алабужев А.А.**

А45 Методы математической физики. Ч. I. Специальные функции. Цилиндрические функции: учеб.-метод. пособие / А.А. Алабужев, Т.С. Белозерова, В.К. Хеннер; Перм. ун-т. – Пермь, 2007. – 127 с.: ил.

ISBN 5-7944-0787-5

В данном пособии подробно рассматриваются важнейшие специальные функции – функции Бесселя. Основное внимание уделяется физическим задачам, решения которых содержат функции Бесселя.

Цель пособия – помочь студентам физических и математических специальностей в изучении теории дифференциальных уравнений в частных производных, приводящих к функциям Бесселя, определению свойств этих функций и самостоятельном решении задач по моделированию различных физических явлений и процессов.

Печатается в соответствии с решением редакционно-издательского совета Пермского государственного университета

Рецензент: д.ф.-м.н., зав. лаб. Ин-та механики сплошных сред УрО РАН проф. Ю.Л.Райхер

Данное пособие является победителем конкурса, проведенного Пермским государственным университетом в ходе реализации инновационной образовательной программы «Формирование информационно-коммуникационной компетентности выпускников классического университета в соответствии с потребностями информационного общества» в рамках приоритетного национального проекта «Образование».

ББК 22.311

УДК 517.58

ISBN 5-7944-0787-5

© Алабужев А.А., Белозерова Т.С., Хеннер В.К., 2007

© Пермский государственный университет, 2007

## 1. ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Все специальные функции, которые рассматриваются в этом пособии, получают при решении некоторой задачи Штурма-Лиувилля. Формулировка этой задачи состоит из линейного дифференциального уравнения второго порядка, которое содержит некоторый неизвестный параметр, определяемый в процессе удовлетворения решения уравнения *граничным условиям*. То есть задача Штурма-Лиувилля является специфической краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения.

В общем случае линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение, имеющее вид

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) + \lambda d(x)y(x) = 0, \quad (1.1)$$

где  $\lambda$  - параметр и  $a(x) \neq 0$ . Это уравнение можно записать в форме Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'(x)] + [q(x) + \lambda r(x)]y(x) = 0, \quad (1.2)$$

где

$$p(x) = e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}, \quad q(x) = \frac{p(x)c(x)}{a(x)}, \quad r(x) = \frac{p(x)d(x)}{a(x)}. \quad (1.3)$$

**Упражнение:** 1) проверьте, что подстановка  $p(x)$  (1.3) в уравнение (1.2) дает уравнение (1.1);

2) покажите, что уравнение (1.1) можно свести к уравнению (1.2), если (1.1) разделить на  $a(x)$  и затем умножить на интегрирующий множитель  $p(x)$ .

Большинство физических задач приводят к линейному дифференциальному уравнению (1.2) для функции  $y(x)$ , определенной на интервале  $x \in [a, b]$ , которая должна удовлетворять однородным граничным условиям вида

$$\begin{aligned}\alpha_1 y' + \beta_1 y \Big|_{x=a} &= 0, \\ \alpha_2 y' + \beta_2 y \Big|_{x=b} &= 0\end{aligned}\tag{1.4}$$

(коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  не могут обращаться в ноль одновременно). Отметим также важное ограничение на знаки коэффициентов в условиях (1.4):  $\beta_1 / \alpha_1 < 0$  и  $\beta_2 / \alpha_2 > 0$ . Это ограничение обсуждается в приложении I.

Уравнение (1.2) и граничные условия (1.4) образуют задачу Штурма-Лиувилля. Если  $\alpha_k = 0$ , то граничные условия имеют простой вид:  $y \Big|_{x=a,b} = 0$  (*условие Дирихле*), если  $\beta_k = 0$ , то  $y' \Big|_{x=a,b} = 0$  (*условие Неймана*), иначе условия называются смешанными. Как уже отмечалось выше, в ходе решения уравнения (1.2) необходимо найти значение параметра  $\lambda$ , для которого существует нетривиальное решение  $y(x)$ .

Отметим, что для функции  $y(x)$ , определенной на бесконечном или полубесконечном интервале, условия (1.4) не используются и очень часто применяются условия регулярности при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Например, для интервала  $[a, \infty)$  второе условие (1.4) не правомерно и заменяется условием регулярности при  $x \rightarrow \infty$ :  $y(\infty)$  должно быть конечным, т.е.  $|y(\infty)| < \infty$ .

Пусть  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  и  $p'(x)$  - действительные функции, определенные на интервале  $[a, b]$ , и  $p(x) \geq 0$  и  $r(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ . Коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  также действительные и не зависят от  $\lambda$ .

Дифференциальное уравнение (1.2) и граничные условия (1.4) однородные, что очень важно для всех дальнейших результатов. Тривиальное решение  $y(x) = 0$  всегда возможно, но необходимо найти такие значения  $\lambda$  (*собственные значения*), для которых существуют нетривиальные решения (*собственные функции*), которые зависят от  $\lambda$ .

Введем дифференциальный оператор – оператор Штурма-Лиувилля:

$$Ly(x) = -\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] - q(x)y(x), \quad (1.5)$$

тогда уравнение (1.2) запишется

$$Ly(x) = \lambda r(x)y(x). \quad (1.6)$$

Если  $r(x) = 1$ , то уравнение (1.6) напоминает хорошо известную задачу на собственные значения для нахождения  $\lambda$  и  $y(x)$ . Для  $r(x) \neq 1$  получается также задача на собственные значения, но с функцией  $r(x)$ , называемой *весовой функцией*. Выше отмечалось, что  $r(x)$  должна быть действительной неотрицательной функцией.

Уравнение (1.6) и граничные условия (1.4) образуют краевую задачу. Используя их, можно показать, что собственные значения  $\lambda$  являются действительными числами и собственные функции образуют набор ортогональных функций.

Запишем уравнение (1.6) для двух собственных функций  $y_n(x)$  и  $y_m(x)$  и возьмем комплексное сопряжение от уравнения для  $y_m(x)$  (отметим, что несмотря на действительные значения функций  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$ ,  $\lambda$  и  $y(x)$  могут быть комплексными)

$$Ly_n(x) = \lambda_n r(x)y_n(x),$$

$$Ly_m^*(x) = \lambda_m^* r(x)y_m^*(x).$$

Умножив первое уравнение на  $y_m^*(x)$ , второе на  $y_n(x)$ , проинтегрируем по  $x$  оба полученных уравнения на интервале от  $a$  до  $b$  и вычтем из одного результата второй

$$\int_a^b y_m^*(x)Ly_n(x)dx - \int_a^b y_n(x)Ly_m^*(x)dx =$$

$$= (\lambda_n - \lambda_m^*) \int_a^b r(x)y_m^*(x)y_n(x)dx \quad (1.7)$$

Используя определения  $L$  из уравнения (1.5), левую часть уравнения (1.7) можно переписать в следующем виде:

$$\left\{ p(x) \left[ \frac{dy_m^*}{dx} \cdot y_n(x) - y_m^*(x) \cdot \frac{dy_n}{dx} \right] \right\}_a^b \quad (1.8)$$

**Упражнение:** проверьте предыдущее утверждение.

Затем, используя граничные условия (1.4), можно показать, что выражение (1.8) равно нулю.

**Упражнение:** покажите, что выражение (1.8) равно нулю.

В результате получаем равенство

$$\int_a^b y_m^*(x)Ly_n(x)dx = \int_a^b y_n(x)Ly_m^*(x)dx \quad (1.9)$$

Оператор  $L$ , который соответствует этому равенству, называют *эрмитовым оператором*. То есть, *линейный оператор Штурма-Лиувилля, соответствующий однородным граничным условиям, является эрмитовым*. Главные свойства эрмитового оператора – их собственные значения действительны и собственные функции ортогональны друг другу (или могут быть приведены к такому виду). Покажем, что это действительно так.

Используя равенство (1.9), перепишем уравнение (1.7)

$$(\lambda_n - \lambda_m^*) \int_a^b r(x)y_m^*(x)y_n(x)dx = 0 \quad (1.10)$$

При  $m = n$  интеграл в (1.10) не может обращаться в ноль (напомним, что  $r(x) > 0$  и  $y_n(x) \neq 0$ ), следовательно,

$\lambda_n^* = \lambda_n$  - собственные значения задачи Штурма-Лиувилля являются действительными числами.

Пусть теперь  $\lambda_m \neq \lambda_n$ , тогда уравнение (1.10) запишется

$$\int_a^b r(x) y_m^*(x) y_n(x) dx = 0. \quad (1.11)$$

Из полученного выражения (1.11) следует, что *собственные функции, соответствующие различным собственным значениям задачи Штурма-Лиувилля, являются ортогональными* (с весовой функцией  $r(x)$ ).

Отметим, что собственные функции эрмитового оператора *всегда можно привести к действительному виду*. Это может быть сделано, например, при создании линейных комбинаций функций  $y_n(x)$ , подобно выбору  $\sin(x)$  и  $\cos(x)$  вместо  $\exp(\pm ix)$  при решении уравнения  $y'' + y = 0$ . Функцией  $y_n(x)$  в действительной форме пользоваться удобнее, так как она должна соответствовать действительным граничным условиям.

Большинство операторов в физике (особенно в квантовой механике) является эрмитовыми.

**Упражнение:** покажите, что квантово механический оператор (а) линейного момента  $-i\hbar \frac{d}{dx}$  и (б) энергии  $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$  (где  $\hbar$  - постоянная Планка,  $m$  - масса частицы,  $V(x)$  - потенциальная энергия), является эрмитовым для граничных условий (1.4).

Указание: подставьте эти операторы в уравнение (1.6) и проинтегрируйте по частям, предполагая, что функция  $y(x)$  (квантово механическая волновая функция) является действительной.

Квадрат нормы собственной функции  $y_n(x)$

$$\|y_n\|^2 = \int_a^b r(x) |y_n(x)|^2 dx. \quad (1.12)$$

Приведенное выше доказательство становится несправедливым, если  $\lambda_m = \lambda_n$  при  $m \neq n$  (другими словами, существуют различные собственные функции, соответствующие одинаковым собственным значениям) и уже нельзя заключить, что соответствующие собственные функции  $y_m(x)$  и  $y_n(x)$  ортогональны (хотя в некоторых случаях такое возможно). Если существует  $f$  различных собственных функций, которые соответствуют одинаковым собственным значениям, то существует  $f$ -кратное вырождение набора собственных значений. На практике вырождение отражает симметрию физической системы.

Для эрмитового оператора всегда возможно составить линейную комбинацию собственных функций, которые соответствуют одному собственному значению так, что новая функция будет ортогональной.

Если  $p(a) \neq 0$ ,  $p(b) \neq 0$  и  $p(x) > 0$  на всем интервале  $[a, b]$ , то получается так называемая *обычная задача Штурма-Лиувилля*. Если  $p(a) = 0$ , то первого граничного условия (1.4) не существует, необходимо требовать конечность значений функций  $y(x)$  и  $y'(x)$  на границе  $x = a$ . Аналогичные ситуации возникают, если  $p(b) = 0$  или если одновременно  $p(a) = 0$  и  $p(b) = 0$  (это вытекает из условия  $p(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ ). Эти случаи соответствуют так называемой *сингулярной задаче Штурма-Лиувилля*.

Если  $p(a) = p(b)$ , то вместо условий (1.4) получаются *периодические граничные условия*  $y(a) = y(b)$  и  $y'(a) = y'(b)$ .



Этот случай называется *периодическая задача Штурма-Лиувилля*.

В табл. 1.1 приведены основные типы задачи Штурма-Лиувилля.

Таблица 1.1

Типы задачи Штурма-Лиувилля

$p(x) > 0$	$r(x) > 0$	<i>Обычная задача</i>
$p(x) \geq 0$	$r(x) \geq 0$	<i>Сингулярная задача</i>
$p(a) = p(b)$	$r(x) > 0$	<i>Периодическая задача</i>

Отметим, что интервал  $(a, b)$  может быть бесконечным и в этом случае задача Штурма-Лиувилля рассматривается как сингулярная.

Ниже в табл. 1.2 приведены дифференциальные уравнения в форме Штурма-Лиувилля, которые приводят к специальным функциям (полиномам). Все эти функции являются собственными ортогональными функциями соответствующей задачи Штурма-Лиувилля.

Название функций, приведенных в табл. 1.2:  $J_n(x)$  - Бесселя и  $Y_n(x)$  (или  $N_p(x)$ ) - Неймана функции (интервал определения для обеих функций может быть бесконечным,  $[0, \infty)$  для  $J_n(x)$  и  $(0, \infty)$  для  $Y_n(x)$ ; функция  $Y_n(x)$  не определена в точке  $x = 0$ ),  $P_n(x)$  - полиномы Лежандра,  $T_n(x)$  - полиномы Чебышева первого рода,  $U_n(x)$  - полиномы Чебышева второго рода,  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  - полиномы Якоби,  $L_n^{(\alpha)}(x)$  - полиномы Чебышева-Лагерра,  $H_n(x)$  - полиномы Чебышева-Эрмита.

В следующей теореме приведен ряд важных свойств задачи Штурма-Лиувилля:

**Теорема.**

1. Каждая обычная и каждая периодическая задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечное число собственных значений

Таблица 1.2

## Специальные функции

Функция ( $n = 0, 1, \dots$ )	Уравнение	Весовая функция $r(x)$	Интервал $x$
$J_n(x)$ и $Y_n(x)$	$\frac{d}{dx}[xy'] + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$	$x$	$[0, b]$ и $(0, b]$
$P_n(x)$	$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + \lambda y = 0$	1	$[-1, 1]$
$T_n(x)$	$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}y'\right] + \lambda \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$
$U_n(x)$	$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{3/2}y'\right] + \lambda\sqrt{1-x^2}y = 0$	$\sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$
$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ( $\alpha, \beta > -1$ )	$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}y'\right] + \lambda(1-x)^\alpha(1+x)^\beta y = 0$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$(-1, 1)$
$I_n^{(\alpha)}(x)$ ( $\alpha > -1$ )	$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}y'\right] + \lambda x^\alpha e^{-x}y = 0$	$x^\alpha e^{-x}$	$[0, \infty)$
$H_n(x)$	$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}y'\right] + \lambda e^{-x^2}y = 0$	$e^{-x^2}$	$(-\infty, \infty)$

$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  таких, что  $\lambda_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Собственные значения являются действительными числами и образуют дискретное множество.

2. Для каждого собственного значения обычной задачи Штурма-Лиувилля существует только одна собственная функция (для периодической задачи Штурма-Лиувилля это свойство не выполняется).
3. Для каждого типа задачи Штурма-Лиувилля собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, являются линейно независимыми.
4. Для каждого типа задачи Штурма-Лиувилля набор собственных функций ортогонален с учетом весовой функции  $r(x)$  на интервале  $[a, b]$ .
5. Если  $q(x) \leq 0$  на  $[a, b]$  и  $\beta_1/\alpha_1 < 0$ ,  $\beta_2/\alpha_2 > 0$ , то  $\lambda_n \geq 0$  для всех  $n$ .

Функции Бесселя и ортогональные полиномы возникают при решении сингулярных задач Штурма-Лиувилля, таким образом, первое утверждение теоремы не применимо к этим важным случаям. Сингулярная задача Штурма-Лиувилля может также иметь бесконечный набор дискретных собственных значений – можно проверить непосредственно (для каждого случая отдельно), что это верно для функций Бесселя и ортогональных полиномов.

Если равенство (1.11) выполняется, то собственные функции  $y_n(x)$  образуют полный набор ортогональных функций на отрезке  $[a, b]$ . Это означает, что любую рациональную гладкую функцию  $f(x)$ , определенную на  $[a, b]$ , можно разложить в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x) \quad (1.13)$$

(в некоторых случаях удобнее начинать суммирование с  $n = 1$ ). Коэффициенты  $a_n$  в сумме (1.13) могут быть найдены путем умножения обеих частей (1.13) на  $r(x)y_n(x)$  и интегрированием по  $x$  на интервале  $[a, b]$

$$a_n = \frac{\int_a^b r(x)f(x)y_n(x)dx}{\|y_n\|^2}. \quad (1.14)$$

Из теории рядов Фурье известно, что сумма (1.13) сходится к функции  $f(x)$  в пределе, как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b r(x) \left[ f(x) - \sum_{n=0}^N a_n y_n(x) \right]^2 dx. \quad (1.15)$$

Подставим теперь выражение (1.14) для  $a_n$  в (1.13)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n(x)}{\|y_n\|^2} \int_a^b r(x')f(x')y_n(x')dx'.$$

Меняя интегрирование и суммирование местами, получим

$$f(x) = \int_a^b f(x')r(x') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n(x)y_n(x')}{\|y_n\|^2} dx'. \quad (1.16)$$

Из полученного выражения можно заключить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n(x)y_n(x')}{\|y_n\|^2} = \delta(x - x'), \quad (1.17)$$

где  $\delta(x - x')$  - дельта-функция Дирака (подробнее см. приложение II). Уравнение (1.17) является условием полноты системы собственных функций  $y_n(x)$ . Теория Штурма-Лиувилля также содержит теорему о сходимости ряда (1.13) в каждой точке интервала  $[a, b]$

**Теорема.** Пусть  $\{y_n(x)\}$  - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля и пусть  $f(x)$  и  $f'(x)$  - кусочно-непрерывные функции на интервале  $[a, b]$ . Тогда ряд (1.13) сходится к  $f(x)$  в каждой точке, где  $f(x)$  непрерывна, и к  $[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]/2$ , если  $x_0$  - точка разрыва.

Формулы (1.11)-(1.14) могут быть получены более простым путем, если ввести скалярное произведение собственных функций  $\varphi$  и  $\psi$  как число, получаемое из формулы

$$\varphi \cdot \psi = \int_a^b r(x)\varphi(x)\psi(x)dx. \quad (1.18)$$

Такое скалярное произведение имеет свойства, аналогичные свойствам скалярного произведения векторов в линейном евклидовом пространстве:

$$\begin{aligned} \varphi \cdot \psi &= \psi \cdot \varphi, \\ (a\varphi) \cdot \psi &= a(\varphi \cdot \psi), \\ \varphi \cdot (a\psi) &= a\varphi \cdot \psi, \\ \varphi \cdot (\psi + \phi) &= \varphi \cdot \psi + \varphi \cdot \phi, \\ \varphi \cdot \varphi &\geq 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где  $a$  - некоторая константа. Последнее свойство получается из ограничения, сделанного для уравнения Штурма-Лиувилля (1.6) :  $r(x) \geq 0$ . Если функция  $\varphi$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то равенство  $\varphi \cdot \varphi = 0$  выполняется только, если  $\varphi = 0$  является нулевой функцией.

**Упражнение:** получите все отношения (1.19).

Используя скалярное произведение (1.18), условие ортогональности собственных функций (1.11) можно переписать в виде

$$y_n \cdot y_m = 0, \quad n \neq m \quad (1.20)$$

и выражение (1.14) для коэффициентов ряда Фурье

$$a_n = \frac{f \cdot y_n}{y_n \cdot y_n}. \quad (1.21)$$

Функции, удовлетворяющие условию

$$\varphi \cdot \varphi = \int_a^b r(x) |\varphi(x)|^2 dx < \infty, \quad (1.22)$$

принадлежат гильбертову пространству  $L^2$ , которое имеет бесконечную размерность. Полная система ортогональных функций  $\{y_n(x)\}$  образует ортогональный базис в  $L^2$ , а полнота системы означает, что ряд (1.13) сходится к  $f(x)$ .

В заключение кратко обсудим функцию Грина задачи Штурма-Лиувилля. Пусть необходимо найти решение неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$Ly(x) = f(x), \quad (1.23)$$

где  $L$  - эрмитов оператор соответствующий граничным условиям (1.4),  $f(x)$  - некоторая известная функция. Предположим, что уже известны собственные функции  $y_n(x)$  и собственные значения  $\lambda_n$  уравнения (1.6). Используя свойство полноты системы собственных функций  $y_n(x)$ , решение уравнения (1.23) можно представить в виде суперпозиции  $y_n(x)$ , т.е.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x). \quad (1.24)$$

Очевидно, что оператор Штурма-Лиувилля является линейным, следовательно

$$L \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Ly_n(x). \quad (1.25)$$

В результате, учитывая (1.6), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n r(x) y_n(x) = f(x). \quad (1.26)$$

Умножая обе части (1.26) на  $r(x)y_n(x)$ , интегрируя на  $[a, b]$  и учитывая условие ортогональности, найдем для коэффициентов  $c_n$

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n} \frac{\int_a^b f(x')y_n(x')dx'}{\|y_n\|^2}, \quad (1.27)$$

где  $x'$  - переменная интегрирования. Следовательно, подставляя (1.27) в (1.24) и меняя операции суммирования и интегрирования местам,

$$y(x) = \int_a^b \sum_n \left[ \frac{1}{\lambda_n} y_n(x)y_n(x') \right] f(x')dx'. \quad (1.28)$$

Для простоты выкладок использовали нормированные функции  $\|y_n\|^2 = 1$ . Полученная формула (1.28) может быть записана в виде

$$y(x) = \int_a^b G(x, x')f(x')dx', \quad (1.29)$$

где введено обозначение

$$G(x, x') = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} y_n(x)y_n(x'). \quad (1.30)$$

Функция  $G(x, x')$  называется функцией Грина задачи Штурма-Лиувилля. Эта функция представляет собой действие точечного источника единичной интенсивности в точке  $x'$ , т.к. из выражения (1.17) следует, что

$$L[G(x, x')] = \delta(x - x'). \quad (1.31)$$

Умножая получившиеся уравнение (1.31) на  $f(x')$ , интегрируя по  $x'$  на  $[a, b]$  и меняя оператор  $L$  и интегрирование местами, получаем уравнение

$$L\left[\int_a^b G(x, x')f(x')dx'\right] = \int_a^b \delta(x - x')f(x')dx'. \quad (1.32)$$

В левой части (1.32) под знаком оператора  $L$  стоит функция  $y(x)$  (1.29), в правой части - функция  $f(x)$ , т.е. данное уравнение просто совпадает с уравнением (1.23). Из уравнения (1.32) видно, что функция  $G(x, x')f(x')$  есть ничто иное, как отклик в точке  $x$  на точечное воздействие интенсивности  $f(x')$  в точке  $x'$ . Другими словами, функция Грина имеет физический смысл поля, создаваемого точечным источником, а само решение в виде (1.29) есть отражение принципа суперпозиции – значение функции  $y(x)$  в некоторой точке  $x$  является суммарным действием всех точечных источников  $G(x, x')f(x')$  на отрезке  $a \leq x' \leq b$ . Таким образом, функция Грина (1.30) позволяет получать решение уравнения (1.23) для произвольного внешнего воздействия.

**Пример 1.** Найти решение уравнения

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad (1.33)$$

на интервале  $[0, 1]$  с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (1.34)$$

**Решение.** Сравняя уравнение (1.33) и граничные условия (1.34) с (5)-(6), стало очевидным, что (1.33)-(1.34) является задачей Штурма-Лиувилля с линейным оператором  $L = -d^2/dx^2$  (покажите, что он эрмитов) и функциями  $q(x) = 0$ ,  $p(x) = r(x) = 1$ .

Рассмотрим три отдельных случая значения параметра  $\lambda$ , когда  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  и  $\lambda > 0$ . Если  $\lambda < 0$ , то общее решение уравнения (1.33) можно записать в виде

$$y(x) = C_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}x). \quad (1.35)$$

Подставляя это решение в граничные условия (1.34), получим для неопределенных констант интегрирования  $C_1$  и  $C_2$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$



Следовательно, получаем тривиальное решение

$$y(x) = 0.$$

Если  $\lambda = 0$ , то решение уравнения (1.33) имеет вид

$$y(x) = C_1 x + C_2. \quad (1.36)$$

Учитывая граничные условия (1.34), легко показать, что

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0,$$

и снова получается тривиальное решение. При  $\lambda > 0$  общее решение уравнения (1.33) можно записать в виде

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x). \quad (1.37)$$

Из граничных условий получаем

$$C_1 = 0, \quad C_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (1.38)$$

Из второго уравнения (1.38) видно, что для выполнения равенства необходимо, чтобы  $\sin(\sqrt{\lambda}x) = 0$  (в противном случае

$C_2 = 0$  и снова получаем тривиальное решение  $y(x) = 0$ ). Таким образом,  $\mu_n = \pi n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  и собственные числа задачи Штурма-Лиувилля (1.33)-(1.34)  $\lambda_n = \mu_n^2 = (\pi n)^2$ , собственные функции  $y_n(x) = C_n \sin n\pi x$  (при  $n = 0$  получаем тривиальное решение). Ясно, что можно ограничиться положительными  $\mu_n$ , то есть положительными  $n$ . Полученные функции являются ортогональными на отрезке  $[0, 1]$

$$\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx = 0, \quad m \neq n. \quad (1.39)$$

Нормируем собственные функции

$$C_n^2 \int_0^1 \sin^2 n\pi x dx = C_n^2 \frac{1}{2} = 1. \quad (1.40)$$

Следовательно, нормированные собственные функции

$$y(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.41)$$

**Пример 2.** Определить собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (1.42)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (1.43)$$

**Решение.** В предыдущем примере было показано, что параметр  $\lambda$  должен быть положительным (для данной задачи можно проделать аналогичные вычисления). Введем обозначение  $\lambda = \mu^2$ . Общее решение уравнения (1.42) запишем в виде:

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x). \quad (1.44)$$

Подставляя полученное решение (1.44) в граничные условия (1.43), получим из первого условия  $C_2 = 0$ , из второго  $C_1 \cos(\sqrt{\lambda}) = 0$ . В случае  $C_2 = 0$  получаем тривиальное решение. Следовательно,  $\mu_n = (2n + 1)\pi/2$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$ , собственными значениями являются

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \frac{(2n + 1)^2 \pi^2}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.45)$$

собственными функциями

$$y(x) = C_n \cos\left(\frac{(2n + 1)\pi}{2}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.46)$$

При единичной нормировке  $C_n = \sqrt{2}$ .

**Пример 3.** Определить собственные значения и функции задачи Штурма-Лиувилля

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (1.47)$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(x) + 5y(1) = 0. \quad (1.48)$$

**Решение.** Из предыдущих примеров известно, что  $\lambda > 0$ . Подставим общее решение (1.44) уравнения (1.47) в первое граничное условие (1.48)

$$C_1 = 0.$$

Из второго граничного условия (1.48) получим уравнение

$$\mu \cos \mu + 5 \sin \mu = 0, \quad (1.49)$$

где  $\lambda = \mu^2$ . Из (1.49) следует, что собственные значения  $\lambda_n$  определяются из решения уравнения

$$\operatorname{tg} \mu_n = -\mu_n/5. \quad (1.50)$$

Соответствующие решения  $\mu_n$  уравнения (1.50) можно определить графически как точки пересечения функций  $\operatorname{tg} \mu_n$  и  $-\mu_n/5$  (см. рис. 1.1). Из рис. 1.1 видно, что существует бесконечный набор дискретных значений  $\lambda_n$ . Собственные функции

$$y(x) = C_n \sin \mu_n x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.51)$$

являются ортогональными

$$\int_0^1 \sin \mu_n x \cdot \sin \mu_m x dx = 0, \quad m \neq n. \quad (1.52)$$

Нормированные на единицу собственные функции (1.52) будут иметь вид

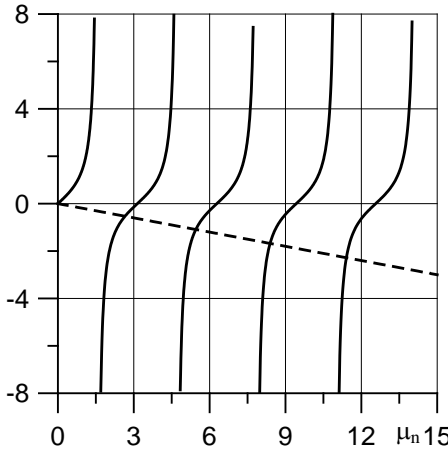


Рис. 1.1. Графическое решение уравнения(1.50)

Пересечение функции  $\operatorname{tg}(\mu_n)$  и  $-\mu_n/5$  дает решение уравнения

$$y_n(x) = \frac{2\sqrt{\mu_n}}{\sqrt{2\mu_n - \sin 2\mu_n}} \sin \mu_n x. \quad (1.53)$$

**Пример 4.** Решить задачу Штурма-Лиувилля

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.54)$$

с периодическими граничными условиями

$$y(0) = y(l), \quad y'(0) = y'(l). \quad (1.55)$$

**Решение.** Общее решение уравнения (1.54) при  $\lambda > 0$  можно записать в следующем виде:

$$y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x), \quad (1.56)$$

где  $\lambda = \mu^2$ . При подстановке решения (1.56) в граничные условия (1.55) получим систему из двух однородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1(\cos(\mu l) - 1) + C_2 \sin(\mu l) = 0, \\ -C_1 \sin(\mu l) + C_2(\cos(\mu l) - 1) = 0. \end{cases} \quad (1.57)$$

Эта система имеет единственное нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} \cos(\mu l) - 1 & \sin \mu l \\ \sin \mu l & \cos(\mu l) - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.58)$$

Вычисляя определитель в (1.58), получим уравнение

$$\cos(\mu l) = 1. \quad (1.59)$$

Корнями уравнения (1.59)

$$\lambda_n = \left( \frac{2\pi n}{l} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.60)$$

Для полученных значений  $\lambda_n$  (1.60) система (1.57) имеет два линейно-независимых нетривиальных решения

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Подставляя полученные решения (1.61) в (1.56), определим собственные функции

$$y_n^{(1)}(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right), \quad y_n^{(2)}(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right). \quad (1.62)$$

Кроме того, собственному значению  $\lambda_0 = 0$  соответствует собственная функция  $y_0(x) = 1$  и тривиальное решение  $y(x) \equiv 0$ . Каждому ненулевому значению собственного числа соответствует две линейно независимые собственные функции (2-кратное вырождение системы).

Окончательно можем записать собственные значения и функции краевой задачи с периодическими граничными условиями(1.54)-(1.55)

$$\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.63)$$

$$y_0(x) = 1, \quad y_n(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi n}{l}x\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi n}{l}x\right) \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.64)$$

$$\|y_0(x)\|^2 = l, \quad \|y_n(x)\|^2 = \frac{l}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.65)$$

В частности, при  $l = 2\pi$  получаем

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y_0(x) = 1, \quad y_n(x) = \begin{cases} \cos(nx) \\ \sin(nx) \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Пример 5.** Приведем в качестве простого примера решение двухмерной задачи Штурма-Лиувилля. Пусть дано дифференциальное уравнение для функции  $u(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.66)$$

где  $k$  - действительная постоянная. Оператор Штурма-Лиувилля можно определить по аналогии с одномерным случаем

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Граничные условия:

$$u(0, y) = u(l, y) = u(x, 0) = u(x, h). \quad (1.67)$$

Самостоятельно покажите, что задаче Штурма-Лиувилля (1.66)-(1.67) удовлетворяют собственные значения

$$k_{nm}^2 = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{h^2} \right) \quad (1.68)$$

и соответствующие им собственные функции

$$u_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi y}{h}. \quad (1.69)$$

В случае квадратной области  $l = h$  собственные функции  $u_{nm}$  и  $u_{mn}$  соответствуют одинаковым собственным значениям  $k_{nm} = k_{mn}$  (см. (1.68)). Это свойство отражает симметрию задачи относительно  $x$  и  $y$ .

**Пример 6.** Определить функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $[0, 1]$ :

$$Ly = -y'' - 2y', \quad y(0) = y(1) = 0.$$

**Решение.** В рассматриваемом случае краевая задача будет иметь вид (см. (1.6.)):

$$Ly = -y'' - 2y' = \lambda y, \quad (1.70)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (1.71)$$

где  $\lambda > 0$  - параметр. Решение уравнения (1.70) можно записать следующим образом:

$$y(x) = e^{-x} \left( C_1 \cos(\sqrt{\lambda - 1}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda - 1}x) \right) \quad (1.72)$$

Полученное решение должно удовлетворять граничным условиям (1.71). При подстановке решения (1.72) в граничные условия находим из условия существования нетривиального решения  $y(x)$ :

$$C_1 = 0, \quad \sin(\sqrt{\lambda - 1}) = 0. \quad (1.73)$$

Из второго условия найдем собственные значения задачи Штурма-Лиувилля  $\lambda_n$

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.74)$$

Отметим, что  $\sin(\sqrt{\lambda_n - 1}x) = 0$  при  $n = 0$  для любого значения  $x$ , то есть, получаем тривиальное решение. Очевидно, что собственные функции  $y_n(x)$ , соответствующие значениям  $\lambda_n$  (1.74), имеют вид:

$$y_n(x) = e^{-x} \sin(\sqrt{\lambda_n - 1}x). \quad (1.75)$$

Для нахождения функции Грина  $G(x, x')$  воспользуемся формулой (1.30). Подставим (1.74) и (1.75) в (1.30)

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x) \sin(\pi n x')}{\pi^2 n^2 + 1} e^{-x} e^{-x'}. \quad (1.76)$$

**Пример 7.** Функция Грина позволяет упростить нахождение решения неоднородного линейного уравнения. Для примера разберем следующую задачу:

а) найти функцию Грина для уравнения  $y'' + y = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , если функция  $y(x)$  удовлетворяет граничным условиям  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ ;

б) используя функцию Грина, найти решение краевой задачи приведенной в (а), если  $f(x) = x$ .

**Решение.** а). Из сравнения с уравнением (1.2) становится ясно, что в данном случае  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 1$ . Следовательно, опера-

тор Штурма-Лиувилля имеет вид  $L = -d^2/dx^2 - 1$ . Краевая задача для такого оператора с граничными условиями подобна задаче, разобранный в примере 1. Воспользуемся вычисленными в нем собственными значениями и соответствующими им собственными функциями

$$\lambda_n = (\pi n)^2 - 1, \quad y_n(x) = \sqrt{2} \sin(\pi n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.77)$$

Таким образом, подставляя (1.77) в формулу (1.30), найдем функцию Грина

$$G(x, x') = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x) \sin(\pi n x')}{(\pi n)^2 - 1}. \quad (1.78)$$

б). Общее решение уравнения  $Ly = f(x)$  (см. (1.23)) дается формулой (1.29). Сравнивая уравнение  $y'' + y = f(x)$  с (1.23), получаем, что для нашего случая  $f(x) = -x$  для (1.29), т.е.

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^1 G(x, x')(-x')dx' = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2 - 1} \int_0^1 (-x') \sin n\pi x' dx' = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2 - 1} \frac{(-1)^n}{n\pi} \end{aligned}$$

Легко убедиться, что полученное решение удовлетворяет граничным условиям задачи.

**Пример 8.** Рассмотрим в качестве примера разложение функции  $f(x) = x^2(1-x)$  в ряд Фурье по базисным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \quad (1.79)$$

$$y'(0) = y'(\pi/2) = 0. \quad (1.80)$$

**Решение.** Покажите самостоятельно, что для данной задачи Штурма-Лиувилля собственными значениями являются  $\lambda_n = 4n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  и собственными функциями  $y_n(x) = \cos(2nx)$ .



Разложение функции  $f(x)$  в ряд Фурье по базисным функциям  $y_n(x)$  дается формулой (1.13). Для рассматриваемого случая

$$x^2(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(2nx). \quad (1.81)$$

В рассматриваемой задаче  $r(x) = 1$  (сравните (1.2) и (1.79)). Коэффициенты разложения  $c_n$  вычисляются по формуле (1.14)

$$c_0 = \frac{\int_0^{\pi/2} x^2(1-x) dx}{\int_0^{\pi/2} dx} = \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{1}{3} - \frac{\pi}{8} \right), \quad (1.82)$$

$$c_n = \frac{\int_0^{\pi/2} x^2(1-x) \cos 2nx \, dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^2 2nx \, dx} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^4} \left[ 1 - \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2\pi n^2} \right] - \frac{3}{2\pi n^4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.83)$$

На рис. 1.2 показана частичная сумма ряда (1.81) в сравнении с функцией  $f(x)$ . Из приведенного рисунка видно, что графики удовлетворительно совпадают. В следующей главе подробно обсудим причины, по которым возникает отклонение конечной суммы ряда разложения функции от самой функции.

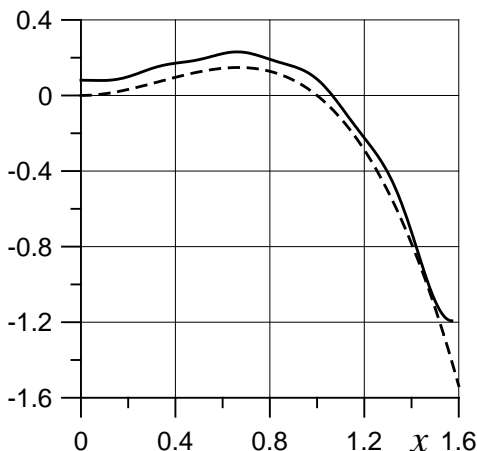


Рис. 1.2. График функции  $f(x) = x^2(1-x)$  и частичная сумма ряда Фурье разложения функции  $f(x)$ :  $f(x) = x^2(1-x)$  – штриховая линия, частичная сумма ( $n = 9$ ) – сплошная линия

### Задачи

1. Определить собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля на интервале  $[0, 1]$  в следующих случаях:

- a)  $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(l) = 0$ ;
- b)  $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$ ;
- c)  $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ ;
- d)  $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y'(1) + y(1) = 0$ ;
- e)  $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ ,  $y'(0) + y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ ;

f)  $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y'(l) = 0$ ;

g)  $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ ,  $y(-l) = y(l)$ ,  $y'(-l) = y'(l)$ .

2. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad 1 \leq x \leq 10, \quad y(1) = 0, \quad y(10) = 0.$$

Записать уравнение в самосопряженной форме и получить условие ортогональности.

3. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$y'' + y' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq 5, \quad y(0) = 0, \quad y(5) = 0.$$

Записать уравнение в самосопряженной форме и получить условие ортогональности.

4. Определить функцию Грина оператора  $L$ , действующего в пространстве функций  $y(x)$ , на интервале  $[0, 1]$  в следующих случаях:

a)  $L = -\partial^2 / \partial x^2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(1) + y(1) = 0$ ;

b)  $L = -\partial^2 / \partial x^2$ ,  $y'(0) - y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ ;

c)  $L = -\partial^2 / \partial x^2 - 1$ ,  $y'(0) - y(0) = 0$ ,  $y'(1) + y(1) = 0$ ;

d)  $L = -\partial^2 / \partial x^2 + 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ ;

e)  $L = -\partial^2 / \partial x^2 + 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ .

5. Найти функцию Грина оператора  $L$ , действующего в пространстве функций  $y(x)$ , на интервале  $[1, 2]$  в следующих случаях:

a)  $L = -x^2 \partial^2 / \partial x^2 - 2x \partial / \partial x$ ,  $y'(1) = 0$ ,  $y(2) = 0$ ;

b)  $L = -x \partial^2 / \partial x^2 - \partial / \partial x$ ,  $y'(1) = 0$ ,  $y(2) = 0$ ;

c)  $L = -x^3 \partial^2 / \partial x^2 - 3x^2 \partial / \partial x - 2x^2$ ,  $y(1) = 0$ ,  
 $2y'(2) + 2y(2) = 0$ .

6. Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $[0, \pi/4]$  в следующих случаях:

a)  $Ly = -\left(y' \cos^2(x)\right)', y(0) = 0, y(\pi/4) = 0;$

b)  $Ly = -\left(y' \cos^2(x)\right)', y'(0) - y(0) = 0,$   
 $y'(\pi/4) + y(\pi/4) = 0.$

7. Найти функцию Грина для оператора  $L$ , действующего в пространстве функций  $y(x)$ , на интервале  $[0, 1]$  в следующих случаях:

a)  $L = -\partial^2/\partial x^2, y(0) = y(1), y'(0) = y'(1);$

b)  $L = -\partial^2/\partial x^2 - \pi^2, y(0) = y(1) = 0;$

c)  $L = -\partial^2/\partial x^2 - \pi^2, y'(0) = y'(1) = 0;$

d)  $L = -\partial^2/\partial x^2 + 1, y(0) = y(1), y'(0) = y'(1).$

8. Определить функцию Грина оператора  $L$ , действующего в пространстве функций  $y(x)$ , на интервале  $[0, 1]$  в следующих случаях:

a)  $L = -\partial^2/\partial x^2 - 4\partial/\partial x, y'(0) - y(0) = 0, y(1) = 0;$

b)  $L = -\partial^2/\partial x^2 - 2\partial/\partial x + 2, y(0) = 0, y(1) = 0;$

c)  $L = -\partial^2/\partial x^2 + 4\partial/\partial x, y'(0) - y(0) = 0, y'(1) + y(1) = 0;$

d)  $L = -2\partial^2/\partial x^2 + 4\partial/\partial x, y(0) = 0, y(1) = 0.$

9. Найти функцию Грина и решение неоднородной краевой задачи на интервале  $[0, 1]$  в следующих случаях:

a)  $y''(x) + y(x) = f(x), y(0) = 0, y'(1) = 0;$

b)  $y''(x) + y(x) = x, y(0) = 0, y'(1) = 0;$

c)  $y''(x) + y(x) = f(x), y'(0) = 0, y'(1) = 0;$

d)  $y''(x) + y(x) = \cos(\pi x/2), y'(0) = 0, y'(1) = 0$

10. Найти функцию Грина и решение неоднородной краевой задачи на интервале  $[0, \pi]$ :  $y''(x) + 4y(x) = \sin 2x, y(0) = 0,$   
 $y(\pi) = 0.$

11. Найти функцию Грина и решение неоднородной краевой задачи на интервале  $[1, 2]$ :  $x^4 y'' + x^3 y' + 2x^2 y = f(x)$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y'(2) + y(2) = 0$ .

12. С помощью функции Грина найти решение краевой задачи:  $(1 + \cos(x))y'' - \sin(x)y = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq \pi/2$ ,  $2y'(0) - y(0) = 0$ ,  $y(\pi/2) = 0$ .

13. Найти функцию Грина оператора  $L$ , если:

а)  $Ly = -y'(x) - y(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y(0) = y(1)$ ;

б)  $Ly = -y''(x) + 2y(x)/x^2$ ,  $0 \leq x < \infty$ ,  $y(0) = 0$ ,  $|y(x \rightarrow \infty)| < \infty$ .

14. Найти функцию Грина для уравнения колебаний  $y''(x) + \lambda^2 y(x) = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  со следующими граничными условиями:

а)  $y(0) = y(1) = 0$ ; б)  $y'(0) = y'(1) = 0$ ;

с)  $y(0) = y(1)$ ,  $y'(0) = y'(1)$ .

15. Разложить функцию  $f(x)$  в ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи 4d, если

а)  $f(x) = x(1-x)$ , б)  $f(x) = x$  при  $0 \leq x \leq 0.5$  и  $f(x) = 1-x$  при  $0.5 \leq x \leq 1$ , с)  $f(x) = \cos(2\pi x) - 1$ .

Сравнить и обсудить скорость сходимости частичных сумм для приведенных случаев.

16. Разложить функцию  $f(x)$  в ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи 4e, если

а)  $f(x) = x(x-2)$ , б)  $f(x) = \pi x + \sin(\pi x)$ , с)  $f(x) = x^3 - 3x$ , д)  $f(x) = \cos(\pi x) - 1$ .

Сравнить и обсудить скорость сходимости частичных сумм для приведенных случаев.

17. Разложить функцию  $f(x)$  в ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи 4a, если

a)  $f(x) = x(x - 3/2)$ , б)  $f(x) = \pi x/2 + \sin(\pi x)$ ,

с)  $f(x) = 1 - x - \cos(\pi x)$ .

Сравнить и обсудить скорость сходимости частичных сумм для приведенных случаев.

18. Разложить функцию  $f(x)$  в ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи 4b, если

a)  $f(x) = 2x^2 - x - 1$ , б)  $f(x) = x + \cos(\pi x)$ ,

с)  $f(x) = \pi(1 - x)/2 + \sin(\pi x)$ .

Сравнить и обсудить скорость сходимости частичных сумм для приведенных случаев.

19. Разложить функцию  $f(x)$  в ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи 4c, если

a)  $f(x) = x^2 - x - 1$ , б)  $f(x) = (2x - 1)/3 + \cos(\pi x)$ .

Сравнить и обсудить скорость сходимости частичных сумм для приведенных случаев.

20. Разложить функцию  $f(x)$  в ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи, если на границах интервала значения функции  $f(x)$  не удовлетворяют граничным условиям краевой задачи, в следующих случаях:

a)  $f(x) = x(x - 1)$  разложить по собственным функциям задачи 4a;

б)  $f(x) = x - 1 - 4b$ ;

с)  $f(x) = \sin(\pi x) - 4c$ ;

д)  $f(x) = \cos(\pi x/2) - 4d$ ;

е)  $f(x) = \sin(\pi x) - 4e$ .

## 2. Функции Бесселя.

### 2.1. Краевая задача, приводящая к функциям Бесселя

В приложениях часто возникают задачи на собственные значения, содержащие дифференциальные уравнения вида

$$r^2 y''(r) + r y'(r) + (\lambda r^2 - p^2) y(r) = 0, \quad (2.1)$$

где  $p$  - известное фиксированное число,  $\lambda$  - параметр. Уравнение (2.1) называется *уравнением Бесселя  $2\alpha$  порядка*. Подобные уравнения возникают при разделении переменных во многих задачах математической физики, в частности, в задаче о распространении тепла внутри кругового цилиндра, в задаче о колебаниях круглой мембраны, в краевых задачах о нахождении электрического потенциала для цилиндрической области и т.д. Уравнение (2.1) обычно имеет нетривиальные решения, отвечающие некоторым граничным условиям, только при определенных значениях параметра  $\lambda$ , поэтому нужно найти эти значения и соответствующие им решения  $y(r)$ .

В задачах на собственные значения уравнение (2.1) всегда сопровождается краевыми условиями. Для функции  $y(r)$ , заданной на ограниченном интервале  $[0, l]$ , возможны разнообразные краевые условия в точках  $r = 0$  и  $r = l$ . Например, при  $r = l$  может быть задано значение функции  $y(l)$  или ее производной  $y'(l)$ , или значение их линейной комбинации  $\alpha y'(l) + \beta y(l)$ . Это приводит в точке  $r = l$  к одному из условий: Дирихле, Неймана или смешанному, соответственно.

Очень часто в физических задачах переменная  $r$  может принимать любые значения на интервале  $0 < r \leq l$ , может быть за исключением точки  $r = 0$ , где функция  $y(r)$  имеет особенность. Другой часто встречающийся случай, когда переменная  $r$  задана на конечном интервале: функция  $y(r)$  ограничена при  $r = 0$  и принимает заданное значение в точке  $r = l$ , например:

$$\begin{cases} |y(r \rightarrow +0)| < \infty, \\ y(l) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

В дальнейшем будут рассмотрены случаи неограниченных областей, например,  $0 \leq r < \infty$  или  $l \leq r < \infty$ .

Начнем с подробного рассмотрения случая граничных условий (2.2), которые приводят к дискретному спектру  $\lambda$ . Очевидно, что уравнение (2.1) совместно с граничными условиями (2.2) образуют задачу Штурма-Лиувилля. Сделаем в уравнении (2.1) замену переменной:  $x = \sqrt{\lambda}r$

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) легко привести к виду, разделив все его члены на  $x$ :

$$(xy')' + \left(x - \frac{p^2}{x}\right)y = 0. \quad (2.4)$$

Полученное уравнение по своей структуре напоминает уравнение Эйлера. Напомним, что уравнением Эйлера второго порядка называется всякое уравнение вида

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = f(x), \quad (2.5)$$

где  $a_0, a_1, a_2$  - постоянные числа. Оно сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены независимой переменной  $x = e^t$ .

Рассмотрим сначала случай целых значений параметра  $p$ . Попытаемся найти решение уравнения (2.4) в виде суммы степенного ряда по степеням  $x$

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots \quad (2.6)$$

Такой выбор формы решения предполагает ограниченность функции  $y(x)$  при  $x \rightarrow 0$ .

Для удобства дальнейших вычислений изменим обозначения: обозначим буквой  $a_0$  первый из коэффициентов ряда (2.6), отличный от нуля, а буквами  $a_1, a_2, a_3, \dots$  - все последующие коэффициенты. Конечно, может случиться, что уже  $b_0 \neq 0$ ; тогда  $b_0 = a_0, b_1 = a_1, \dots$ . Если же  $b_0 = b_1 = \dots = b_{m-1} = 0, b_m \neq 0$ , то



обозначаем  $b_m = a_0$ ,  $b_{m+1} = a_1$ ,  $b_{m+2} = a_2, \dots$  и т.д. Итак, в общем случае

$$y = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \dots + a_n x^{m+n} + \dots, \quad (2.7)$$

где  $m \geq 0$  (по построению видно, что  $m$  – целое число),  $a_0 \neq 0$ .

Дифференцируя ряд (2.7), найдем  $y'$ ; затем, умножая ряд для  $y'$  на  $x$  и еще раз дифференцируя, получим:

$$(xy')' = a_0 m^2 x^{m-1} + a_1 (m+1)^2 x^m + a_2 (m+2)^2 x^{m+1} + \dots + \\ + a_n (m+n)^2 x^{m+n-1} + \dots \quad (2.8)$$

Подставляя выражение для  $(xy')'$  и для  $y$  в уравнение (2.4), будем иметь следующее тождество:

$$a_0 m^2 x^{m-1} + a_1 (m+1)^2 x^m + a_2 (m+2)^2 x^{m+1} + \dots + \\ + a_n (m+n)^2 x^{m+n-1} + \dots - a_0 p^2 x^{m-1} - a_1 p^2 x^m - \\ - a_2 p^2 x^{m+1} - \dots - a_n p^2 x^{m+n-1} - \dots + \\ + a_0 x^{m+1} + a_1 x^{m+2} + \dots + a_{n-2} x^{m+n-1} + \dots \equiv 0.$$

Приравняв нулю сумму коэффициентов при каждой степени  $x$ , составим бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов

$$\begin{aligned} a_0(m^2 - p^2) &= 0, \\ a_1[(m+1)^2 - p^2] &= 0, \\ a_2[(m+2)^2 - p^2] + a_0 &= 0, \\ a_3[(m+3)^2 - p^2] + a_1 &= 0, \\ \dots & \\ a_n[(m+n)^2 - p^2] + a_{n-2} &= 0, \\ \dots & \end{aligned}$$

Из первого уравнения системы находим, что  $m^2 - p^2 = 0$  (так как  $a_0 \neq 0$  по условию). Следовательно,  $m = p$  (напомним, что  $m$  – неотрицательное число, следовательно,  $m \neq -p$ ). Поэтому в уравнении Бесселя (2.1) изначально было выбрано  $p \geq 0$ , хотя само уравнение не зависит от знака  $p$ . Полученные результаты

для неотрицательных  $p$  будут ниже обобщены на случай произвольных значений  $p$ .

Из остальных уравнений находим  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ; однако для облегчения вычислений преобразуем сначала выражения в квадратных скобках (учтя, что  $m = p$ ):

$$\begin{aligned} a_1[(p+1)^2 - p^2] &= 0, \\ a_2[(p+2)^2 - p^2] + a_0 &= 0, \\ a_3[(p+3)^2 - p^2] + a_1 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ a_n[(p+n)^2 - p^2] + a_{n-2} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} a_1(2p+1) &= 0, \\ a_2 2(2p+2) &= -a_0, \\ a_3 3(2p+3) &= -a_1, \\ a_4 4(2p+4) &= -a_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_n n(2p+n) &= -a_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2k+1} = 0$ ,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-a_0}{2(2p+2)}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4(2p+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot (2p+2)(2p+4)}, \\ a_6 &= \frac{-a_4}{6(2p+6)} = \frac{-a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2p+2)(2p+4)(2p+6)} \end{aligned}$$

и т. д.

Окончательно имеем рекуррентную формулу

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{a_0(-1)^k}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k(2p+2)(2p+4)\dots(2p+2k)} = \\ &= \frac{a_0(-1)^k}{2^k \cdot k! \cdot 2^k \cdot (p+1)(p+2)\dots(p+k)} = \frac{a_0 p! (-1)^k}{2^{2k} k! (p+k)!}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд (2.7) и учитывая, что  $m = p$ , получим

$$y = a_0 \left[ x^p - \frac{p!}{2^2 1!(p+1)!} x^{p+2} + \frac{p!}{2^4 2!(p+2)!} x^{p+4} - \dots + \frac{p!(-1)^k}{2^{2k} k!(p+k)!} x^{p+2k} + \dots \right],$$

что может быть записано несколько проще

$$y = a_0 2^p p! \left[ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{p!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2}}{1!(p+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4}}{2!(p+2)!} - \dots + \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}}{k!(p+k)!} \dots \right].$$

Ряд, стоящий в квадратных скобках, абсолютно сходится для всех значений  $x$ , что легко проверить с помощью признака Даламбера:  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}/a_k| = 0$ . Из-за наличия факториалов в знаменателе ряд сходится очень быстро. Сумма этого ряда называется функцией Бесселя порядка  $p$  и обозначается  $J_p(x)$

$$J_p(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{p!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2}}{1!(p+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4}}{2!(p+2)!} - \dots + (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}}{k!(p+k)!} + \dots,$$

то есть

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}. \quad (2.10)$$

Таким образом, получено решение уравнения (2.4) для случая, когда функция  $y(x)$  принимает конечные значения в  $x = 0$ . Отметим, что это решение получено для целых неотрицательных значений  $p$ .

Решением уравнения (2.4) является любая функция вида  $A J_p(x)$  (здесь  $A$  обозначено число  $2^p p!$ ; поскольку  $a_0$  может принимать любые значения (и умножение решения на константу снова дает решение уравнения (2.4) – следствие линейности и

однородности уравнения), то и  $A$  может принимать любое постоянное значение).

Теперь обобщим рассмотрение случая целых  $p$  для случая произвольных действительных  $p$ . В этом случае необходимо заменить целочисленную функцию  $p!$  на *гамма-функцию*  $\Gamma(p)$ , определенную для произвольных действительных значений  $p$ . Ее определение и основные свойства приведены в приложении III. С помощью гамма-функции функция Бесселя порядка  $p$  может быть определена через ряд, построенный по аналогии с рядом (2.9)

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{a_0}{2(2+2p)} = -\frac{a_0}{2^2(1+p)} = -\frac{a_0\Gamma(p+1)}{2^2\Gamma(p+2)}, \\
 a_4 &= -\frac{a_2}{2^3(p+2)} = \frac{a_0}{2!2^4(p+1)(p+2)} = \frac{a_0\Gamma(p+1)}{2!2^4\Gamma(p+3)}, \\
 a_6 &= -\frac{a_4}{3!2(p+3)} = -\frac{a_0}{3!2^6(p+1)(p+2)(p+3)} = -\frac{a_0\Gamma(p+1)}{3!2^6\Gamma(p+4)}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{2k} &= \frac{(-1)^k a_0\Gamma(p+1)}{2^{2k} k! \Gamma(p+k+1)}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 J_p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k} = \\
 &= \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

сходящимся при любых значениях  $p$ . В частности, при замене  $p$  на  $-p$  получим

$$J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{2.12}$$

Так как в уравнение Бесселя (2.4) входит  $p^2$ , то функции  $J_p(x)$  и  $J_{-p}(x)$  являются решениями уравнения с одинаковым  $p$ . Если  $p$  - нецелое число (случай целых  $p = n$  будет рассмотрен ниже), эти решения линейно независимы, так как первые слагаемые в (2.11) и (2.12) содержат разные степени  $x$ :  $x^p$  и  $x^{-p}$  соответственно. Точка  $x = 0$  должна быть исключена из области определения функции (2.12), т.к.  $x^{-p}$  ( $p > 0$ ) расходится в этой точке.

Функция  $J_p(x)$  ограничена при  $x \rightarrow 0$ ; действительно,  $J_p(x)$  непрерывна для всех  $x$  как сумма сходящегося степенного ряда (8) и, следовательно, ограничена в окрестности любой точки – в частности, в окрестности нуля. Для нецелых значений  $p$  это следует из свойств гамма-функции и ряда (2.11).

Решение  $J_p(x)$  не является единственно возможным решением уравнения (2.4). Все решения уравнения Бесселя (2.4) имеют общее название: цилиндрические функции (или бесселевы функции). Среди них выделяют цилиндрические функции 1-го рода  $J_p(x)$  (Бесселевы функции), которые мы только что получили, цилиндрические функции 2-го рода  $Y_p(x)$  (функции Вебера); их другое название функции Неймана часто обозначаются как  $N_p(x)$ , цилиндрические функции 3-го рода  $H_p^{(1)}(x)$ ,  $H_p^{(2)}(x)$  (функции Ганкеля), свойства этих функций мы рассмотрим ниже.

Уравнение Бесселя – это уравнение второго порядка и его общее решение содержит два линейно независимых частных решения. Если индекс  $p$  равен целому числу  $n$ , то функции  $J_p(x)$  и  $J_{-p}(x)$  не являются линейно независимыми и с их помощью нельзя сформировать общее решение уравнения Бесселя.

**Упражнение:** 1). Покажите, что  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$  для  $n = 1, 2, 3, \dots$

2). Покажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2}$ .

В этом случае общее решение есть линейная комбинация функций  $J_p(x)$  и  $Y_p(x)$

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x).$$

Функции  $Y_p(x)$  сингулярны при  $x = 0$ , поэтому, если физическая постановка задачи требует, чтобы решение было регулярно в нуле, коэффициент  $C_2$  в решении (2.13) необходимо положить равным нулю.

Если индекс  $p$  не равен целому числу  $n$ , то общее решение уравнения (2.4) можно записать в виде

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x),$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные. При произвольном индексе любые две из функций  $J_p(x)$ ,  $Y_p(x)$ ,  $H_p^{(1)}(x)$ ,  $H_p^{(2)}(x)$  линейно независимы и могут служить фундаментальной системой решений уравнения (2.4). Например, для ряда задач общим решением уравнения Бесселя (2.4) удобнее выбрать

$$y = C_1 H_p^{(1)}(x) + C_2 H_p^{(2)}(x).$$

## 2.2. Функции Бесселя 1-го рода

В этом разделе будем рассматривать функции Бесселя 1-го рода целого порядка  $p = n$ . Выделяем этот случай, т.к. во многих приложениях  $p$  является целым неотрицательным числом.

Первые члены разложения (2.9) вблизи нуля для трех первых функций Бесселя первого рода

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2! \cdot 2!} - \dots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 2!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 2! \cdot 3!} - \dots,$$

$$J_2(x) = \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^4}{2^4 \cdot 3!} + \frac{x^6}{2^6 \cdot 2! \cdot 4!} \dots$$

Отметим, что  $J_n(x)$  - четные функции, если  $n$  - целое число, и нечетные, если  $n$  - нецелое (хотя обычно в физических краевых задачах значения  $x$  неотрицательные, т.е.  $x \geq 0$ , и рассматривать  $x < 0$  не приходится). Также важно отметить значения функций  $J_n(x)$  при  $x = 0$ :  $J_0(0) = 1$  и  $J_n(0) = 0$  для  $n \geq 1$ . На рис. 2.1 приведены графики функций  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ ,  $J_2(x)$ . Если построить график функции  $J_0(x)$  с выводом порядка 30 нулей этой функции, то можно заметить (см. рис. 2.1 и табл. 2.1), что разность двух соседних корней стремится к  $\pi$  с увеличением порядкового номера корня

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_0^{(k)} - \mu_0^{(k-1)}) = \pi.$$

Здесь  $\mu_0^{(k)}$  -  $k$ -й положительный корень уравнения  $J_0(\mu_0) = 0$ .

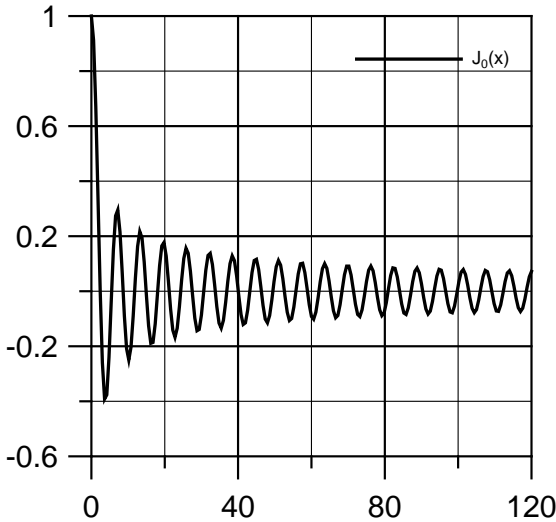
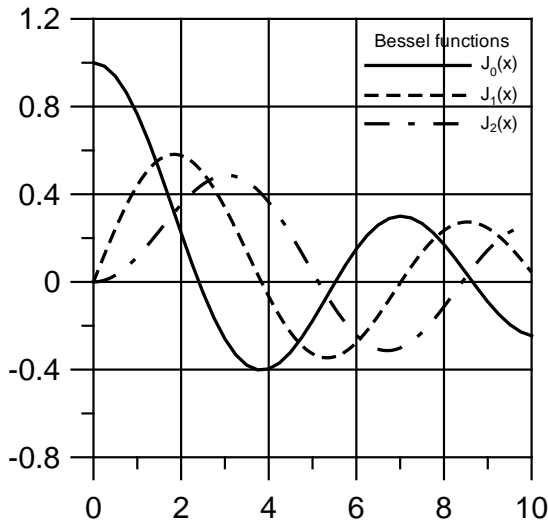


Рис. 2.1. График функции Бесселя  $J_0(x)$

Таблица 2.1

Положительные корни функции  $J_0(x)$  и разность между значениями соседних корней

№	Значение	Разность с предыдущим	№	Значение	Разность с предыдущим
25	77.75602563	-	28	87.18062984	3.14153906
26	80.89755587	3.14153024	29	90.32217264	3.14154280
27	84.03909078	3.14153491	30	93.46371878	3.14154614

Рис. 2.2. Графики функций  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ ,  $J_2(x)$ 

Приведем таблицу нескольких первых корней функций Бесселя нулевого, первого и второго порядков.

Таблица 2.2

Положительные корни функций  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ ,  $J_2(x)$

Функция	Корни				
	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$
$J_0(x)$	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309
$J_1(x)$	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
$J_2(x)$	5.136	8.417	11.620	14.796	17.960



В табл. 2.2 корни уравнения  $J_n(x) = 0$  обозначены буквой  $\mu$ , удобным обозначением также является  $\mu_k^{(n)}$  - индекс  $n$  обозначает порядок функции Бесселя, нижний  $k$  дает номер корня этой функции. В дальнейшем, там, где нет необходимости, верхний индекс будем опускать.

### Некоторые свойства функций Бесселя 1-го рода $J_n(x)$

Все приведенные ниже свойства непосредственно вытекают из разложения (2.9).

1. Все функции Бесселя определены и непрерывны на всей числовой прямой и имеют производные любого порядка. Это следует из того, что любую функцию Бесселя можно разложить в степенной ряд, сходящийся для всех значений  $x$ , а сумма степенного ряда, как известно, является непрерывной функцией, имеющей производные всех порядков.
2. Функции Бесселя четного порядка (индекса) являются четными функциями (так как в их разложении в ряд содержатся только четные степени аргумента). Функции Бесселя нечетного порядка - нечетные функции.
3. Нули функции Бесселя (корни уравнения  $J_n(x) = 0$ ) простые. При этом нули  $J_n(x) = 0$  лежат между нулями  $J_{n+1}(x) = 0$ .

Каждая функция Бесселя имеет бесконечное множество вещественных корней. Корни, расположенные на положительной полуоси, могут быть занумерованы натуральными числами в порядке возрастания.

4. Поведение функций Бесселя в окрестности нуля дается первыми слагаемыми ряда (7); при больших  $x$  справедливо асимптотическое представление

$$J_p(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

С возрастанием  $x$  точность этого приближенного равенства быстро повышается. Погрешность, получающаяся

при замене  $J_n(x)$  правой частью равенства (2.16), очень мала при больших значениях  $x$  и имеет тот же порядок малости, что и  $x^{-3/2}$ .

Из равенства (2.16), в частности, вытекает, что функция  $J_p(x)$  имеет корни, близкие (для больших значений  $x$ ) к корням уравнения

$$\cos\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

так что разность между двумя соседними корнями функции  $J_p(x)$  стремится к  $\pi$  (при удалении этих корней в бесконечность). График функции  $J_p(x)$  при удалении от начала координат имеет вид кривой, изображающей затухающие колебания; длина полуволны почти постоянна (близка к  $\pi$ ), а амплитуда убывает обратно пропорционально квадратному корню из  $x$ . И, как следствие затухания,  $\lim_{x \rightarrow \infty} J_p(x) = 0$ .

5. Имеют место следующие формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] \equiv -x^{-p} J_{p+1}(x), \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] \equiv x^p J_{p-1}(x). \quad (2.18)$$

Доказываются эти формулы непосредственным дифференцированием соответствующих рядов (т.е. тех рядов, которые получаются в результате деления или умножения степенного ряда для  $J_p(x)$  на  $x^p$ ).

В частности, докажите в качестве **упражнения**

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x), \quad \frac{d}{dx} [xJ_1(x)] = xJ_0(x).$$

6. Рекуррентные формулы

$$J_{p+1}(x) = \frac{2n}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x),$$

$$J_{p+1}(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J'_p(x), \quad (2.19)$$

$$J'_p(x) = -\frac{p}{x} J_p(x) + J_{p-1}(x).$$

В частности, докажите в качестве **упражнения**

$$J'_1(x) = J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}, \quad J_0(x) - J_2(x) = 2J'_1(x),$$

$$J_1(x) + J_3(x) = \frac{4}{x} J_2(x).$$

Формулы (2.17) - (2.19) справедливы для любых, необязательно целых, значений  $p$ . Докажем, для примера, формулу (2.18). Умножим ряд (2.11) на  $x^p$  и продифференцируем по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ x^p J_p(x) \right] &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \frac{x^{2p+2k}}{2^{p+2k}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2p+2k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \frac{x^{2p+2k-1}}{2^{p+2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(p+k)}{\Gamma(k+1)(k+p)\Gamma(k+p)} \frac{x^{2p+2k-1}}{2^{p+2k}} = \\ &= x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p)} \left( \frac{x}{2} \right)^{p+2k-1} = x^p J_{p-1}(x). \end{aligned}$$

Используя асимптотическое приближение (2.16) и рекуррентное соотношение (2.19) легко показать, что

$$\int_0^{\infty} J_1(x) dx = -J_0(x) \Big|_0^{\infty} = 1,$$

а так же

$$\int_0^{\infty} J_0(x) dx = 1.$$

**Упражнение:** 1). докажите формулы (2.19) для целых  $p$ ;  
2). используя рекуррентные формулы (2.19), покажите, что  $J_0(x_*) = J_2(x_*)$ , где  $x_*$  - точка максимума или минимума функции  $J_1(x)$ , и  $J_0(x) = -J_2(x) = J'_1(x)$  для каждого положительного значения корня уравнения  $J_1(x) = 0$ .

Постройте на компьютере в одной плоскости графики функций  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ ,  $J_1'(x)$ ,  $J_2(x)$  и убедитесь, что полученные результаты справедливы.

До настоящего момента достаточно подробно рассматривались случаи целых  $p$ . Однако во многих физических задачах со сферической симметрией возникают функции Бесселя полуцелого порядка  $p = (2n + 1)/2$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Например, решая уравнение (2.4) с  $p = 1/2$  и  $p = -1/2$  с помощью разложения в ряд

$$y(x) = x^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (a_0 \neq 0), \quad (2.20)$$

получим

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (2.21)$$

и

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (2.22)$$

Ясно, что эти два разложения линейно независимы хотя бы потому, что первое начинается с  $x^{1/2}$ , а второй с  $x^{-1/2}$ . Тогда для этого случая общее решение уравнения (2.4) есть

$$y(x) = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x). \quad (2.23)$$

Сравнивая разложения (2.21) и (2.22) с разложением в ряд Маклорена функций  $\sin x$  и  $\cos x$ , получим:

$$J_{1/2} = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x, \quad (2.24)$$

$$J_{-1/2} = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x. \quad (2.25)$$

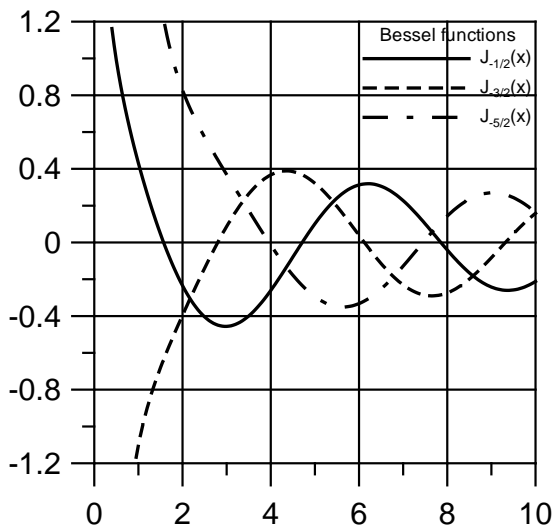


Рис. 2.3. Графики функций  $J_{-1/2}(x)$ ,  $J_{-3/2}(x)$ ,  $J_{-5/2}(x)$

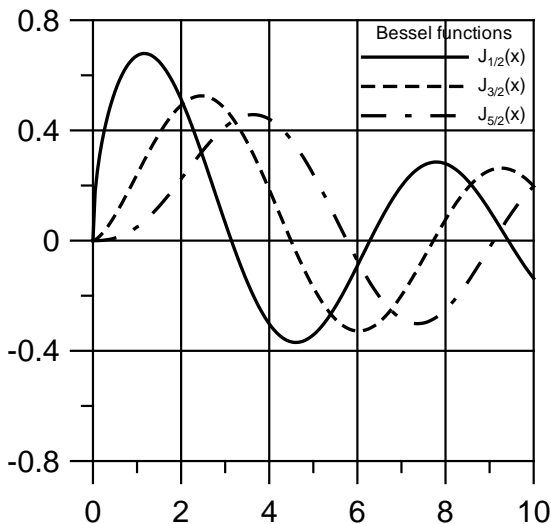


Рис. 2.4. Графики функций  $J_{1/2}(x)$ ,  $J_{3/2}(x)$ ,  $J_{5/2}(x)$

Заметим, что решение (2.24) ограничено при всех значениях  $x$ , функция (2.25) расходится при  $x = 0$ . Напомним, что формула

(2.11) дает разложение функции  $J_p(x)$ , справедливое для любого значения  $p$ . На рис. 2.3 приведены графики для функций  $J_{1/2}(x)$ ,  $J_{3/2}(x)$ ,  $J_{5/2}(x)$ , на рис. 2.4 для  $J_{-1/2}(x)$ ,  $J_{-3/2}(x)$ ,  $J_{-5/2}(x)$ .

**Упражнение:** 1). Используя (2.11), получите функции  $J_{3/2}(x)$ ,  $J_{-3/2}(x)$ ,  $J_{5/2}(x)$ ,  $J_{-5/2}(x)$ . Покажите, что  $J_{3/2}(x)$  и  $J_{-3/2}(x)$  являются линейно независимыми, т.е. общее решение уравнения (2.4) при  $p = 3/2$  есть

$$y(x) = C_1 J_{3/2}(x) + C_2 J_{-3/2}(x). \quad (2.26)$$

2). Используя рекуррентные формулы (2.19) и выражение для  $J_{1/2}(x)$ , получите функции  $J_{3/2}(x)$ ,  $J_{-3/2}(x)$ ,  $J_{5/2}(x)$ ,  $J_{-5/2}(x)$ .

Приведем, для примера, ответ для  $J_{3/2}(x)$

$$J_{3/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right). \quad (2.27)$$

Рассмотрим теперь функции Бесселя второго рода или функции Неймана  $Y_p(x)$  (или  $N_p(x)$ ). Их можно определить следующим образом:

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}. \quad (2.28)$$

Если  $p \neq 0, 1, 2, \dots$ , т.е.  $p$  не является целым числом, формула (2.28) дает линейную комбинацию функций  $J_p(x)$  и  $J_{-p}(x)$  и решение (2.14) может быть переписано в виде

$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x). \quad (2.29)$$

Если  $p$  является целым числом, то в полученном решении (2.29) возникает неопределенность  $0/0$  (согласно (2.28)), которая может быть раскрыта с помощью правила Лопиталья (и, та-

ким образом, (2.29) для  $x > 0$  является общим решением уравнения Бесселя для любых действительных значений  $p$ ).

Подставляя в (2.28) выражения для функций  $J_p(x)$  и  $J_{-p}(x)$  в виде степенных рядов, полученные из (2.11) и (2.12), получим, например, в пределе  $p = 0$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[ J_0(x) \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} h_k \right], \quad (2.30)$$

где  $x > 0$ ,  $\gamma = 0.5772\dots$  - константа Эйлера, которая вычисляется пределом ряда

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \ln n \right), \quad (2.31)$$

$h_k$  определено как

$$h_1 = 1, \quad h_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \quad \text{для } k = 2, 3, 4, \dots \quad (2.32)$$

Приведем результат для целого положительного  $p$  (напомним, что для нецелого  $p$  можно пользоваться формулой (2.28)):

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \frac{x^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k} (h_k + h_{k+n})}{2^{2k+n} (k!) (k+n)!} - \frac{x^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-k-1)! x^{2k}}{2^{2k-n} k!}, \quad (2.33)$$

где  $x > 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $h_0 = 0$ ,  $h_1 = 1$ ,  $h_{k+n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+k}$ .

**Упражнение:** Покажите, что ряды в уравнении (2.33) для  $Y_n(x)$  сходятся при всех значениях  $x$ .

Можно показать, что

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x). \quad (2.34)$$

При  $x \rightarrow 0$  функции  $Y_n(x)$  расходятся логарифмически, при  $x \rightarrow \infty$   $Y_n(x) \rightarrow 0$ , осцилируя с убывающей амплитудой. При больших  $x$  справедливо асимптотическое представление

$$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.35)$$

Следствием из (2.35) является  $\lim_{x \rightarrow \infty} Y_p(x) = 0$ .

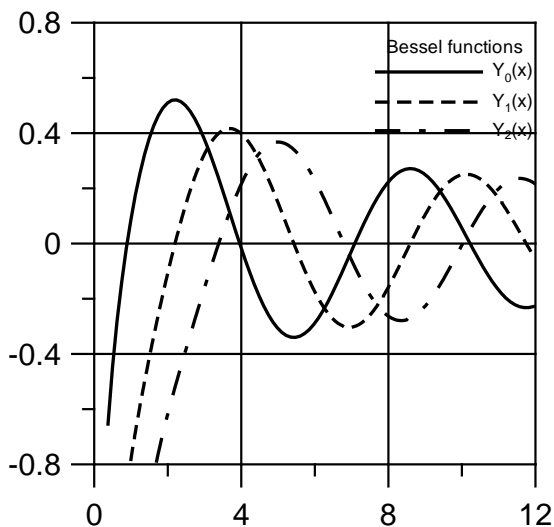


Рис. 2.5. Графики функций  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$

Таблица 2.3

Положительные корни функций  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$

Функция	Корни				
	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$
$Y_0(x)$	0.8936	3.9577	7.0861	10.2223	13.3611
$Y_1(x)$	2.1971	5.4297	8.5960	11.7492	14.8974
$Y_2(x)$	3.3842	6.7938	10.0235	13.2199	16.3789



Цилиндрические функции 3-го рода или функции Ханкеля выражаются через функции 1-го и 2-го рода

$$H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + iY_p(x), \quad H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - iY_p(x). \quad (2.36)$$

Они линейно независимы и часто используются, например, в электродинамике в задачах теории излучения. Их удобство связано, в частности, с тем, что при больших аргументах  $x$  они имеют асимптотические формулы в виде плоской волны:

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left\{i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\}, \\ H_n^{(2)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left\{-i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Отметим, что формулы (2.17)-(2.19) справедливы и для функций Бесселя 2-го и 3-го рода  $Y_p(x)$  и  $H_p^{(1,2)}(x)$ .

Также отметим важный для теории излучения результат

$$e^{ix \cos \theta} = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(x) \cos nx. \quad (2.38)$$

**Упражнение:** 1). Найдите функции  $Y_{1/2}(x)$  и  $H_{1/2}^{(1,2)}(x)$ .

2). Используя рекуррентные соотношения и выражение для  $Y_{1/2}(x)$  и  $H_{1/2}^{(1,2)}(x)$ , найдите соответствующие функции для  $p = \pm 3/2, \pm 5/2$ .

**Упражнение:** Существуют множество соотношений, связывающих функции Бесселя разных типов.

1). Докажите формулу

$$J_p(x)Y_{p+1}(x) - J_{p+1}(x)Y_p(x) = -\frac{2}{\pi x}. \quad (2.39)$$

2). Предполагая, что равенство (2.38) можно почленно интегрировать (объясните почему), получите интегральное представление для функции  $J_0(x)$

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \vartheta} d\vartheta. \quad (2.40)$$

3). Покажите, что

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta}. \quad (2.41)$$

Теперь обсудим довольно часто встречающееся модифицированное уравнение Бесселя

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + p^2)y(x) = 0. \quad (2.42)$$

Заменой переменной  $x = iz$  это уравнение может быть приведено к обычному уравнению Бесселя (2.4)

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - p^2)y(z) = 0. \quad (2.43)$$

Решая уравнение (2.42) методом степенных рядов аналогично тому, как получали решение для уравнения Бесселя (2.4) (или просто сделав замену  $x = iz$  в (2.11)), получим выражение, похожее на формулу (2.11), но без осциллирующего знака

$$\begin{aligned} I_p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k} = \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Эта формула справедлива для произвольных действительных значений  $p$ , в частности, для получения  $I_{-p}$  надо просто заметить в формуле (2.44)  $p$  на  $-p$ .

**Упражнение:** 1.) Покажите, что ряд (2.44) в уравнении для  $I_0(x)$  сходится при всех значениях  $x$ .

Функция  $I_p(x)$  называется *модифицированной функцией Бесселя первого рода*. Очевидно, что соотношение между этой функцией и обычной функцией Бесселя первого рода

$$I_p(x) = i^p J_p(ix). \quad (2.45)$$

Так как ряд (2.45) знакопостоянный, то  $I_p(x)$  монотонно растет с ростом  $x$ . На рис 2.6 показаны графики функций

$I_0(x)$ ,  $I_1(x)$ ,  $I_2(x)$ . Отметим, что  $I_0(0) = 1$ ,  $I_n(0) = 0$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$

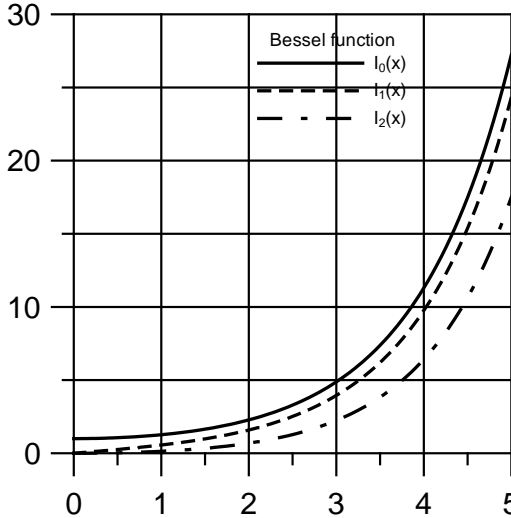


Рис. 2.6. График функций  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$ ,  $I_2(x)$

**Упражнение:** докажите, что аналогично формулам (2.24) - (2.25) для функций  $J_{\pm 1/2}(x)$  функции  $I_{\pm 1/2}(x)$  допускают простое представление

$$I_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \text{sh}(x), \quad I_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{-1/2} \text{ch}(x). \quad (2.46)$$

Другое решение уравнения (2.42) может быть определено следующим образом:

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin p\pi}. \quad (2.47)$$

Функция  $K_p(x)$  называется *модифицированной функцией Бесселя второго рода*. Аналогично соотношению (2.45) существует связь между этой функцией и обычными функциями Бесселя

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2} i^{p+1} H_p^{(1)}(x). \quad (2.48)$$

**Упражнение:** получите соотношение (2.48).

Общим решением уравнения (2.42) является

$$y(x) = C_1 I_p(x) + C_2 K_p(x). \quad (2.49)$$

Если  $p \neq 0, 1, 2, \dots$ , то решение (2.49) есть комбинация линейно независимых функций  $I_p(x)$  и  $I_{-p}(x)$ . Если  $p$  - неотрицательное целое число, то решение (2.49) имеет неопределенность  $0/0$ , которая может быть раскрыта по правилу Лопиталья (и, таким образом, (2.49) для  $x > 0$  является общим решением уравнения Бесселя для любых действительных значений  $p$ ). Выражение для  $K_p(x)$  аналогично выражению для  $Y_p(x)$ . Приведем формулу для  $K_0(x)$

$$K_0(x) = -I_0(x) \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} h_k. \quad (2.50)$$

На рис. 2.7 приведены графики для функций  $K_p(x)$  и  $K_p(x)$ . Для целых значений  $p$  функции  $K_n(x)$  расходятся при  $x \rightarrow 0$  и монотонно уменьшаются с ростом  $x$ .

При постановке краевых задачах обычно говорят о внешней и внутренней краевой задаче. Основное отличие внешней краевой задачи от внутренней состоит в том, что в ней необходимо дополнительно к краевому условию потребовать от решения определенного поведения на бесконечности, обеспечивающего единственность решения и являющегося естественным с точки зрения физического происхождения данной задачи (подробнее см. [1,5]). Например, при рассмотрении распределения температуры внутри шара и в окружающее среде, в первом случае говорят о внутренней краевой задаче, во втором случае - о внешней. При этом обычно ставится условие на значение температуры вдали от тела, т.е. на бесконечности.

Вернемся теперь к уравнению (2.1) с граничными условиями (2.2) и для положительных  $p$  определим собственные значения краевой задачи (спектр чисел  $\lambda$ ) и собственные функции. Условие ограниченности решения в пределе  $r \rightarrow 0$  приводит к тому, что константа  $C_2 = 0$  в решении (2.29), в противном случае функция  $y$  была бы неограничена (в силу неограниченности функции  $Y_p(x)$ ).

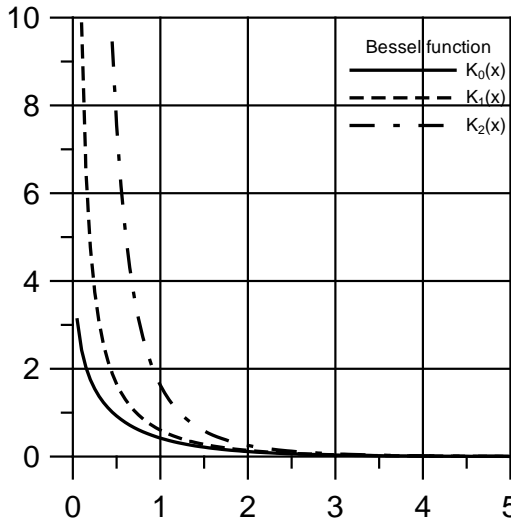


Рис. 2.7. График функций  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$ ,  $K_2(x)$

Условие  $y(l) = 0$  приводит к равенству  $C_1 J_p(\sqrt{\lambda}l) = 0$ . Так как  $C_1 \neq 0$  (при  $C_1 = 0$  мы получили бы тривиальное решение), то  $J_p(\sqrt{\lambda}l) = 0$ . Это означает, что  $\sqrt{\lambda}l$  является корнем уравнения  $J_p(x) = 0$ ; следовательно,  $\sqrt{\lambda}l = \mu_k^{(p)}$  (где  $\mu_1^{(p)}$ ,  $\mu_2^{(p)}$ , ... – положительные корни бesselевой функции  $J_p(x)$ ).

Итак,  $\sqrt{\lambda_k} = \mu_k / l$ ,  $\lambda_k = \mu_k^2 / l^2$ . Следовательно, все собственные числа уравнения (2.1) при краевых условиях (2.2) таковы:

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1^2}{l^2}, \lambda_2 = \frac{\mu_2^2}{l^2}, \dots, \lambda_k = \frac{\mu_k^2}{l^2}, \dots \quad (2.51)$$

Такой результат и следовало ожидать, т.к. эта задача является частным случаем задачи Штурма-Лиувилля, имеющей нетривиальные решения только для неотрицательных собственных значений  $\lambda$ , которые могут быть расположены в виде возрастающей последовательности:

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots \quad (2.52)$$

Собственные функции

$$y_1 = J_p\left(\frac{\mu_1}{l}r\right), y_2 = J_p\left(\frac{\mu_2}{l}r\right), \dots, y_k = J_p\left(\frac{\mu_k}{l}r\right) \quad (2.53)$$

(эти собственные функции мы нашли из равенства (2.13), учтя, что  $C_2 = 0$ ,  $\sqrt{\lambda_k} = \mu_k/l$ . В качестве  $C_1$  можно принять любое, отличное от нуля, число; здесь взято  $C_1 = 1$ ). Отсюда, в частности, следует, что функция  $J_p(x)$  имеет бесконечное множество корней. Действительно, каждый корень  $\mu$  удовлетворяет равенству  $\mu = \sqrt{\lambda}$ , а собственных чисел  $\lambda$ , как известно, бесконечно много.

Укажем на некоторые свойства этих собственных решений (они справедливы при произвольных значениях  $p$ , необязательно целых):

1. Каждому собственному числу  $\lambda_k = \mu_k^2/l^2$  соответствует (с точностью до постоянного множителя) только одна собственная функция, в данном случае,  $J_p(\mu_k r/l)$ .
2. Любые две собственные функции из последовательности

$$J_p\left(\frac{\mu_1}{l}r\right), J_p\left(\frac{\mu_2}{l}r\right), \dots, J_p\left(\frac{\mu_k}{l}r\right), \dots$$

ортогональны друг другу с весом  $x$  на отрезке  $[0, l]$ . Это значит, что для любых  $k$  и  $j$  ( $k \neq j$ ) справедливо равенство

$$\int_0^l J_p \left( \frac{\mu_k}{l} r \right) J_p \left( \frac{\mu_j}{l} r \right) r dr = 0.$$

Свойство (2.54) будет доказано в следующем параграфе.

### 2.3. Ортогональность и нормировка

Естественно поставить вопрос: чему равен интеграл (2.17) при  $k = j$ ? Докажем, что имеет место равенство

$$\int_0^l \left[ J_p \left( \frac{\mu_k}{l} x \right) \right]^2 x dx = \frac{l^2}{2} \left[ J_p'(\mu_k) \right]^2. \quad (2.55)$$

Равенства (2.54) и (2.55) используются в теории рядов Фурье-Бесселя.

Выведем сначала формулу (2.55) для того частного случая, когда  $l = 1$ , т.е. докажем равенство

$$\int_0^1 \left[ J_p(\mu_k x) \right]^2 x dx = \frac{1}{2} \left[ J_p'(\mu_k) \right]^2 \quad (2.56)$$

Для его доказательства рассмотрим уравнение (2.4), которому удовлетворяет любая функция  $J_p(\nu x)$

$$(xy)' + \left( \nu^2 x - \frac{p^2}{x} \right) y = 0.$$

Здесь  $\nu = \sqrt{\lambda}$ . Подставляя в это уравнение функцию  $J_p(\nu x)$ , получим тождество

$$\left( x \frac{d}{dx} J_p(\nu x) \right)' + \left( \nu^2 x - \frac{p^2}{x} \right) J_p(\nu x) \equiv 0. \quad (2.57)$$

Беря, в частности,  $\nu = \mu_k$ , будем иметь

$$\left( x \frac{d}{dx} J_p(\mu_k x) \right)' + \left( \mu_k^2 x - \frac{p^2}{x} \right) J_p(\mu_k x) \equiv 0. \quad (2.58)$$

Умножая все члены равенства (2.58) на  $J_p(\nu x)$  и все члены равенства (2.57) на  $J_p(\mu_k x)$  и приведя подобные слагаемые, получим

$$J_p(vx) \left( x \frac{d}{dx} J_p(\mu_k x) \right)' - J_p(\mu_k x) \left( x \frac{d}{dx} J_p(vx) \right)' + (\mu_k^2 - v^2) x J_p(\mu_k x) J_p(vx) \equiv 0.$$

Возьмем интеграл от этого тождество в пределах от 0 до 1, первые два слагаемых проинтегрируем по частям; тогда после сокращений получим

$$\left[ J_p(vx) x \frac{d}{dx} J_p(\mu_k x) - J_p(\mu_k x) x \frac{d}{dx} J_p(vx) \right]_0^1 = (\mu_k^2 - v^2) \int_0^1 x J_p(\mu_k x) J_p(vx) dx$$

или

$$\left[ J_p(vx) x J_p'(\mu_k x) - J_p(\mu_k x) x J_p'(vx) \right]_0^1 = (\mu_k^2 - v^2) \int_0^1 x J_p(\mu_k x) J_p(vx) dx.$$

Подставляя границы 0 и 1 в левую часть равенства и учитывая, что  $\mu_k$  – корень функции  $J_p(x)$ , перепишем это равенство следующим образом:

$$\mu_k J_p(v) J_p'(\mu_k) = (v^2 - \mu_k^2) \int_0^1 x J_p(\mu_k x) J_p(vx) dx$$

или

$$\int_0^1 x J_p(\mu_k x) J_p(vx) dx = \frac{\mu_k J_p(v) J_p'(\mu_k)}{v^2 - \mu_k^2}. \quad (2.59)$$

Если теперь устремить  $v$  к  $\mu_k$ , то мы получаем искомый интеграл (неопределенность типа 0/0 в правой части равенства (2.59) раскроем по правилу Лопиталья)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x [J_p(\mu_k x)]^2 dx &= \lim_{v \rightarrow \mu_k} \int_0^1 x J_p(\mu_k x) J_p(vx) dx = \\ &= \lim_{v \rightarrow \mu_k} \frac{\mu_k J_p(v) J_p'(\mu_k)}{v^2 - \mu_k^2} = \lim_{v \rightarrow \mu_k} \frac{\mu_k J_p'(v) J_p'(\mu_k)}{2v} = \frac{1}{2} [J_p'(\mu_k)]^2. \end{aligned}$$



Итак,  $\int_0^1 [J_p(\mu_k x)]^2 x dx = \frac{1}{2} [J'_p(\mu_k)]^2$ . Равенство (2.56) доказано.

Для того чтобы теперь вывести формулу (2.55) в общем виде (т.е. для любого  $l > 0$ ), сделаем в интеграле

$\int_0^l \left[ J_p \left( \frac{\mu_k}{l} x \right) \right]^2 x dx$  замену переменной  $x/l = z$ . Тогда

$$\int_0^l \left[ J_p \left( \frac{\mu_k}{l} x \right) \right]^2 x dx = l^2 \int_0^1 [J_p(\mu_k z)]^2 z dz = \frac{l^2}{2} [J'_p(\mu_k)]^2.$$

Таким образом, вывод формулы (2.55) завершен.

Теперь заметим, что если в равенство (2.59) подставить  $\nu = \mu_i$  ( $i \neq k$ ), то мы получим

$$\int_0^1 x J_p(\mu_k x) J_p(\mu_i x) dx = 0,$$

откуда следует сформулированная ранее ортогональность функций Бесселя (2.54).

В заключение укажем на некоторую аналогию между совокупностью собственных решений тригонометрического урав-

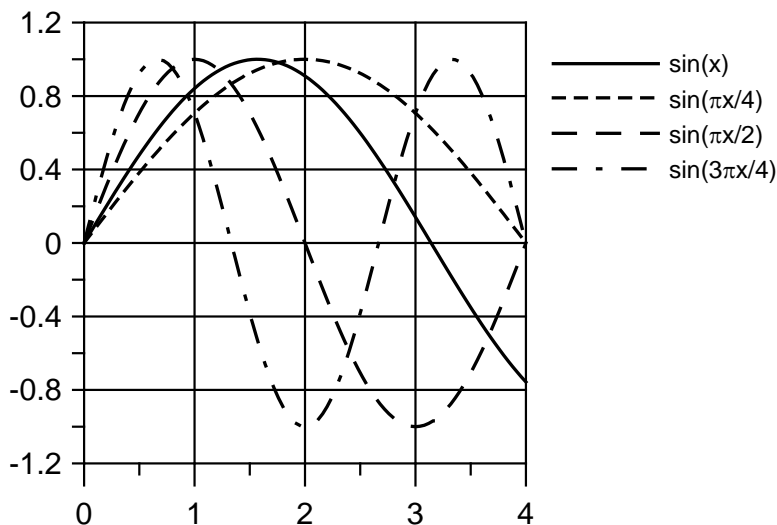


Рис. 2.8. График функции  $\sin(x)$  и трех базисных функций

нения  $y'' + \lambda y = 0$  (при краевых условиях  $y(0) = 0$ ,  $y(l) = 0$ ) и совокупностью собственных решений уравнения (2.1) при краевых условиях (2.2).

Обозначим через  $\mu_1 < \mu_2 < \dots$  положительные корни уравнения  $\sin x = 0$  (т.е.  $\mu = k\pi$ ). Тогда собственные решения краевой задачи для уравнения  $y'' + \lambda y = 0$  могут быть записаны так:

$$\sin \frac{\mu_1}{l} x, \sin \frac{\mu_2}{l} x, \dots, \sin \frac{\mu_k}{l} x, \dots$$

Графики всех этих функций получаются из графика функции  $y = \sin x$  сжатием вдоль оси  $Ox$  так, что отрезки  $[0, \mu_1]$ ,  $[0, \mu_2]$ , ...,  $[0, \mu_k]$  ... переходят в отрезок  $[0, l]$  оси  $Ox$ ; для наглядности начертим график функции  $y = \sin x$  и графики трех первых собственных функций (ясно, что собственные функции нужно строить только на интересующем нас отрезке  $(0, l)$ ) (см. рис. 2.8).

Теперь построим несколько последовательных собственных решений уравнения

$$(xy)' - \frac{p^2}{x} y + \lambda xy = 0.$$

Их графики также получаются из графика функции  $y = J_p(x)$  сжатием вдоль оси  $Ox$  так, чтобы отрезки  $[0, \mu_1]$ ,  $[0, \mu_2]$ , ...,  $[0, \mu_k]$  ... перешли в отрезок  $[0, l]$ ; здесь  $\mu_k$  – положительные корни функции  $J_p(x)$ .

Построим график функции  $y = J_p(x)$  и графики трех первых собственных решений данной краевой задачи (на рис. 2.9 построение проведено для случая  $p = 0$  с использованием программы **FourierSeries**).

Очевидна аналогия между решениями этих двух уравнений.

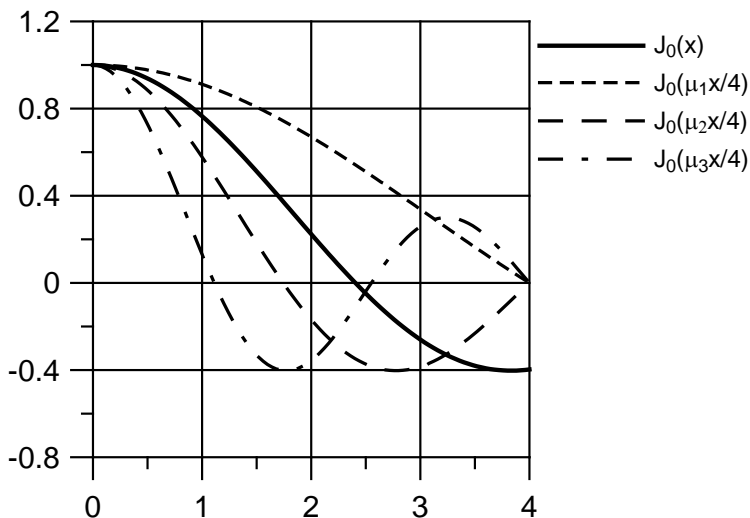


Рис. 2.9. График функции  $J_0(x)$  и трех базисных функций

## 2.4. Ряды Фурье-Бесселя

В предыдущем разделе было показано, что существует бесконечное количество ортогональных наборов функций Бесселя, по одному для каждого заданного значения  $p$ . Таким образом при фиксированном  $p$  система функций

$$J_p\left(\frac{\mu_1}{l}x\right), J_p\left(\frac{\mu_2}{l}x\right), \dots, J_p\left(\frac{\mu_k}{l}x\right), \dots \quad (2.60)$$

ортогональна с весом  $x$  на интервале  $(0, l)$  (здесь  $p \geq 0$  – фиксированное действительное число,  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots$  – все положительные корни функции  $J_p(x)$ ).

Ряд Фурье для функции  $f(x)$  по этой ортогональной системе называется рядом Фурье-Бесселя функции  $f(x)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_p\left(\frac{\mu_k}{l}x\right). \quad (2.61)$$

Условие ортогональности позволяет найти коэффициенты этого ряда. Умножим равенство (2.61) на  $J_p\left(\frac{\mu_k}{l}x\right)$  и, интегрируя почленно с весом  $x$ , получим

$$c_k = \frac{\int_0^l f(x) J_p\left(\frac{\mu_k}{l}x\right) x dx}{\int_0^l x \left[ J_p\left(\frac{\mu_k}{l}x\right) \right]^2 dx}. \quad (2.62)$$

Интеграл, стоящий в знаменателе (2.62), был вычислен раньше

$$\int_0^l x \left[ J_p\left(\frac{\mu_k}{l}x\right) \right]^2 dx = \frac{l^2}{2} \left[ J'_p(\mu_k) \right]^2.$$

Итак, формулы для коэффициентов ряда Фурье-Бесселя можно привести к следующему виду:

$$c_k = \frac{2}{l^2 \left[ J'_p(\mu_k) \right]^2} \int_0^l f(x) J_p\left(\frac{\mu_k}{l}x\right) x dx. \quad (2.63)$$

Говоря о сходимости ряда (2.61), заметим, что последовательность сумм ряда (2.61) сходится на интервале  $(0; l)$  в среднем к  $f(x)$  (с весом  $x$ ), т.е.

$$\int_0^l [f(x) - S_n(x)]^2 x dx \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Это свойство имеет место для любой функции  $f(x)$  из класса кусочно-непрерывных функций, т.к. ортогональная система (2.60) замкнута в этом классе, другими словами, система функций (2.60) полна на интервале  $[0, l]$  (см. обсуждение вопроса о замкнутости системы собственных функций в [1;3;5]). Для таких функций  $f(x)$  ряд (2.61) сходится абсолютно и равномерно. Приведем без доказательства следующую теорему:

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  кусочно-непрерывна на интервале  $(0, l)$ , тогда ряд Фурье-Бесселя сходится к  $f(x)$  в точках ее непрерывности и к

$$\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)],$$

если  $x_0$  есть точка простого разрыва функции  $f(x)$ .

Скорость сходимости ряда (2.61) зависит от согласованности значений функции  $f(x)$  и собственных функций  $J_p(\mu_k x/l)$  на концах интервала  $[0, l]$ . Если  $f(x) = aJ_p(\mu_k x/l)$  (здесь  $a$  - некоторая постоянная) на обеих границах интервала  $[0, l]$ , то ряд

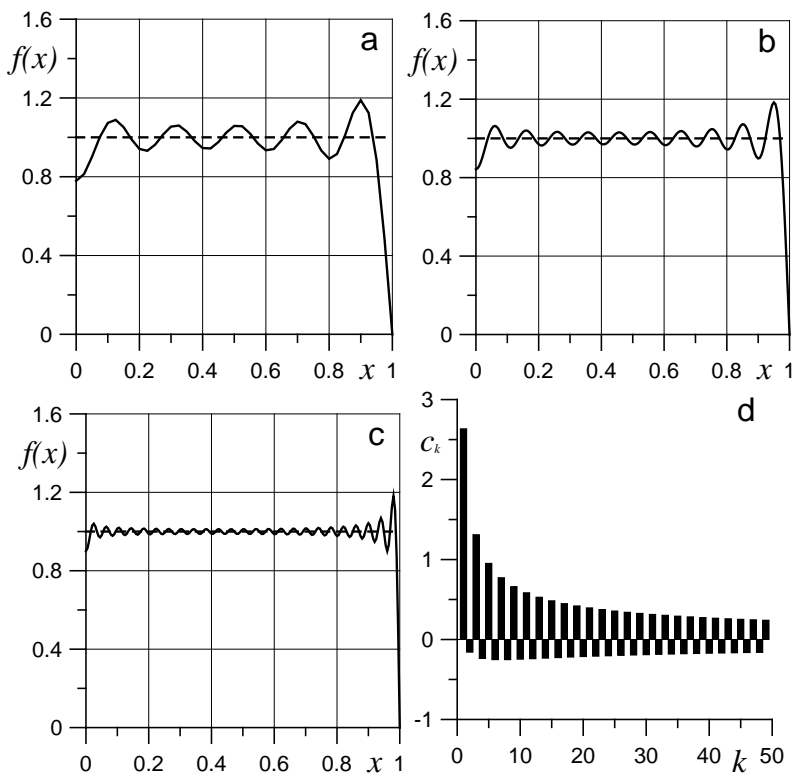


Рис. 2.10. Функция  $f(x) = 1$  и частичная сумма ряда Фурье-Бесселя (2.61) График  $f(x) = 1$  - штриховая линия, график ряда (2.61) – сплошная линия:  $a$ - удерживается 10 слагаемых в ряде (2.61) ( $k = 9$ ),  $b$  -  $k = 19$ ,  $c$  -  $k = 49$ ;  $d$  - значения коэффициентов  $c_k$  ряда (2.61), вычисляемые по формуле (2.64)

является хорошо обусловленным. Рассмотрим несколько примеров разложения функций в ряд Фурье-Бесселя. В этих примерах коэффициенты ряда могут быть найдены аналитически, но в большинстве случаев они вычислялись с помощью программы Fourier Series. Кроме того, это позволяет изменять число слагаемых в частичной сумме ряда и исследовать различные частные случаи.

1. Разложим функцию  $f(x) = 1$  в ряд по функциям  $J_0(\mu_k^{(0)}x)$  на интервале  $[0,1]$ , где  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $J_0(\mu_k^{(0)}) = 0$ . Для нахождения коэффициентов разложения ряда Фурье-Бесселя (2.61) воспользуемся формулой (2.63)

$$c_k = \frac{2}{\left[J_0'(\mu_k^{(0)})\right]^2} \int_0^1 J_0(\mu_k^{(0)}x) x dx = \frac{2}{J_1^2(\mu_k^{(0)})} \frac{J_1(\mu_k^{(0)})}{\mu_k^{(0)}} = \frac{2}{\mu_k^{(0)} J_1(\mu_k^{(0)})} \quad (2.64)$$

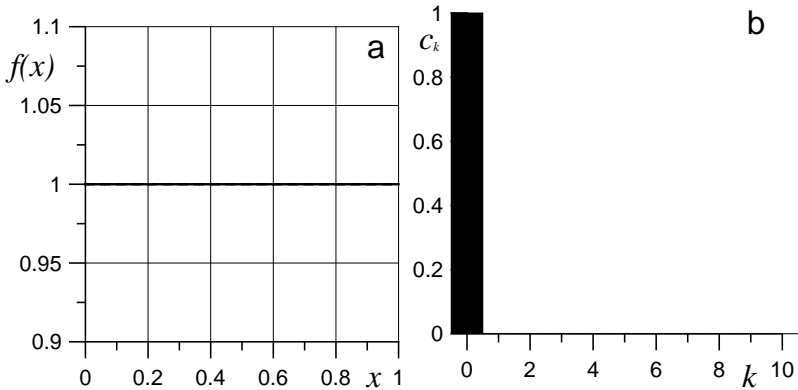


Рис. 2.11. Функция  $f(x) = 1$  и частичная сумма ряда Фурье-Бесселя (2.61)

График  $f(x) = 1$  - штриховая линия, график ряда (2.61) – сплошная линия:

*a* - удерживается 1 слагаемое в ряде (2.61) ( $k = 0$ );

*b* - значения коэффициентов  $c_k$  ряда (2.61), вычисляемые по формуле (2.63)

При вычислении (2.64) воспользовались рекуррентными формулами (2.18), (2.19).

На рис. 2.10 построена функция  $f(x) = 1$  и разложение в ряд Фурье-Бесселя (2.61). Из этого рисунка видно, что ряд сходится очень медленно (см. рис. 2.10, *d*) и даже при удержании 50 слагаемых (рис. 2.10, *a*) отличие от  $f(x) = 1$  довольно заметно. Это связано с тем, что на концах интервала значение функции  $f(x) = 1$  и функций  $J_0(\mu_k^{(0)}x)$  различны, в результате чего полученное разложение плохо сходится вблизи концов интервала.

2. Изменим граничное условие в предыдущей задаче. Пусть теперь  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $J_0'(\mu_k^{(0)}) = 0$ . На рис. 2.11 построена функция  $f(x) = 1$  и ее разложение в ряд Фурье-Бесселя. Из приведенного рисунка видно, что только одно слагаемое в разложении (2.61) отлично от нуля. Это связано с тем, что  $\mu_0^{(0)} = 0$ ,  $J_0(\mu_0^{(0)}x) = 1$ ,  $c_0 = 1$ , поэтому  $c_0 J_0(\mu_0^{(0)}x) = 1$  – слагаемое ряда Фурье-Бесселя (2.61) при  $k = 0$ . Кроме того, из соотношения (2.17) известно, что

$$J_0'(x) = -J_1(x) \quad \text{и} \quad \int_0^1 J_0(\mu_0^{(0)}x) x dx = \int_0^1 J_0(0)x dx = \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad k = 0,$$

$$\int_0^1 J_0(\mu_k^{(0)}x) = \frac{1}{\mu_k^{(0)}} J_1(\mu_k^{(0)}x) \Big|_0^1 = -\frac{1}{\mu_k^{(0)}} J_0'(\mu_k^{(0)}x) \Big|_0^1 = 0 \quad \text{при} \quad k \geq 1.$$

Следовательно, получаем простое разложение  $f(x) = c_0 J_0(\mu_0^{(0)}x) = 1$ . Фактически, это означает, что функция  $f(x)$  сама является одной из функций, по которым  $f(x)$  раскладывают в ряд Фурье. В приведенном примере  $f(x) = 1 = J_0(\mu_0^{(0)}x)$ .

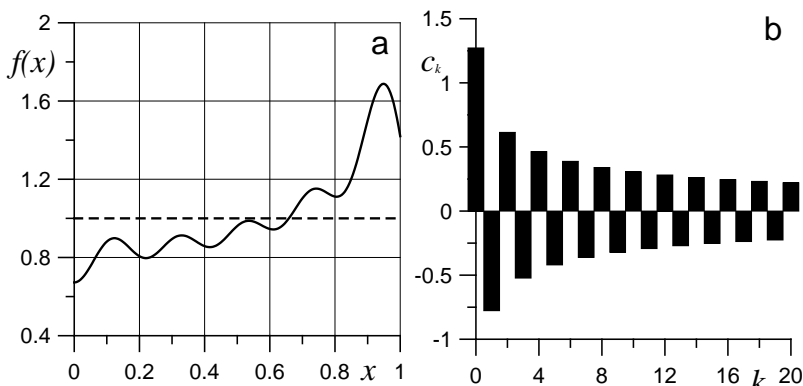


Рис. 2.12. Функция  $f(x) = 1$

и частичная сумма ряда Фурье-Бесселя (2.61)

График  $f(x) = 1$  - штриховая линия, график ряда (2.61) – сплошная линия: *a* - удерживается 10 слагаемых в ряде (2.61) ( $k = 9$ ); *b* - значения коэффициентов  $c_k$  ряда (2.61), вычисляемые по формуле (2.65)

В различных приложениях часто встречаются задачи на собственные решения для уравнения Бесселя, решениями которого являются функции Бесселя определенного порядка  $n$ . При этом граничные условия для этой задачи могут содержать функции Бесселя других порядков. Например, при рассмотрении колебания кольцевой мембраны (см. задачу 21) или упругой пластины (см. пример 15). Поэтому довольно часто встречаются ситуации, когда разложение некоторой функции  $f(x)$  в ряд Фурье на отрезке  $0 \leq x \leq l$  проводят, например, по функциям  $J_n(\mu_k^{(n)} x/l)$ , где  $\mu_k^{(n)}$  является решением некоторого алгебраического уравнения  $F(J_m(x), J'_m(x), \dots) = 0$ , которое получается из граничного условия.

**3.** Рассмотрим теперь случай смешанного граничного условия. Пусть  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $J_0(\mu_k^{(0)}) + J'_0(\mu_k^{(0)}) = 0$ . Это уравнение можно записать в виде  $J_0(\mu_k^{(0)}) - J_1(\mu_k^{(0)}) = 0$ . Для нахождения коэффициентов разло-



жения ряда Фурье-Бесселя (2.61) воспользуемся формулой (2.63) и соотношениями (2.17)-(2.19)

$$c_k = \frac{2}{\left[ J_0'(\mu_k^{(0)}) \right]^2} \int_0^1 J_0(\mu_k^{(0)} x) x dx = \frac{2}{J_0^2(\mu_k^{(0)}) + J_1^2(\mu_k^{(0)})} \frac{J_1(\mu_k^{(0)})}{\mu_k^{(0)}} =$$

$$= \frac{2J_1(\mu_k^{(0)})}{\mu_k^{(0)} \left( J_0^2(\mu_k^{(0)}) + J_1^2(\mu_k^{(0)}) \right)} = \frac{1}{\mu_k^{(0)} J_0(\mu_k^{(0)})}.$$

На рис. 2.12 показан график функции  $f(x) = 1$  и ее разложение в ряд Фурье-Бесселя. В отличие от предыдущего случая, в данном примере имеется целый спектр  $c_k$  (2.65) и график частичной суммы ряда (2.61) отличается от графика функции  $f(x)$ . Еще раз отметим, что в данном примере граничные условия не согласуются со значениями функции на концах интервала.

**4.** Разложим функцию  $f(x) = 1$  в ряд по функциям  $J_2(\mu_k^{(2)} x)$  на интервале  $[0, 1]$ , где  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $J_2(\mu_k^{(2)}) = 0$ . Коэффициенты разложения  $c_k$  ряда Фурье-Бесселя вычисляются по формуле (2.63) с использованием соотношений (2.17)-(2.19)

$$c_k = \frac{2}{\left[ J_2'(\mu_k^{(2)}) \right]^2} \int_0^1 J_2(\mu_k^{(2)} x) x dx =$$

$$= \frac{2 \left( 2 - 2J_0(\mu_k^{(2)}) - \mu_k^{(2)} J_1(\mu_k^{(2)}) \right)}{\mu_k^{(2)2} J_0^2(\mu_k^{(2)}) + (\mu_k^{(2)2} - 4) J_1^2(\mu_k^{(2)})}. \quad (2.66)$$

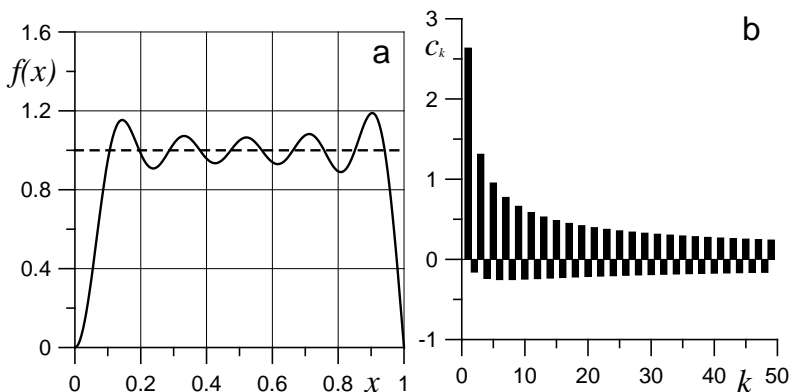


Рис. 2.13. Функция  $f(x) = 1$

и частичная сумма ряда Фурье-Бесселя (2.61)

График  $f(x) = 1$  - штриховая линия, график ряда (2.61) – сплошная линия:  $a$  - удерживается 10 слагаемых в ряде (2.61) ( $k = 9$ );  $b$  - значения коэффициентов  $c_k$  ряда (2.61), вычисляемые по формуле (2.63)

График функции и ее ряд Фурье-Бесселя (2.61) со значениями коэффициентов разложения (2.66) показан на рис. 2.13. Ряд получился плохо сходящимся на концах интервала. Это связано с тем, что, как и в рассмотренных выше случаях, на концах интервала сама функция  $f(x)$  и базисные функции  $J_2(\mu_k^{(2)}x)$  принимают принципиально разные значения на концах интервала:  $f(0) = 1$ ,  $J_2(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $J_2(\mu_k^{(2)}) = 0$ . То есть базисные функции на концах интервала равны нулю, а значения функции  $f(x)$  на концах интервала отличны от нуля, вследствие чего нельзя получить зависимость вида  $f(x) = aJ_2(\mu_k^{(2)}x)$  при  $x = 0$  и  $x = 1$  для всех значений числа  $a$ .

**5.** Разложим функцию  $f(x) = 1$  в ряд по функциям  $J_2(\mu_k^{(2)}x)$  на интервале  $[0, 1]$ , где  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $J_2'(\mu_k^{(2)}) = 0$ .

График функции и ее ряд Фурье-Бесселя (2.61) со значениями коэффициентов разложения (2.66) показаны на рис. 2.14. Как и в рассмотренном выше случае, разложение в ряд получилось плохо обусловленным, что связано с несоответствием значений разлагаемой функции  $f(x)$  и функций разложения  $J_2(\mu_k^{(2)}x)$  на левом конце интервала при  $x=0$ :  $f(0)=1$ ,  $J_2(0)=0$ . Однако значения совпадают при  $x=1$ :

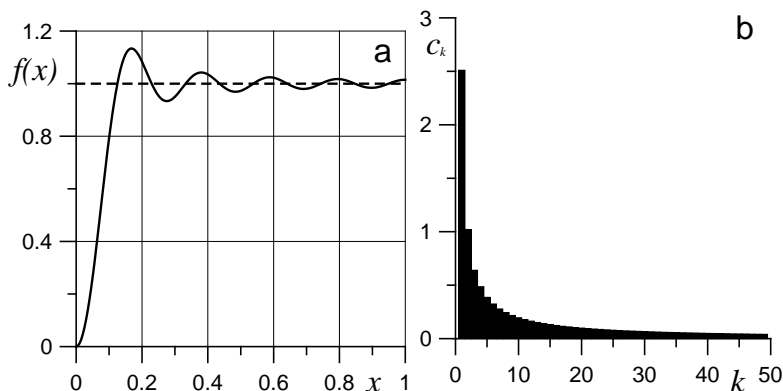


Рис. 2.14. Функция  $f(x) = 1$

и частичная сумма ряда Фурье-Бесселя (2.61)

График  $f(x) = 1$  - штриховая линия, график ряда (2.61) – сплошная линия: *a* - удерживается 10 слагаемых в ряде (2.61) ( $k = 9$ ); *b* - значения коэффициентов  $c_k$  ряда (2.61), вычисляемые по формуле (2.66)

$f'(1) = J_2'(\mu_k^{(2)}) = 0$ , поэтому ряд (2.61) сходится быстрее, чем в предыдущем случае (за исключением области вблизи  $x = 0$ , где ряд, как в этом случае, так и в предыдущем, сходится очень медленно, что связано с несогласованием значения разлагаемой функции и функций разложения).

**6.** Разложим функцию  $f(x) = 1 - x$  в ряд по функциям  $J_0(\mu_k^{(0)}x)$  на интервале  $[0,1]$ , где  $\mu_k$  – корни уравнения

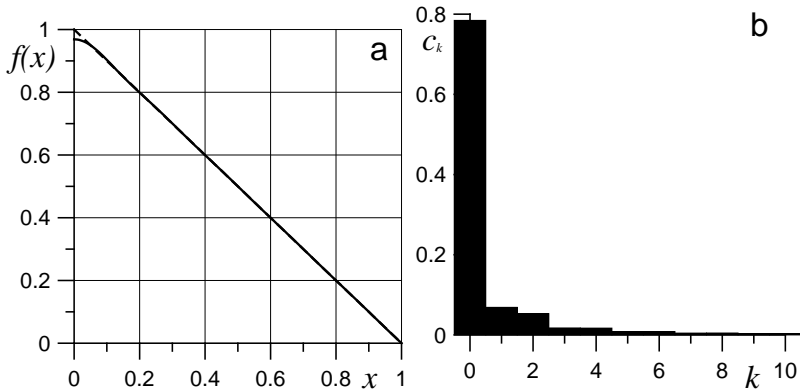


Рис. 2.15. Функция  $f(x) = 1$

и частичная сумма ряда Фурье-Бесселя (2.61)

График  $f(x) = 1 - x$  - штриховая линия, график ряда (2.61) – сплошная:  $a$  - удерживается 10 слагаемых в ряде (2.61) ( $k = 9$ );  $b$  - значения коэффициентов  $c_k$  ряда (2.61), вычисляемые по формуле (2.63)

$J_0(\mu_k^{(0)}) = 0$ . Вычисление коэффициентов разложения  $c_k$  (2.63) рассмотрено ниже в примере 1. На рис. 2.15 построен график ряда Фурье-Бесселя и коэффициенты разложения.

**7.** Разложим функцию  $f(x) = 1 - x$  в ряд по функциям  $J_0(\mu_k^{(0)}x)$  на интервале  $[0,1]$ , где  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $J_0'(\mu_k^{(0)}) = 0$ . На рис. 2.16 показаны график ряда Фурье-Бесселя и коэффициенты разложения.

**8.** Разложим функцию  $f(x) = x^2$  в ряд по функциям  $J_0(\mu_k^{(0)}x)$  на интервале  $[0,1]$ , где  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $J_0(\mu_k^{(0)}) = 0$ . На рис. 2.17 показаны график неполного ряда Фурье-Бесселя и коэффициенты разложения.

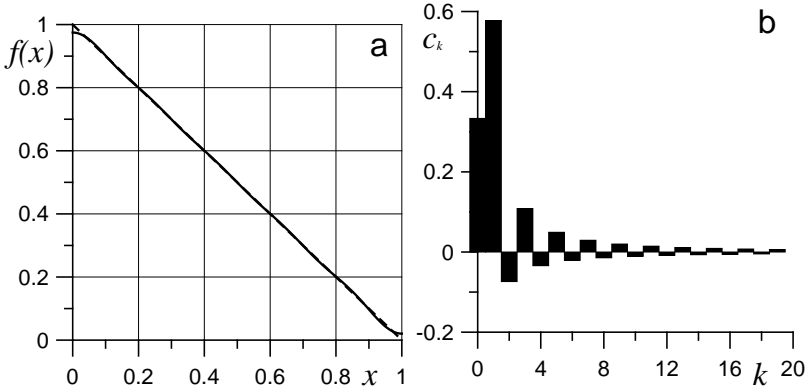


Рис. 2.16. Функция  $f(x) = x^2$

и частичная сумма ряда Фурье-Бесселя (2.61)

График  $f(x) = x^2$  - штриховая линия, график ряда (2.61) – сплошная линия: *a* - удерживается 10 слагаемых в ряде (2.61) ( $k = 9$ ); *b* - значения коэффициентов  $c_k$  ряда (2.61), вычисляемые по формуле (2.63)

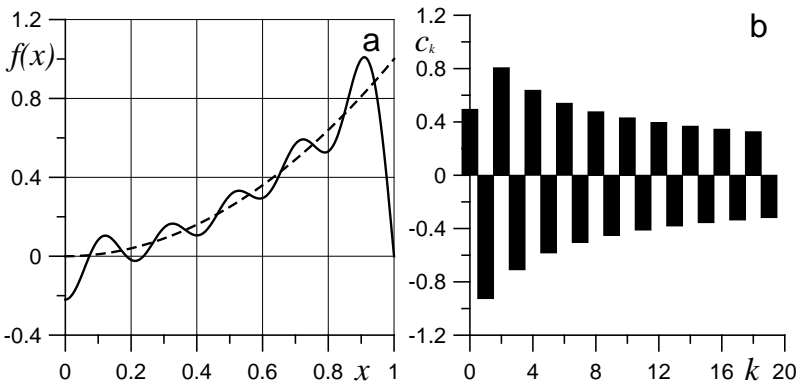


Рис. 2.17. Функция  $f(x) = 1 - x$

и частичная сумма ряда Фурье-Бесселя (2.61)

График  $f(x) = 1 - x$  - штриховая линия, график ряда (2.61) – сплошная линия: *a* - удерживается 10 слагаемых в ряде (2.61) ( $k = 9$ ); *b* - значения коэффициентов  $c_k$  ряда (2.61), вычисляемые по формуле (2.63)



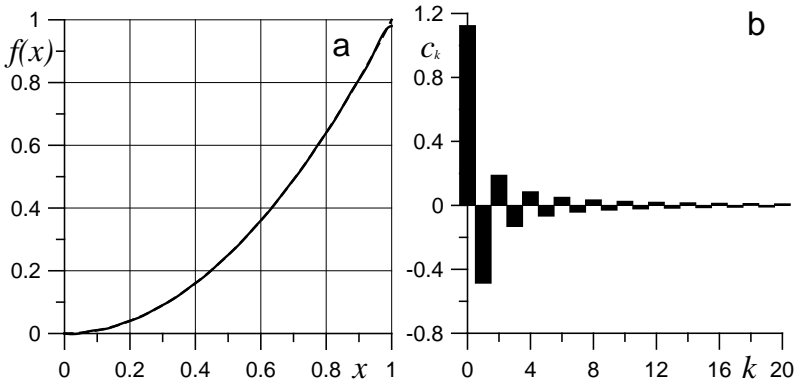


Рис.2.19. Функция  $f(x) = x^2$  и частичная сумма ряда Фурье-Бесселя. График  $f(x) = x^2$  - штриховая линия, график ряда (2.61) – сплошная линия:  $a$  - удерживается 20 слагаемых в ряде (2.61) ( $k = 19$ );  $b$  - значения коэффициентов  $c_k$  ряда (2.61), вычисляемые по формуле (2.63)

**Пример 1.** Разложить в ряд по функциям

$$J_0(\mu_1^{(0)}x), J_0(\mu_2^{(0)}x), \dots, J_0(\mu_k^{(0)}x), \dots$$

функцию  $f(x) = 1 - x$  на интервале  $(0, 1)$ , где  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $J_0(\mu_k^{(0)}) = 0$ .

**Решение.** Искомый ряд будет иметь вид

$$1 - x = c_1 J_0(\mu_1 x) + c_2 J_0(\mu_2 x) + \dots,$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$c_k = \frac{2}{[J_0'(\mu_k)]^2} \int_0^1 x(1-x) J_0(\mu_k x) dx$$

или, после замены переменной  $\mu_k x = z$ ,

$$c_k = \frac{2}{[J_0'(\mu_k)]^2} \left[ \frac{1}{\mu_k^2} \int_0^{\mu_k} z J_0(z) dz - \frac{1}{\mu_k^2} \int_0^{\mu_k} z^2 J_0(z) dz \right].$$

Для упрощения этого выражения используем формулы дифференцирования функций  $J_0(x)$  и  $xJ_1(x)$ , а также вытекающее из них равенство  $\int z J_0(z) dz = zJ_1(z) + C$ . Применяя эти формулы

(второе слагаемое дважды интегрируется по частям), получим после упрощений

$$c_k = \frac{2}{[J_0'(\mu_k)]^2 \mu_k^2} \int_0^{\mu_k} J_0(z) dz.$$

Подсчитаем, в частности,  $c_1$  и  $c_2$  используя таблицы для  $J_1(x)$

и вычисляя интеграл  $\int_0^{\mu_k} J_0(z) dz$  с помощью разложения функции  $J_0(z)$  в степенной ряд, получим эти коэффициенты

$$c_1 = 0.7845, \quad c_2 = 0.0687.$$

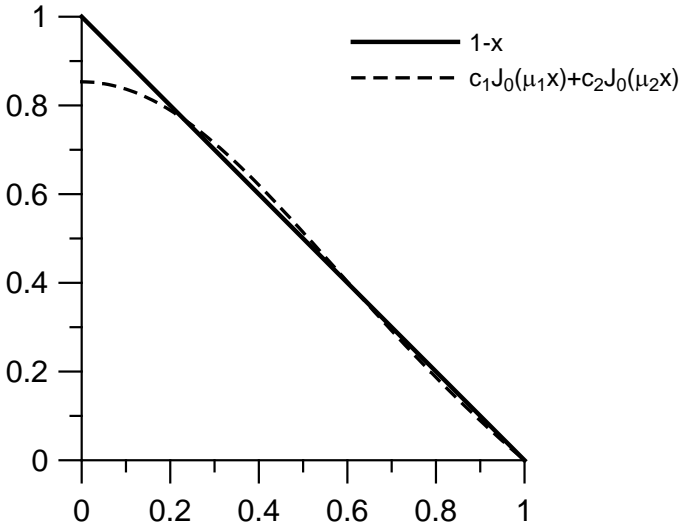


Рис. 2.20. Функция  $f(x) = 1 - x$  (сплошная линия) и частичная сумма (два слагаемых) ряда Фурье-Бесселя (штриховая)

Кроме того,  $c_1$  и  $c_2$  можно найти, используя программу **FourierSeries** или любой пакет аналитических вычислений. Следовательно, первые два члена искомого ряда Фурье таковы:

$$1 - x = 0.7845 \cdot J_0(2.4048x) + 0.0687 \cdot J_0(5.5201x) + \dots$$



График функции  $f(x) = 1 - x$  и частичной суммы ряда приведен на рис. 2.20.

**Пример 2.** Разложить функцию

$$f(x) = A, \quad A = \text{const},$$

заданную на интервале  $[0, l]$ , в ряд Фурье по функциям Бесселя 1-го рода

$$X_k(x) = J_0(\mu_k^{(0)} x / l),$$

где  $\mu_k^{(0)}$  – положительные корни уравнения

$$J_0(\mu_k^{(0)}) = 0.$$

**Решение.** Вычислим норму  $\|X_k\|^2 = \|J_0(\mu_k^{(0)} x / l)\|^2$  с учетом соотношения  $J_0'(x) = -J_1(x)$

$$\|J_0(\mu_k^{(0)} x / l)\|^2 = \frac{l^2}{2} [J_0'(\mu_k^{(0)})]^2 = \frac{l^2}{2} [J_1(\mu_k^{(0)})]^2.$$

Для вычисления коэффициентов  $c_k$  воспользуемся следующими соотношениями для функций Бесселя первого рода:

$$\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x),$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x).$$

Вычислим интегралы (с помощью подстановки  $z = \mu_k^{(0)} x / l$ )

$$\begin{aligned} \int_0^l J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{l} x\right) x dx &= \frac{l^2}{(\mu_k^{(0)})^2} \int_0^{\mu_k^{(0)}} J_0(z) z dz = \\ &= \frac{l^2}{(\mu_k^{(0)})^2} [z J_1(z)]_0^{\mu_k^{(0)}} = \frac{l^2}{\mu_k^{(0)}} J_1(\mu_k^{(0)}) \end{aligned}$$

Тогда

$$c_k = \frac{1}{\|J_0(\mu_k^{(0)}x/l)\|^2} \int_0^l A J_0(\mu_k^{(0)}x/l) x dx =$$

$$= \frac{A}{l^2 [J_1(\mu_k^{(0)})]^2} \frac{l^2}{\mu_k^{(0)}} J_1(\mu_k^{(0)}) = \frac{A}{\mu_k^{(0)} J_1(\mu_k^{(0)})}.$$

Искомое разложение

$$f(x) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^{(0)} J_1(\mu_k^{(0)})} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{l} x\right). \quad (2.67)$$

На рис. 2.21 построен график  $A = 1$  и ряд (2.67) с удержанием 5 слагаемых при  $l = 1$ .

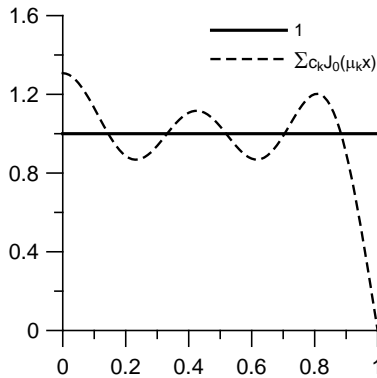


Рис. 2.21. Функция  $f(x) = 1$  и частичная сумма ряда Фурье-Бесселя (2.67)

**Пример 3.** Разложить функцию

$$f(x) = A, \quad A = \text{const},$$

заданную на интервале  $[0, l]$ , в ряд Фурье по функциям Бесселя 1-го рода

$$X_k(x) = J_0(\mu_k^{(0)}x/l),$$

где  $\mu_0^{(0)} = 0$ ,  $\mu_k^{(0)}$  ( $k > 0$ ) – положительные корни уравнения

$$J_0'(\mu_k^{(0)}) = 0.$$

**Решение.** Вычислим норму  $\|X_k\|^2 = \|J_0(\mu_k^{(0)}x/l)\|^2$ :

$$J_0(\mu_0^{(0)}x/l) = J_0(0) = 1, \quad \|J_0(0)\|^2 = \frac{l^2}{2},$$

$$\|J_0(\mu_k^{(0)}x/l)\|^2 = \frac{l^2}{2} J_0^2(\mu_k^{(0)}).$$

Вычислим интеграл (с учетом того, что  $J_1(x) = -J_0'(x)$  и  $J_0'(\mu_k^{(0)}) = 0$ )

$$\int_0^l J_0\left(\frac{\mu_0^{(0)}}{l}x\right)xdx = \int_0^l xdx = \frac{l^2}{2},$$

$$\int_0^l J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{l}x\right)xdx = \frac{l^2}{(\mu_k^{(0)})^2} xJ_1(x)\Big|_0^{\mu_k^{(0)}} = \frac{l^2}{\mu_k^{(0)}} J_1(\mu_k^{(0)}) = 0, \quad \text{при } k > 0.$$

Тогда

$$c_0 = A, \quad c_k = 0 \quad \text{при } k > 0$$

**Искомое разложение**

$$f(x) = A.$$

**Пример 4.** Разложить функцию

$$f(x) = A, \quad A = \text{const},$$

заданную на интервале  $[0, l]$ , в ряд Фурье по функциям Бесселя 1-го рода

$$X_k(x) = J_0(\mu_k^{(0)}x/l),$$

где  $\mu_k^{(0)}$  – положительные корни уравнения

$$\mu J_n'(\mu) + hlJ_n(\mu) = 0.$$

**Решение.** Вычислим норму  $\|X_k\|^2 = \|J_0(\mu_k^{(0)}x/l)\|^2$ :

$$\|X_k\|^2 = \frac{l^2}{2} \left[ 1 + \frac{(\mu_k^{(0)})^2}{l^2 h^2} \right] \left[ J_0'(\mu_k^{(0)}) \right]^2,$$

или с учетом  $\mu J_0'(\mu) + hlJ_0(\mu) = 0$

$$\begin{aligned} \|X_k\|^2 &= \frac{l^2}{2} \frac{l^2 h^2 + (\mu_k^{(0)})^2}{l^2 h^2} \frac{h^2 l^2}{(\mu_k^{(0)})^2} J_0^2(\mu_k^{(0)}) = \\ &= \left[ l^2 h^2 + (\mu_k^{(0)})^2 \right] \frac{l^2}{2(\mu_k^{(0)})^2} J_0^2(\mu_k^{(0)}). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} c_k &= A \frac{2(\mu_k^{(0)})^2}{l^2 \left[ (\mu_k^{(0)})^2 + h^2 l^2 \right] J_0^2(\mu_k^{(0)})} \frac{l^2}{\mu_k^{(0)}} J_1(\mu_k^{(0)}) = \\ &= \frac{2A\mu_k^{(0)}}{\left[ (\mu_k^{(0)})^2 + h^2 l^2 \right] J_0^2(\mu_k^{(0)})} J_1(\mu_k^{(0)}). \end{aligned}$$

Искомое разложение

$$f(x) = 2A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k^{(0)} J_1(\mu_k^{(0)})}{\left[ (\mu_k^{(0)})^2 + h^2 l^2 \right] J_0^2(\mu_k^{(0)})} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{l} x\right).$$

**Пример 5.** Разложить функцию

$$f(x) = A \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right), \quad A = \text{const},$$

заданную на интервале  $[0, l]$ , в ряд Фурье по функциям Бесселя 1-го рода

$$X_k(x) = J_0(\mu_k^{(0)} x / l),$$

где  $\mu_k^{(0)}$  – положительные корни уравнения

$$J_0(\mu_k^{(0)}) = 0.$$

**Решение.** Вычислим норму  $\|X_k\|^2 = \|J_0(\mu_k^{(0)} x / l)\|^2$  с учетом соотношения  $J_0'(x) = -J_1(x)$

$$\|J_0(\mu_k^{(0)} x / l)\|^2 = \frac{l^2}{2} \left[ J_0'(\mu_k^{(0)}) \right]^2 = \frac{l^2}{2} \left[ J_1(\mu_k^{(0)}) \right]^2$$

Для вычисления коэффициентов  $c_k$  воспользуемся следующими соотношениями для функций Бесселя первого рода:

$$\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x),$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x).$$

Вычислим интегралы (с учетом того, что  $J_0(\mu_k^{(0)}) = 0$ )

$$\int_0^l J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{l}x\right) x dx = \frac{l^2}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2} x J_1(x) \Big|_0^{\mu_k^{(0)}} = \frac{l^2}{\mu_k^{(0)}} J_1\left(\mu_k^{(0)}\right),$$

$$\frac{1}{l^2} \int_0^l x^2 J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{l}x\right) x dx = \frac{1}{l^2} \frac{l^4}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^4} \int_0^{\mu_k^{(0)}} x^2 [2J_1(x) - xJ_2(x)] dx =$$

$$= \frac{l^2}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^4} [2x^2 J_2(x) - x^3 J_3(x)]_0^{\mu_k^{(0)}} =$$

$$= \frac{l^2}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^4} x [(x^2 - 4)J_1(x) + 2xJ_0(x)]_0^{\mu_k^{(0)}} = \frac{l^2}{\mu_k^{(0)}} \left[1 - \frac{4}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}\right] J_1\left(\mu_k^{(0)}\right).$$

Тогда

$$c_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l A \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) J_0\left(\mu_k^{(0)}x/l\right) x dx =$$

$$= \frac{2A}{l^2 [J_1(\mu_k^{(0)})]^2} \left[ \frac{l^2}{\mu_k^{(0)}} - \frac{l^2}{\mu_k^{(0)}} + \frac{4l^2}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^3} \right] J_1\left(\mu_k^{(0)}\right) = \frac{8A}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^3 J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)}.$$

Искомое разложение

$$f(x) = 8A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^3 J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{l}x\right)$$

**Пример 6.** Разложить функцию

$$f(x) = Ax, \quad A = \text{const},$$

заданную на интервале  $[0, l]$ , в ряд Фурье по функциям Бесселя 1-го рода

$$X_k(x) = J_1(\mu_k^{(1)}x/l),$$

где  $\mu_k^{(1)}$  – положительные корни уравнения

$$J_1'(\mu_k^{(1)}) = 0.$$

**Решение.** Вычислим норму  $\|X_k\|^2 = \|J_1(\mu_k^{(1)}x/l)\|^2$ :

$$\|X_k\|^2 = \frac{l^2}{2} \left[ 1 - \frac{1}{(\mu_k^{(1)})^2} \right] J_1^2(\mu_k^{(1)}).$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^l x J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{l}x\right) x dx &= \frac{l^3}{(\mu_k^{(1)})^3} \int_0^{\mu_k^{(1)}} z^2 J_1(z) dz = \\ &= \frac{l^3}{(\mu_k^{(1)})^3} [z^2 J_2(z)]_0^{\mu_k^{(1)}} = \frac{l^3}{\mu_k^{(1)}} J_2(\mu_k^{(1)}). \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты решения

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2A(\mu_k^{(1)})^2}{l^2 \left[ (\mu_k^{(1)})^2 - 1 \right] \cdot J_1^2(\mu_k^{(1)})} \int_0^l x^2 J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{l}x\right) dx = \\ &= \frac{2Al\mu_k^{(1)}}{\left[ (\mu_k^{(1)})^2 - 1 \right] J_1^2(\mu_k^{(1)})} J_2(\mu_k^{(1)}). \end{aligned}$$

Искомое разложение

$$f(x) = 2Al \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k^{(1)} J_2(\mu_k^{(1)})}{\left[ (\mu_k^{(1)})^2 - 1 \right] \cdot J_1^2(\mu_k^{(1)})} J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{l}x\right).$$

**Пример 7.** Разложить функцию

$$f(x) = Ax^2, \quad A = \text{const},$$

заданную на интервале  $[0, l]$ , в ряд Фурье по функциям Бесселя 1-го рода

$$X_k(x) = J_0(\mu_k^{(0)}x/l),$$

где  $\mu_k^{(0)}$  – положительные корни уравнения

$$J'_0(\mu_k^{(0)}) = 0.$$

**Решение.** Вычислим норму  $\|X_k\|^2 = \|J_0(\mu_k^{(0)}x/l)\|^2$ :

$$\mu_0^{(0)} = 0, J_0(\mu_0^{(0)}x/l) = J_0(0) = 1, \|J_0(0)\|^2 = \frac{l^2}{2},$$

$$\|J_0(\mu_k^{(0)}x/l)\|^2 = \frac{l^2}{2} J_0^2(\mu_k^{(0)}), k > 0.$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^l x^2 J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{l}x\right) x dx &= \frac{l^4}{(\mu_m^{(0)})^4} \int_0^{\mu_m^{(0)}} x^2 [2J_1(x) - xJ_2(x)] dx = \\ &= \frac{l^4}{(\mu_m^{(0)})^4} [2x^2 J_2(x) - x^3 J_3(x)]_0^{\mu_m^{(0)}} = \frac{l^4}{(\mu_m^{(0)})^4} x [(x^2 - 4)J_1(x) + 2xJ_0(x)]_0^{\mu_m^{(0)}} = \\ &= \frac{l^4}{(\mu_m^{(0)})^3} \left[ \left( (\mu_m^{(0)})^2 - 4 \right) J_1(\mu_m^{(0)}) + 2\mu_m^{(0)} J_0(\mu_m^{(0)}) \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{A}{\|X_k\|^2} \int_0^l x^2 J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{l}x\right) x dx = \\ &= \frac{2Al^2}{(\mu_k^{(0)})^3 J_0^2(\mu_k^{(0)})} \left[ \left( (\mu_k^{(0)})^2 - 4 \right) J_1(\mu_k^{(0)}) + 2\mu_k^{(0)} J_0(\mu_k^{(0)}) \right]. \end{aligned}$$

**Искомое разложение**

$$f(x) = 2Al^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[ \left( (\mu_k^{(0)})^2 - 4 \right) J_1(\mu_k^{(0)}) + 2\mu_k^{(0)} J_0(\mu_k^{(0)}) \right]}{(\mu_k^{(0)})^3 J_0^2(\mu_k^{(0)})} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{l}x\right).$$

**Пример 8.** Разложить функцию

$$f(x) = Ax^n, A = \text{const},$$

заданную на интервале  $[0, l]$ , в ряд Фурье по функциям Бесселя 1-го рода

$$X_k(x) = J_n\left(\mu_k^{(n)}x/l\right),$$

где  $\mu_k^{(n)}$  – положительные корни уравнения

$$J'_n\left(\mu_k^{(n)}\right) = 0.$$

**Решение.** Вычислим норму  $\|X_k\|^2 = \left\|J_n\left(\mu_k^{(n)}x/l\right)\right\|^2$ :

$$\|X_k\|^2 = \frac{l^2}{2} \left[1 - \frac{n^2}{\left(\mu_k^{(n)}\right)^2}\right] J_n^2\left(\mu_k^{(n)}\right).$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^l x^n J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l}x\right) x dx &= \frac{l^{n+2}}{\left(\mu_k^{(n)}\right)^{n+2}} \int_0^{\mu_k^{(n)}} z^{n+1} J_n(z) dz = \\ &= \frac{l^{n+2}}{\left(\mu_k^{(1)}\right)^{n+2}} \left[z^{n+1} J_{n+1}(z)\right]_0^{\mu_k^{(n)}} = \frac{l^{n+2}}{\mu_k^{(1)}} J_{n+1}\left(\mu_k^{(n)}\right). \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты решения

$$\begin{aligned} c &= \frac{2A\left(\mu_k^{(n)}\right)^2}{l^2 \left[\left(\mu_k^{(n)}\right)^2 - n^2\right] J_n^2\left(\mu_k^{(n)}\right)} \int_0^l x^n J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l}x\right) x dx = \\ &= \frac{2Al^n \mu_k^{(n)} J_{n+1}\left(\mu_k^{(n)}\right)}{\left[\left(\mu_k^{(n)}\right)^2 - n^2\right] J_n^2\left(\mu_k^{(n)}\right)}. \end{aligned}$$

**Искомое разложение**

$$f(x) = 2Al^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k^{(n)} J_{n+1}\left(\mu_k^{(n)}\right)}{\left[\left(\mu_k^{(n)}\right)^2 - n^2\right] J_n^2\left(\mu_k^{(n)}\right)} J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l}x\right).$$

**Пример 9.** Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ x, & 1 \leq x < 2, \end{cases}$$



заданную на интервале  $[0, 2]$ , в ряд Фурье по функциям Бесселя 1-го рода

$$X_k(x) = J_2(\mu_k^{(2)}x/l),$$

где  $\mu_k^{(2)}$  – положительные корни уравнения

$$\mu J_2'(\mu_k^{(2)}) + hlJ_2(\mu_k^{(2)}) = 0.$$

**Решение.** Вычислим норму  $\|X_k\|^2 = \|J_2(\mu_k^{(2)}x/l)\|^2$ :

$$\|X_k\|^2 = \frac{l^2}{2} \left[ 1 + \frac{l^2 h^2 - 4}{(\mu_k^{(2)})^2} \right] J_2^2(\mu_k^{(2)}).$$

Вычислим интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 J_2(\mu_k^{(2)}x/2) x dx &= \frac{2^4}{(\mu_k^{(2)})^4} \int_0^{\mu_k^{(2)}/2} z^3 J_2(z) dz = \\ &= \frac{2^4}{(\mu_k^{(2)})^4} [z^3 J_3(z)]_0^{\mu_k^{(2)}/2} = \frac{2}{\mu_k^{(2)}} J_3(\mu_k^{(2)}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 x J_2(\mu_k^{(2)}x/2) x dx &= \frac{2^3}{(\mu_k^{(2)})^3} \int_{\mu_k^{(2)}/2}^{\mu_k^{(2)}} z^2 J_2(z) dz = \\ &= \frac{1}{(\mu_k^{(2)})^4} [z^3 J_3(z)]_0^{\mu_k^{(2)}} = \frac{1}{\mu_k^{(2)}} J_3(\mu_k^{(2)}). \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты решения

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2A(\mu_k^{(n)})^2}{l^2 \left[ (\mu_k^{(n)})^2 - n^2 \right] \cdot J_n^2(\mu_k^{(n)})} \int_0^l x^n J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l}x\right) x dx = \\ &= \frac{2Al^n \mu_k^{(n)} J_{n+1}(\mu_k^{(n)})}{\left[ (\mu_k^{(n)})^2 - n^2 \right] J_n^2(\mu_k^{(n)})}. \end{aligned}$$

**Искомое разложение**

$$f(x) = 2Al^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k^{(n)} J_{n+1}(\mu_k^{(n)})}{\left[ (\mu_k^{(n)})^2 - n^2 \right] J_n^2(\mu_k^{(n)})} J_n \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{l} x \right).$$

**Пример 10.** Решить первую краевую задачу для уравнения Лапласа внутри круглого ограниченного цилиндра  $r \leq r_0$ ,  $0 \leq z \leq l$ :

$$\Delta u = 0, \quad (2.68)$$

$$u|_{r=r_0} = 0, \quad u|_{z=0} = f(r, \alpha), \quad u|_{z=l} = F(r, \alpha). \quad (2.69)$$

**Решение.** Краевую задачу (2.68) - (2.69) решаем с помощью метода разделения переменных (более подробно об использовании этого метода см. в [1;3]). Искомую функцию  $u$  представим в виде

$$u(r, \alpha, z) = v(r, \alpha) Z(z) \quad (2.70)$$

и подставим представление (2.70) в уравнение (2.68)

$$\frac{1}{vr} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{vr^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0. \quad (2.71)$$

Разделим переменные в полученном уравнении (2.71):

$$\frac{1}{vr} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{vr^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\lambda, \quad (2.72)$$

где  $\lambda > 0$  - константа разделения переменных, ее значения определяются из условия существования нетривиального решения задачи. В результате получаем для функции  $v(r, \alpha)$  уравнение и граничное условие (из первого граничного условия (2.69))

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \lambda v = 0, \quad (2.73)$$

$$v(r_0, \alpha) = 0 \quad (2.74)$$

и для  $Z(z)$  уравнение

$$Z'' - \lambda Z = 0, \quad (2.75)$$

решение которого можно записать в виде

$$Z(z) = d_1 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} z + d_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} z. \quad (2.76)$$

Полагая далее

$$v(r, \alpha) = R(r) A(\alpha), \quad (2.77)$$

по аналогии с приведенными выше преобразованиями, будем иметь

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \left( \lambda - \frac{\eta}{r^2} \right) R = 0, \quad (2.78)$$

$$A'' + \eta A = 0, \quad (2.79)$$

где  $\eta$  - постоянная разделения. Из условий периодичности функции  $A(\alpha)$  по углу  $\alpha$  ( $A(\alpha) = A(\alpha + 2\pi)$ ,  $A'(\alpha) = A'(\alpha + 2\pi)$ ) находим  $\eta = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$A(\alpha) = c_1 \cos n\alpha + c_2 \sin n\alpha. \quad (2.80)$$

Для функции  $R(r)$  мы имеем уравнение (2.78), которое совпадает с уравнением (2.1) и является, таким образом, уравнением Бесселя

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \left( \lambda - \frac{\eta}{r^2} \right) R = 0, \quad (2.81)$$

$$R(r_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty. \quad (2.82)$$

Второе условие (2.82) написано из естественных физических соображений, что потенциал должен быть конечен при  $r = 0$ .

Отсюда находим

$$R(r) = J_n \left( \sqrt{\lambda} r \right). \quad (2.83)$$

Граничное условие (2.82) при  $r = r_0$  дает

$$J_n \left( \mu_n^{(m)} \right) = 0, \quad (2.84)$$

где  $\mu_n^{(m)} = \sqrt{\lambda} r_0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  - номер корня уравнения (2.84).

Таким образом, краевая задача (2.73)-(2.74) для  $v(r, \alpha)$  имеет

собственные значения  $\lambda_{mn} = \left( \frac{\mu_n^{(m)}}{r_0} \right)^2$ , которым соответствуют

собственные функции, полученные из решений (2.80) и (2.83)

$$v_{1mn} = J_n \left( \frac{\mu_n^{(m)}}{r_0} r \right) \cos n\alpha, \quad v_{2mn} = J_n \left( \frac{\mu_n^{(m)}}{r_0} r \right) \sin n\alpha, \quad (2.85)$$

образующие две ортогональные системы функций, для которых (используя формулу (2.55))

$$\|v_{1mn}\|^2 = \frac{r_0^2}{2} \left| J'_n(\mu_n^{(m)}) \right|^2 \pi \varepsilon_n, \quad \|v_{2mn}\|^2 = \frac{r_0^2}{2} \left| J'_n(\mu_n^{(m)}) \right|^2 \pi, \quad (2.86)$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n \neq 0, \end{cases} \quad (2.87)$$

Общее решение первой краевой задачи (2.88)-(2.89), с учетом решения(2.90), представим в виде ряда

$$u(r, \alpha, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( (a_{1mn} v_{1mn}(r, \alpha) + b_{1mn} v_{2mn}(r, \alpha)) \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_{mn}} z) + (a_{1mn} v_{2mn}(r, \alpha) + b_{2mn} v_{2mn}(r, \alpha)) \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_{mn}} z) \right).$$

Удовлетворяя граничному условию при  $z = 0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{1mn} v_{1mn}(r, \alpha) + b_{1mn} v_{2mn}(r, \alpha)) = f(r, \alpha),$$

найдем коэффициенты  $a_{1mn}$  и  $b_{1mn}$ , раскладывая функцию  $f(r, \alpha)$  в ряд Фурье по базисным функциям  $v_{1mn}(r, \alpha)$  и  $v_{1mn}(r, \alpha)$

$$a_{1mn} = \frac{1}{\|v_{1mn}\|} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} f(r, \alpha) v_{1mn}(r, \alpha) r dr d\alpha,$$

$$b_{1mn} = \frac{1}{\|v_{2mn}\|} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} f(r, \alpha) v_{2mn}(r, \alpha) r dr d\alpha.$$

Аналогично находятся коэффициенты  $a_{2mn}$  и  $b_{2mn}$  с использованием граничного условия при  $z = l$

$$a_{2mn} = \frac{1}{\|v_{1mn}\|} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} F(r, \alpha) v_{1mn}(r, \alpha) r dr d\alpha,$$

$$b_{2mn} = \frac{1}{\|v_{2mn}\|} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} F(r, \alpha) v_{2mn}(r, \alpha) r dr d\alpha.$$

**Пример 11.** Задача об электростатическом поле внутри цилиндра.

Найти выражение для потенциала электростатического поля внутри цилиндрической коробки круглого сечения  $r \leq r_0$ ,  $0 \leq z \leq l$ , оба основания которой заземлены, а боковая поверхность заряжена до потенциала  $\varphi_0$ . Определить напряженность поля на оси симметрии.

**Решение.** Задачу удобно решать в цилиндрической системе координат  $(r, \alpha, z)$ . Направим ось  $z$  вдоль оси цилиндра. Сформулируем краевую задачу, соответствующую поставленной проблеме. Электростатический потенциал  $\varphi(r, \alpha, z)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (2.92)$$

Граничные условия на торцах цилиндрической коробки

$$\varphi|_{z=0} = 0, \quad \varphi|_{z=l} = 0. \quad (2.93)$$

Граничное условие на боковой поверхности цилиндра

$$\varphi|_{r=r_0} = \varphi_0. \quad (2.94)$$

Будем решать задачу краевую задачу (2.92)-(2.94) с помощью метода разделения переменных, аналогично рассмотренной выше задаче в примере 10. Представим потенциал  $\varphi(r, \alpha, z)$  в виде

$$\varphi(r, \alpha, z) = R(r)A(\alpha)Z(z) \quad (2.95)$$

и подставим в уравнение (2.92)

$$\frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{Ar^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0. \quad (2.96)$$

Разделяя последовательно переменные в (2.96), получим три уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \left( \lambda + \frac{\eta}{r^2} \right) R = 0, \quad (2.97)$$

$$A'' + \eta A = 0, \quad (2.98)$$

$$Z'' + \lambda Z = 0, \quad (2.99)$$

где  $\lambda > 0$ ,  $\eta > 0$  - постоянные разделения переменных. Для функции  $A(\alpha)$  выполняются условия периодичности

$$A(\alpha) = A(\alpha + 2\pi), \quad A'(\alpha) = A'(\alpha + 2\pi), \quad (2.100)$$

для функции  $Z(z)$  граничные условия

$$Z(0) = 0, \quad Z(l) = 0. \quad (2.101)$$

Решение задачи (2.98), (2.100) можно представить в виде

$$A(\alpha) = c_1 \cos n\alpha + c_2 \sin n\alpha, \quad (2.102)$$

где  $\eta = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , задачи (2.99), (2.101) как

$$Z(z) = \sin(\sqrt{\lambda_m} z), \quad (2.103)$$

где  $\lambda_m = \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Таким образом, собственными

функциями являются две системы ортогональных функций

$$\sin(\sqrt{\lambda_m} z) \cos n\alpha, \quad \sin(\sqrt{\lambda_m} z) \sin n\alpha. \quad (2.104)$$

Уравнение (2.97) для  $R(r)$  совпадает с уравнением (2.42), которое является модификацией уравнения Бесселя. С учетом ограниченности значения  $R(r)$  при  $r = 0$ , решение (2.97) запишем в виде

$$R(r) = I_n(\sqrt{\lambda_m} r). \quad (2.105)$$

Общее решение краевой задачи (2.92)-(2.94) представим в виде ряда

$$\varphi(r, \alpha, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} \cos n\alpha + b_{mn} \sin n\alpha) I_n(\sqrt{\lambda_m} r) \sin(\sqrt{\lambda_m} z).$$

Коэффициенты  $a_{mn}$  и  $b_{mn}$  находятся из граничного условия при  $r = r_0$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} \cos n\alpha + b_{mn} \sin n\alpha) I_n(\sqrt{\lambda_m} r_0) \sin(\sqrt{\lambda_m} z) = \varphi_0.$$

Раскладывая правую часть (2.107) в ряд Фурье по базисным функциям

$$\varphi_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} f_{1m0} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{1mn} \cos n\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} f_{2mn} \sin n\alpha \right) \sin \left( \frac{\pi m}{l} z \right),$$

найдем коэффициенты разложения  $\varphi_0$

$$f_{1m0} = \frac{2\varphi_0}{\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi} \sin \left( \frac{\pi m}{l} z \right) dz d\alpha = \frac{4(1 - (-1)^m) \varphi_0}{\pi m}, \quad n = 0, \quad (2.109)$$

$$f_{1mn} = \frac{2\varphi_0}{\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi} \sin \left( \frac{\pi m}{l} z \right) \cos(n\alpha) dz d\alpha = 0, \quad n \neq 0, \quad (2.110)$$

$$f_{2mn} = \frac{2\varphi_0}{\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi} \sin \left( \frac{\pi m}{l} z \right) \sin(n\alpha) dz d\alpha = 0. \quad (2.111)$$

Следовательно, используя выражение (2.108) и (2.109)-(2.111), для  $a_{mn}$  и  $b_{mn}$  из условия (2.107) получаем

$$a_{m0} = \frac{2\varphi_0(1 - (-1)^m)}{\pi m I_0 \left( \frac{\pi m}{l} r_0 \right)}, \quad n = 0, \quad (2.112)$$

$$a_{mn} = 0, \quad n \neq 0, \quad (2.113)$$

$$b_{mn} = 0. \quad (2.114)$$

Окончательно запишем вид потенциала (2.106)

$$\varphi(r, \alpha, z) = \frac{2\varphi_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^m) I_0 \left( \frac{\pi m}{l} r \right)}{m I_0 \left( \frac{\pi m}{l} r_0 \right)} \sin \left( \frac{\pi m}{l} z \right). \quad (2.115)$$

Упростим полученное выражение, сделав замену

$$u(r, t) = R(r)T(t):$$

$$\varphi(r, \alpha, z) = \frac{2\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_0 \left( \frac{\pi(2k+1)}{l} r \right)}{(2k+1) I_0 \left( \frac{\pi(2k+1)}{l} r_0 \right)} \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{l} z \right).$$

Полученное решение не зависит от азимутального угла  $\alpha$ , так как наши граничные условия не зависят от  $\alpha$  и решалась осесимметричная задача.

Поле на оси цилиндра

$$E_z(0, z) = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{r=0} = -\frac{4\varphi_0}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{l} z\right)}{I_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{l} r_0\right)}, \quad (2.117)$$

$$E_z(0, 0) = -\frac{4\varphi_0}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{I_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{l} r_0\right)}. \quad (2.118)$$

**Пример 12.** Найти решение смешанной (задаются начальные и краевые условия) задачи

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + t J_0\left(\mu_0^{(1)} r\right), \quad (2.119)$$

где  $\mu_0^{(m)}$  - корень уравнения  $J_0\left(\mu_0^{(m)}\right) = 0$  ( $m$  - известный номер корня),  $0 \leq r \leq 1$ ,

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty. \quad (2.120)$$

**Решение.** Для решения этой задачи рассмотрим сначала, как это принято в методе разделение переменных, основную вспомогательную задачу (т.е. однородную краевую задачу)

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r, \quad (2.121)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty. \quad (2.122)$$

Фактически это обозначает, что сначала находится общее решение однородного уравнения (2.121) с ненулевым начальным условием, а потом - частное решение неоднородного уравнения (2.119) с нулевым начальным условием. Сумма двух этих решений дает общее решение неоднородной краевой задачи (2.119)-(2.120). Но в данном случае начальное условие нулевое изна-



чально, поэтому решение определяется неоднородным слагаемым.

Представим функцию  $u(r, t)$ , которая является решением задачи (2.121)-(2.122), в виде

$$u(r, t) = R(r)T(t). \quad (2.123)$$

Подставляя предполагаемую форму решения (2.123) в уравнение (2.121) и произведя деление обеих частей на  $RT$ , получим

$$\frac{T'}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} = -\lambda, \quad (2.124)$$

где  $\lambda > 0$  - константа разделения переменных, т.к. левая часть равенства зависит только от  $t$ , а правая – только от  $r$ . Отсюда следует, что

$$T' + \lambda T = 0, \quad (2.125)$$

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0. \quad (2.126)$$

Граничные условия (2.122) дают

$$R(1) = 0, \quad |R(0)| < \infty. \quad (2.127)$$

Таким образом, для определения функции  $R(r)$  мы получили задачу (2.126), (2.127) о собственных значениях (задачу Штурма-Лиувилля). Уравнение (2.126) является уравнением Бесселя (2.3) и его решением являются функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка

$$R(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda}r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda}r). \quad (2.128)$$

Подставляя решение (2.128) в граничные условия, найдем

$$C_2 = 0, \quad J_0(\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (2.129)$$

Следовательно, собственными значениями задачи (2.126), (2.127) являются числа  $\lambda_n = \left(\mu_0^{(n)}\right)^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $J_0\left(\mu_0^{(n)}\right) = 0$ , а собственными функциями -

$$R(r) = J_0\left(\mu_0^{(n)}r\right). \quad (2.130)$$

Общее решение краевой задачи (2.121), (2.122), с учетом решения уравнения (2.125), представим в виде ряда

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\mu_0^{(n)} r) e^{-\mu_0^{(n)2} t}. \quad (2.131)$$

Теперь вернемся к задаче (2.119)-(2.120) и найдем частное решение уравнения (2.119) с помощью метода вариации постоянной, варьируя константы  $a_n$

$$a_m' e^{-\mu_0^{(m)2} t} = t b_m, \quad n = m, \quad (2.132)$$

$$a_n' = 0, \quad n \neq m, \quad (2.133)$$

где  $b_n$  - коэффициенты разложения в ряд Фурье неоднородного слагаемого в (2.119) по базисным функциям (2.130)

$$b_m = \frac{2}{\left| J_0'(\mu_0^{(m)}) \right|^2} \int_0^1 J_0^2(\mu_0^{(m)} r) r dr = 1, \quad n = m, \quad (2.134)$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \left| J_0'(\mu_0^{(n)}) \right|} \int_0^1 J_0(\mu_0^{(m)} r) J_0(\mu_0^{(n)} r) r dr = 0, \quad n \neq m. \quad (2.135)$$

Решение полученных дифференциальных уравнений (2.132), (2.133) запишем, соответственно, в следующем виде:

$$a_m = c_m + \frac{\mu_0^{(m)2} t - 1}{\mu_0^{(m)4}} b_m e^{\mu_0^{(m)2} t}, \quad n = m, \quad (2.136)$$

$$a_n = c_n, \quad n \neq m, \quad (2.137)$$

где  $c_n$  - неопределенные константы интегрирования, которые надо найти из начального условия (2.120). Формально для этого начальное условие надо разложить в ряд Фурье по базисным функциям. Но поскольку в задаче нулевое начальное условие, соответственно все коэффициенты разложения в ряд нулевые. Подставляя решение (2.131) в начальное условие (2.120) с учетом найденных варьируемых констант (2.136), (2.137) получим

$$a_m(t) \Big|_{t=0} = c_m - \frac{1}{\mu_0^{(m)4}} = 0, \quad n = m, \quad (2.138)$$

$$a_n(t) \Big|_{t=0} = c_n = 0, \quad n \neq m. \quad (2.139)$$

Таким образом, окончательно запишем решение задачи (2.119)-(2.120)

$$u(r, t) = \left( \frac{1}{\mu_0^{(m)4}} e^{-\mu_0^{(m)2} t} + \frac{\mu_0^{(m)2} t - 1}{\mu_0^{(m)4}} \right) J_0 \left( \mu_0^{(m)} r \right). \quad (2.140)$$

**Пример 13.** Найти колебания поверхности жидкости в круглом вертикальном цилиндрическом сосуде с горизонтальным дном, если начальные условия обладают радиальной симметрией, а давление на свободной поверхности воды остается постоянным.

**Решение.** Потенциал  $u$  горизонтальных скоростей частиц воды является решением краевой задачи (о выводе уравнений см. [2])

$$u_{tt} = c^2 \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad 0 < t < \infty, \quad (2.141)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad u_t|_{t=0} = \psi(r), \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad (2.142)$$

$$u_r|_{r=r_0} = 0, \quad |u|_{r=0} < \infty, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (2.143)$$

Будем решать задачу методом разделения переменных: представив искомую функцию  $u(r, t)$  в виде

$$u(r, t) = T(t) R(r) \quad (2.144)$$

и подставляя предполагаемое решение (2.144) в уравнение (2.141), разделим переменные

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} = -\lambda, \quad (2.145)$$

где  $\lambda > 0$  - постоянная разделения переменных. В результате, с учетом граничных условий (2.143), получим для радиальной части задачу на собственные значения

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda R = 0, \quad (2.146)$$

$$R(r_0) = 1, \quad |R(0)| < \infty. \quad (2.147)$$

Уравнение (2.146) является аналогом уравнения Бесселя (2.3), решение которого, используя граничные условия (2.147), можно представить в виде

$$R(r) = J_0 \left( \sqrt{\lambda_n} r \right), \quad (2.148)$$

где  $\lambda_n = \mu_n^{(0)2} / r_0^2$  - собственные значения задачи (2.146)-(2.147),  $\mu_n^{(0)}$  - корень уравнения  $J_0 \left( \mu_n^{(0)} \right) = 0$ . Учитывая решение урав-

нения для функции времени  $T(t)$ , можем представить функцию  $u(r, t)$  в виде следующего ряда:

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r), \quad (2.149)$$

где  $\omega_n = c\sqrt{\lambda_n}$ . Чтобы найти неизвестные постоянные интегрирования  $A_n$  и  $B_n$ , необходимо полученное решение (2.149) подставить в начальные условия (2.142)

$$v(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{\lambda_n} r) = \varphi(r),$$

$$v_t(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n B_n J_0(\sqrt{\lambda_n} r) = \psi(r).$$

Разложим правую часть полученных равенств в ряд по собственным функциям задачи, т.е. в ряд по функциям Бесселя  $J_0(\sqrt{\lambda_n} r)$ . Приравнивая коэффициенты при соответствующих линейно независимых решениях, найдем

$$A_n = \frac{2}{r_0^2 \left| J_0'(\mu_n^{(0)}) \right|_0^2} \int_0^{r_0} \varphi(r) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) r dr,$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n r_0^2 \left| J_0'(\mu_n^{(0)}) \right|_0^2} \int_0^{r_0} \psi(r) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) r dr.$$

**Пример 14.** Найти колебания круглой мембраны  $0 \leq r_0 \leq r$  с закрепленным краем, вызванные переменным давлением

$$p = f(r, t), \quad 0 \leq r_0 < r, \quad 0 < t < \infty, \quad (2.150)$$

приложенным к одной стороне мембраны.

**Решение.** Колебания мембраны в полярной системе координат  $(r, \alpha)$  описываются краевой задачей

$$u_{tt} = c^2 \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) + \frac{1}{\rho} f(r, t), \quad 0 \leq r_0 \leq r, \quad 0 < t < \infty, \quad (2.151)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq r_0 \leq r, \quad (2.152)$$

$$u|_{r=r_0} = 0, \quad 0 < t < \infty. \quad (2.153)$$

Здесь  $\rho$  - поверхностная плотность мембраны. В уравнении (2.151) учтено, что функция  $u$  зависит только от переменных  $r$  и  $t$  и не зависит от полярного угла  $\alpha$ . Это связано с тем, что колебания мембраны вызваны приложенным внешним давлением, которое является радиально-симметричным и не зависит от  $\alpha$ . Следовательно, вынужденные колебания также не будут зависеть от  $\alpha$ .

Сначала найдем общее решение линейного однородного уравнения, полученного из неоднородного (2.151) путем отбрасывания неоднородного слагаемого в правой части

$$u_{tt} = c^2 \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right). \quad (2.154)$$

Решение (2.154) найдем с помощью метода разделения переменных. Представим функцию  $u(r, t)$  в виде

$$u(r, t) = T(t) R(r) \quad (2.155)$$

и, подставив предполагаемое решение (2.155) в (2.154), разделим переменные

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} = -\lambda, \quad (2.156)$$

где  $\lambda$  - постоянная разделения переменных. Отсюда следует, что

$$T'' + \lambda T = 0, \quad (2.157)$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda R = 0. \quad (2.158)$$

Граничное условие (2.153) дает

$$R(r_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty. \quad (2.159)$$

Задача на собственные значения (2.158)-(2.159) неоднократно встречалась в рассмотренных выше задачах (см., например (2.126)-(2.127), (2.146)-(2.147)) и решение ее известно. Таким образом, решение уравнения (2.154) с учетом граничных условий (2.159) и решения уравнения (2.157) можно представить в виде следующего ряда:

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) J_0(\sqrt{\lambda_n} r),$$

где  $\lambda_n = \left( \frac{\mu_0^{(n)}}{r_0} \right)^2$  - собственные числа задачи (2.158)-(2.159),  $\mu_0^{(n)}$  - корень уравнения  $J_0(\mu_0^{(n)}) = 0$ ,  $\omega_n = c\sqrt{\lambda_n}$  - частота  $n$ -й гармоники собственных колебаний мембраны.

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения (2.151) с помощью метода вариации постоянной. Для этого разложим неоднородное слагаемое в правой части в ряд Фурье по базисным функциям  $J_0(\sqrt{\lambda_n} r)$

$$f(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|J_0(\sqrt{\lambda_n} r_0)\|^2} \int_0^{r_0} f(r, t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) r dr. \quad (2.161)$$

Варьируя константы  $A_n \rightarrow A_n(t)$  и  $B_n \rightarrow B_n(t)$  и подставляя решение (2.160) и разложение (2.161) в уравнение (2.151), получим систему из двух дифференциальных уравнений

$$A_n' \cos(\omega_n t) + B_n' \sin(\omega_n t) = 0, \quad (2.162)$$

$$-A_n' \omega_n \sin(\omega_n t) + \omega_n B_n' \cos(\omega_n t) = \frac{1}{\rho} f_n(t). \quad (2.163)$$

Из этой системы находятся варьируемые постоянные

$$A_n(t) = -\frac{1}{\rho \omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin(\omega_n \tau) d\tau + C_n, \quad (2.164)$$

$$B_n(t) = \frac{1}{\rho \omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \cos(\omega_n \tau) d\tau + D_n. \quad (2.165)$$

Подставляя (2.164)-(2.165) в решение (2.160), получим общее решение неоднородного уравнения (2.151)

$$\begin{aligned}
u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} & \left( \left( C_n - \frac{1}{\rho \omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin(\omega_n \tau) d\tau \right) \cos(\omega_n t) + \right. \\
& \left. + \left( D_n + \frac{1}{\rho \omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \cos(\omega_n \tau) d\tau \right) \sin(\omega_n t) \right) J_0(\sqrt{\lambda_n} r).
\end{aligned}
\tag{2.166}$$

Подставляя полученное решение (2.166) в начальные условия (2.152), найде

$$C_n = 0, \quad D_n = 0. \tag{2.167}$$

Окончательно запишем решение задачи (2.151)-(2.153) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{\cos(\omega_n t)}{\rho \omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin(\omega_n \tau) d\tau + \right. \\
&+ \left. \frac{\sin(\omega_n t)}{\rho \omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \cos(\omega_n \tau) d\tau \right) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) = \tag{2.168} \\
&= \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\sqrt{\lambda_n} r)}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin(\omega_n (t - \tau)) d\tau.
\end{aligned}$$

Полученно решение (2.168) можно записать с помощью функции Грина (1.30) в виде (1.29), преобразовав ее для двух переменных  $x$  и  $t$

$$\begin{aligned}
u(r, t) &= \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{r_0} \int_0^t (\sin(\omega_n t) \cos(\omega_n \tau) - \\
&- \cos(\omega_n t) \sin(\omega_n \tau)) \frac{J_0(\sqrt{\lambda_n} r) J_0(\sqrt{\lambda_n} r)}{\omega_n \|J'_0(\sqrt{\lambda_n} r_0)\|^2} f(\zeta, \tau) \zeta d\zeta d\tau = \tag{2.169}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{r_0} \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) \frac{J_0(\sqrt{\lambda_n} r) J_0(\sqrt{\lambda_n} r)}{\omega_n \left\| J_0(\sqrt{\lambda_n} r_0) \right\|^2} f(\zeta, \tau) \zeta d\zeta d\tau = \\
&= \int_0^{r_0} \int_0^t G(r, \zeta, t-\tau) f(\zeta, \tau) \zeta d\zeta d\tau \\
G(r, \zeta, t-\tau) &= \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\omega_n(t-\tau)) \frac{J_0(\sqrt{\lambda_n} \zeta) J_0(\sqrt{\lambda_n} r)}{\omega_n \left\| J_0(\sqrt{\lambda_n} r_0) \right\|^2}. \quad (2.170)
\end{aligned}$$

Сравните полученную функцию Грина (2.170) с формулой (1.30).

**Пример 15.** Найти температуру бесконечного круглого цилиндра  $0 \leq r \leq r_0$  при условии, что начальная температура равна нулю, а на боковой поверхности поддерживается постоянная температура  $\theta_0$ . Найти в условиях регулярного режима приближенное выражение для температуры, средней по поперечному сечению цилиндра.

**Решение.** Процесс распространения тепла в бесконечном цилиндре, соответствующий формулированной проблеме, в цилиндрической системе координат  $(r, \alpha, z)$  описывается следующей краевой задачей:

$$\theta_t = a^2 \Delta \theta, \quad (2.171)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{r=r_0} = \theta_0, \quad |\theta|_{r=0} < \infty. \quad (2.172)$$

Начальные и граничные условия не зависят от полярного угла  $\alpha$  и координаты  $z$ , следовательно, температура  $\theta$  тоже не будет зависеть от  $\alpha$  и  $z$ .

Введем новую неизвестную функцию  $u(r, t)$ , полагая

$$\theta(r, t) = u(r, t) + U(r, t), \quad (2.173)$$

так что  $u(r, t)$  представляет отклонение функции  $\theta(r, t)$  от некоторой известной функции  $U(r, t)$ . Подставив выражение



(2.173) в (2.171)-(2.172), получим для функции  $u(r, t)$  следующую задачу:

$$u_t = a^2 \Delta u + (a^2 \Delta U - U_{tt}), \quad (2.174)$$

$$u(r, 0) = -U(r, 0), \quad u(r_0, t) = \theta_0 - U(r_0, t), \quad |u(r_0, t)| < \infty.$$

Выберем вспомогательную функцию  $U(r, t)$  таким образом, чтобы

$$u(r_0, t) = 0; \quad (2.176)$$

для этого достаточно положить

$$U(r, t) = \theta_0. \quad (2.177)$$

Решение задачи (2.174)-(2.175) будем искать с помощью метода разделения переменных. Представим функцию  $u(r, t)$  в следующем виде:

$$u(r, t) = T(t)R(r). \quad (2.178)$$

Подставляя предполагаемую форму решения (2.178) в уравнение (2.171) и произведя деление обеих частей на  $RT$ , получим

$$\frac{T'}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} = -\lambda, \quad (2.179)$$

где  $\lambda > 0$  - константа разделения переменных, т.к. левая часть равенства зависит только от  $t$ , а правая - только от  $r$ . Отсюда следует, что

$$T' + \lambda T = 0, \quad (2.180)$$

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0. \quad (2.181)$$

Граничные условия (2.175) дают

$$R(r_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty. \quad (2.182)$$

Задача Штурма-Лиувилля (2.181)-(2.182) неоднократно встречалась в рассмотренных выше примерах и ее решение можно представить в виде

$$R(r) = J_0(\sqrt{\lambda_n} r),$$

где  $\lambda_n = \left( \frac{\mu_0^{(n)}}{r_0} \right)^2$  - собственные числа задачи на собственные значения,  $\mu_0^{(n)}$  -  $n$ -ое положительное значение корня уравнения  $J_0(\mu_0) = 0$ . Учитывая решение уравнения (2.180), можем представить функцию  $v(r, t)$  в виде следующего ряда:

$$v(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n t} J_0(\sqrt{\lambda_n} r). \quad (2.183)$$

Чтобы найти неизвестные постоянные интегрирования  $A_n$ , необходимо полученное решение (2.183) подставить в начальное условие (2.175)

$$v(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{\lambda_n} r) = -\mathcal{G}_0.$$

Разложим правую часть полученного равенства в ряд по собственным функциям задачи, т.е. в ряд по функциям Бесселя  $J_0(\sqrt{\lambda_n} r)$ . Приравнявая коэффициенты при соответствующих линейно независимых решениях, найдем

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{\mathcal{G}_0}{\left\| J_0(\sqrt{\lambda_n} r_0) \right\|^2} \int_0^{r_0} J_0(\sqrt{\lambda_n} r) r dr = -\frac{\mathcal{G}_0}{\left\| J_0(\sqrt{\lambda_n} r_0) \right\|^2} \cdot \frac{r_0^2}{\mu_0^{(n)}} J_1(\mu_0^{(n)}) = \\ &= -\frac{2\mathcal{G}_0}{\mu_0^{(n)} J_1(\mu_0^{(n)})}. \end{aligned}$$

**Пример 16.** Найти поперечные колебания круглой пластинки с жестко закрепленным краем в среде без сопротивления, вызванные сосредоточенной поперечной силой  $p = p_0 \sin \omega t$ , приложенной в центре пластинки с момента  $t = 0$  (колебания мембраны репродуктора).

**Решение.** Колебания круглой жесткой пластинки в полярной системе координат  $(r, \alpha)$  описываются неоднородным уравнением гиперболического типа

$$u_{tt} + c^4 \Delta^2 u = \frac{1}{2\rho h} f(r, \alpha, t), \quad (2.184)$$

где  $c^4 = \frac{Eh^2}{3\rho(1-m^2)}$ ,  $E$  - модуль Юнга,  $m$  - коэффициент Пуассона,  $2h$  - толщина пластины,  $\rho$  - плотность массы пластины,  $f(r, \alpha, t)$  - поперечная сила, действующая на единицу площади пластины. Подробнее о выводе уравнения (2.184) см. [1] (приложение к главе II; I. О колебаниях стержней).

Используя уравнение (2.184), колебания пластины в рассматриваемом случае будет описываться следующей краевой задачей:

$$u_{tt} + c^4 \Delta^2 u = \frac{p_0}{2\rho h} \delta(r) \sin \omega t, \quad (2.185)$$

$$u(r_0, t) = u_r(r_0, t) = 0, \quad (2.186)$$

$$u(r_0, 0) = 0, \quad u_t(r_0, 0) = 0. \quad (2.187)$$

Здесь  $\rho$  - плотность пластины,  $2h$  - толщина пластины. О свойства дельта-функции  $\delta(r)$  подробнее смотрите в приложении II. Заметим, что в условия радиальной симметрии

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Решение задачи (2.185)-(2.187) методом разделения переменных. Как и в выше рассмотренных случаях, при решении неоднородных уравнений рассмотрим сначала вспомогательную задачу с однородным уравнением (2.185) для нахождения собственных функций и значений:

$$u_{tt} + c^4 \Delta^2 u = 0, \quad (2.188)$$

$$u(r_0, t) = u_r(r_0, t) = 0. \quad (2.189)$$

Представим функцию  $u(r, t)$  в виде

$$u(r, t) = T(t)R(r). \quad (2.190)$$

Подставляя предполагаемое решение (2.190) в уравнение (2.188) и разделяя переменные, получим

$$T'' + \omega^4 T = 0, \quad T = A \cos \tilde{\omega}^2 t + B \sin \tilde{\omega}^2 t, \quad (2.191)$$

$$\Delta \Delta R - \lambda^4 R = 0, \quad \tilde{\omega}^4 = \lambda^4 c^4, \quad (2.192)$$

где  $\lambda^4$  - константа разделения переменных. Уравнение (2.192) можно записать другим образом:

$$(\Delta + \lambda^2)(\Delta - \lambda^2)R(r) = 0. \quad (2.193)$$

Следовательно, функция  $R(r)$  является решением следующих уравнений:

$$(\Delta + \lambda^2)R(r) = 0 \quad \text{или} \quad R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda^2 R = 0, \quad (2.194)$$

$$(\Delta - \lambda^2)R(r) = 0 \quad \text{или} \quad R'' + \frac{1}{r}R' - \lambda^2 R = 0. \quad (2.195)$$

Функция  $R(r)$  должна быть ограничена при  $r = 0$ , тогда решение уравнения (2.193), т.е. суммарное решение уравнений (2.194)-(2.195), представим в виде

$$R(r) = C J_0(\lambda r) + D I_0(\lambda r). \quad (2.196)$$

Разделяя переменные в краевых условиях (2.189), видим, что функция  $R(r)$  должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$R(r_0) = R'(r_0) = 0. \quad (2.197)$$

Подставляя решение (2.196) в условие (2.197), получаем уравнения

$$C J_0(\lambda r_0) + D I_0(\lambda r_0) = 0, \quad (2.198)$$

$$C J'_0(\lambda r_0) + D I'_0(\lambda r_0) = 0. \quad (2.199)$$

Коэффициенты  $C$  и  $D$  в решении (2.196) не могут одновременно обращаться в нуль, т.к. необходимо найти ненулевое решение. Для того чтобы система (2.198)-(2.199) имела единственное нетривиальное решение, определитель системы должен быть равен нулю. Из этого условия мы получаем трансцендентное уравнение

$$J_0(\lambda r_0)I_0'(\lambda r_0) - I_0(\lambda r_0)J_0'(\lambda r_0) = 0 \quad (2.200)$$

для определения собственных значений  $k$  краевой задачи (2.196)-(2.197).

В качестве собственных функций можно взять

$$R_n(r) = I_0(\lambda_n r)J_0'(\lambda_n r_0) - J_0(\lambda_n r_0)I_0'(\lambda_n r).$$

Ортогональность базисных функций (2.201) на отрезке  $0 \leq r \leq r_0$  докажете самостоятельно. Отметим, что

$$|R_n(r)|^2 = r_0^2 J_0^2(\lambda_n r_0) I_0^2(\lambda_n r_0). \quad (2.202)$$

Таким образом решение однородного уравнения (2.188) можно представить в виде суммы

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n^2 t + B_n \sin \omega_n^2 t) R_n(r). \quad (2.203)$$

После того, как найдены базисные функции, вернемся обратно к решению задачи (2.185)-(2.187). Разложим правую часть неоднородного уравнения (2.185) в ряд по базисным функциям  $R_n(r)$

$$\rho_n \sin \omega t = \frac{p_0 \sin \omega t}{2\rho h |R_n|^2} \int_0^{r_0} \delta(r) R_n(r) r dr = \frac{p_0 \sin \omega t}{2\rho h |R_n|^2} (I_0(\lambda_n r_0) - J_0(\lambda_n r_0))$$

(2.204)

где  $\rho_n \sin \omega t$  - коэффициенты разложения правой части (2.185) в ряд Фурье-Бесселя.

Решение неоднородного уравнения (2.185) будем искать с помощью метода вариации постоянной. Рассматриваем нерезонансный случай:  $\omega \neq \omega_n^2$  для любых  $n$ . Варьируем константы  $A_n \rightarrow A_n(t)$  и  $B_n \rightarrow B_n(t)$  в решении (2.203) и подставляем в (2.185)

$$A_n' \cos \omega_n^2 t + B_n' \sin \omega_n^2 t = 0, \quad (2.205)$$

$$-\omega_n^2 A_n' \sin \omega_n^2 t + \omega_n^2 B_n' \cos \omega_n^2 t = \rho_n \sin \omega t. \quad (2.206)$$

Разрешая систему (2.205)-(2.206), получим

$$A_n = \frac{\rho_n}{2\omega_n^2} \left( \frac{\sin(\omega + \omega_n^2)t}{\omega + \omega_n^2} - \frac{\sin(\omega - \omega_n^2)t}{\omega - \omega_n^2} \right) + \tilde{A}_n, \quad (2.207)$$

$$B_n = -\frac{\rho_n}{2\omega_n^2} \left( \frac{\cos(\omega + \omega_n^2)t}{\omega + \omega_n^2} + \frac{\cos(\omega - \omega_n^2)t}{\omega - \omega_n^2} \right) + \tilde{B}_n. \quad (2.208)$$

Подставим полученные методом вариации константы (2.207)-(2.208) в решение (2.203)

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \tilde{A}_n \cos \omega_n^2 t + \tilde{B}_n \sin \omega_n^2 t - \frac{\rho_n}{\omega^2 - \omega_n^4} \sin \omega t \right) R_n(r).$$

Решение (2.209) является общим решением неоднородного уравнения (2.185). Чтобы найти неопределенные константы  $\tilde{A}_n$  и  $\tilde{B}_n$ , нужно воспользоваться начальными условиями (2.187). Подставляя решение (2.209) в (2.187), найдем

$$\tilde{A}_n = 0, \quad \tilde{B}_n = \frac{\rho_n \omega}{\omega_n^2 (\omega^2 - \omega_n^4)}. \quad (2.210)$$

Таким образом, с учетом (2.210) получим окончательное решение исходной краевой задачи (2.185)-(2.187)

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n (\omega \sin \omega_n^2 t - \omega_n^2 \sin \omega t)}{\omega_n^2 (\omega^2 - \omega_n^4)} R_n(r). \quad (2.211)$$

## 2.5. Задачи

1. Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений в виде функций Бесселя:

a)  $y'' + 4x^2 y = 0,$

b)  $x^2 y'' + 5xy' + x^2 y = 0,$

c)  $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{16x^2} y = 0,$

d)  $y'' - \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{3}{x^2}\right) y = 0,$

e)  $y'' - \frac{3}{x} y' + \left(1 + \frac{4}{x^2}\right) y = 0,$

- f)  $x^2y'' + xy' + \frac{1}{4}(x^2 - 1)y = 0$ ,
- g)  $4x^2y'' + 4xy' + (x - 9)y = 0$ , использовать замену  $u = x^{1/2}$ ,
- h)  $x^2y'' + 4xy' + (9x^3 - 32)y = 0$ , использовать замену  $u = x^{3/2}$ ,
- i)  $4x^2y'' + 8xy' + (4x^2 - 1)y = 0$ , использовать замену  $u = yx^{1/2}$ ,
- j)  $x^2y'' + xy' + 4(x^4 - p^2)y = 0$ , использовать замену  $u = x^2$ ,
- k)  $x^2y'' + xy' + 9(x^6 - p^2)y = 0$ , использовать замену  $u = x^3$ ,
- l)  $y'' + (e^{2x} - \frac{1}{9})y = 0$ , использовать замену  $u = e^x$ .

2. Найти собственные числа и функции в следующих задачах Штурма-Лиувилля:

- a)  $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 1)y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ ;
- b)  $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 4)y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ ;
- c)  $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 1)y = 0$ ,  $y_x(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ ;
- d)  $x^2y'' + xy' + \lambda x^2y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y_x(1) = 0$ ;
- e)  $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 9)y = 0$ ,  $y_x(0) = 0$ ,  $y_x(1) = 0$ ;
- f)  $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 1)y = 0$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = 0$ ;
- g)  $x^2y'' + xy' - (\lambda x^2 + 1)y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ ;
- g)  $x^2y'' + xy' - \lambda x^2y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .

3. Доказать следующие интегральные формулы:

$$\int x^p J_{p-1}(x) dx = x^p J_p(x) + c, \quad \int x^{-p} J_{p+1}(x) dx = -x^{-p} J_p(x) + c,$$

$$\int J_{p+1}(x) dx = \int J_{p-1}(x) dx - 2J_p(x)$$

4. Показать, что  $\int J_0(x) J_1(x) dx = -\frac{1}{2} J_0^2(x)$ ,

$$\int_0^1 x J_0(ax) dx = \frac{1}{a} J_1(a).$$

5. Показать, что  $\int_0^1 x J_0^2(ax) dx = \frac{J_0^2(a) + J_1^2(a)}{2}$ .

6. Показать, что  $J_{p-1}(x) = J_{p+1}(x)$  в каждом значении экстремума функции  $J_p(x)$ , и  $J_{p-1}(x) = -J_{p+1}(x) = J'_p(x)$  для каждого положительного значения корня уравнения  $J_p(x) = 0$ . Используя компьютер, построить на одном графике, например, графики функций  $J_2(x)$ ,  $J_3(x)$ ,  $J_4(x)$  и убедиться в справедливости полученных результатов.

7. Показать, что  $\int_0^{\infty} J_1(x) dx = \int_0^{\infty} J_3(x) dx = \dots = \int_0^{\infty} J_{2n+1}(x) dx$   
и  $\int_0^{\infty} J_0(x) dx = \int_0^{\infty} J_2(x) dx = \dots = \int_0^{\infty} J_{2n}(x) dx$ .

8. Показать, что  $Y'_0(x) = -Y_1(x)$ .

9. Показать, что  $\int x^{n+1} J_n(x) dx = x^{n+1} J_{n+1}(x) + C$  для целых  $n \geq 1$ .

10. Показать, что  $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm x \sin \vartheta} d\vartheta$ .

11. Используя разложения в ряд функции  $J_0(x)$ , показать, что

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \dots$$

12. Доказать, что  $\int x I_0(ax) dx = \frac{x}{a} I'_0(ax) + C$ .

13. Разложить функцию  $f(x)$ , заданную на интервале  $[0, 1]$ , в ряд Фурье по функциям Бесселя 1-го рода  $X_k(x) = J_0(\mu_k x)$ , где  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $J_0(\mu) = 0$ , если:



a)  $f(x) = 1 - \frac{J_0(x)}{J_0(1)}$ , b)  $f(x) = 1 - \frac{J_0(2x)}{J_0(2)}$ , c)  $f(x) = \sin(\pi x)$ , d)  $f(x) = x^2$ , e)  $f(x) = 1 - \frac{J_0(3x)}{J_0(3)}$ , f)  $f(x) = \frac{J_0(2x)}{J_0(2)}$ , g)  $f(x) = \sin^2(\pi x)$  h)  $f(x) = 1 - x^2$ , i)  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ .

14. Разложить функцию  $f(x)$ , заданную на интервале  $[0, 1]$ , в ряд Фурье по функциям Бесселя 1-го рода  $X_k(x) = J_1(\mu_k x)$ , где  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $J_1(\mu) = 0$ , если:

a)  $f(x) = 1 - \frac{J_1(x)}{J_1(1)}$ , b)  $f(x) = 1 - \frac{J_1(2x)}{J_1(2)}$ , c)  $f(x) = x$ , d)  $f(x) = \sin(\pi x)$ , e)  $f(x) = \sin^2(\pi x)$ , f)  $f(x) = x(1-x)$ , g)  $f(x) = x(1-x^2)$ .

15. Разложить функцию  $f(x)$ , заданную на интервале  $[0, 1]$ , в ряд Фурье по функциям Бесселя 1-го рода  $X_k(x) = J_0(\mu_k x)$ , где  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $J'_0(\mu) = 0$ , если:

a)  $f(x) = x(1-x)$ , b)  $f(x) = x(1-x^3)$ , c)  $f(x) = x(1-x^2)$ , d)  $f(x) = x^3$ .

Для решения следующих задач необходимо использовать метод разделения переменных.

16. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса  $R$ , закрепленной по краю, если  $u|_{t=0} = A J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$ , где  $\mu_k$  – положительные корни уравнения  $J_0(\mu) = 0$ ;  $u_t|_{t=0} = 0$ .

17. Найти при нулевых начальных условиях колебания круглой мембраны  $0 \leq r < r_0$ , вызванные движением ее края по закону

$$u(r_0, t) = A \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

18. Решить предыдущую задачу, когда окружающая среда оказывает сопротивление, пропорциональное скорости.

19. Найти колебания круглой мембраны  $0 \leq r \leq r_0$  с закрепленным краем, вызванные равномерно распределенным давлением

$$p = p_0 \sin \omega t, \quad 0 < t < \infty,$$

приложенным к одной стороне мембраны.

20. Найти поперечные колебания круглой мембраны с закрепленным краем, вызванные радиально-симметричными начальными возмущениями.

21. Решить предыдущую задачу для кольцевой мембраны с закрепленными краями.

22. Найти поперечные колебания круглой пластинки с жестко закрепленным краем, вызванные радиально-симметричными начальными возмущениями.

23. Решить предыдущую задачу, если колебания вызваны равномерно распределенной поперечной силой с плотностью  $p = p_0 \sin \omega t$ ,  $t \geq 0$ .

24. Найти колебания круглой мембраны  $0 \leq r \leq r_0$ , вызванные колебаниями ее края, если закон колебаний границы

$$u(r_0, \alpha, t) = f(t) \cos n\alpha, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad n \geq 1.$$

25. Найти поперечные колебания круглой пластины радиуса  $r_0$  с закрепленным краем, если в начальный момент времени возмущение имело вид  $r_0 - r$ , а начальная скорость этих возмущений была равна нулю.

26. Решить предыдущую задачу, если возмущения вызваны равномерно распределенной поперечной силой с плотностью  $p = p_0 \sin \omega t$ , действующей с момента  $t = 0$ .

27. Решить предыдущую задачу, если возмущения вызваны поперечным сосредоточенным ударом по центру пластины, передавшем ей импульс  $I$ .

28. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра  $0 \leq r \leq r_0$  при условии, что начальная температура равна  $u|_{t=0} = u_0(1 - r^2/r_0^2)$ , а на его поверхности поддерживается температура, равная нулю. Найти в условиях регулярного режима приближенное выражение для температуры, средней по поперечному сечению цилиндра.

29. Найти температуру бесконечного цилиндрического сектора  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  при условии, что начальная температура равна  $u|_{t=0} = u_0 J_0(\mu_k r/r_0) \cos^2(\alpha)$ , где  $\mu_k$  - первый корень уравнения  $J_2(\mu) = 0$ , а на его поверхности поддерживается температура, равная нулю.

30. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра  $0 \leq r \leq r_0$  при условии, что начальная температура равна  $u|_{t=0} = f(r)$ , а на поверхности цилиндра происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю. Рассмотреть, в частности, случай, когда  $f(r) = u_0 \equiv const$ , и написать приближенное выражение для температуры в условиях регулярного режима.

31. Температура бесконечной круглой цилиндрической трубы  $r_1 \leq r \leq r_2$  равна нулю при  $t < 0$ . С момента  $t = 0$  через ее внешнюю поверхность подается постоянный тепловой поток плотности  $q$ , а внутренняя поверхность трубы поддерживается при температуре, равной нулю.

32. Вне бесконечного круглого цилиндра  $0 \leq r \leq r_0$  в момент  $t = 0$  мгновенно установилось постоянное магнитное поле  $H_0$ , параллельное оси цилиндра. Найти напряженность магнитного поля внутри цилиндра при нулевых начальных условиях; затем - поток магнитной индукции через поперечное сечение цилиндра.

33. Решить предыдущую задачу, если напряженность внешнего магнитного поля равна  $H = H_0 \cos \omega t$ ,  $H_0 = const$ ,  $0 \leq t < \infty$ .

34. Найти температуру бесконечного цилиндрического сектора  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ , если на поверхности  $r = r_0$  и гранях  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \varphi_0$  поддерживается температура, равная нулю, а начальная температура равна  $u|_{t=0} = f(r, \varphi)$ ,  $0 < r < r_0$ ,  $0 < \varphi < \varphi_0$ .

35. Найти температуру бесконечного цилиндрического сектора  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ , если на поверхности  $r = 1$  происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой, равна нулю, грани  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$  теплоизолированы, а начальная температура равна  $u|_{t=0} = r \cos 2\varphi$ ,  $0 < r < 1$ ,  $0 < \varphi < \pi/2$ .

36. Найти температуру бесконечного цилиндрического сектора  $r_0 \leq r \leq r_1$ ,  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ , если на поверхности  $r = r_0$  и  $r = r_1$  и гранях  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \varphi_0$  поддерживается температура равная нулю, а начальная температура равна  $u|_{t=0} = f(r, \varphi)$ ,  $0 < r < r_0$ ,  $0 < \varphi < \varphi_0$ .

37. Найти температуру однородного круглого цилиндра  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$  при условии, что начальная температура равна  $u|_{t=0} = u_0 J_1(\mu_k r/r_0) \sin^2(\alpha) \cos(2\pi z/l)$ , где  $\mu_k$  - первый корень уравнения  $J_1(\mu) = 0$ , на боковой поверхности цилиндра поддерживается температура, равная нулю, а торцы теплоизолированы.

38. Определить распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму ограниченного твердого цилиндра  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$ , если к нижнему основанию  $z = 0$  подводится постоянный тепловой поток  $q$ , на боковой поверхности  $r = r_0$  происходит теплообмен по закону Био с окружающей средой, температура которой равна нулю, верхнее основание  $z = l$  теплоизолировано. В начальный момент времени температура цилиндра была равна нулю.

39. Определить распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму ограниченного твердого цилиндра

$0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$ , если нижнее основание  $z = 0$  поддерживается при постоянной температуре  $u_0$ , на боковой поверхности  $r = r_0$  задана температура  $f(z) = u_0(1 - z/l)$ , а верхнее основание  $z = l$  поддерживается при температуре, равной нулю. В начальный момент времени цилиндр был равномерно прогрет до температуры  $u_0$ .

40. Неоднородный круглый цилиндр  $0 \leq r \leq r_1$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$  составлен из однородного цилиндра  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$  и однородной цилиндрической трубки  $r_0 < r \leq r_1$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$ , изготовленных из различных материалов. Найти температуру составного цилиндра, если его поверхность поддерживается при температуре, равной нулю, а начальная температура равна  $u|_{t=0} = f(r, \alpha, z)$ ,  $0 \leq r \leq r_1$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$ .

41. Решить предыдущую задачу при условии, что

$$u|_{t=0} = z \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(1 - \frac{r}{r_1}\right) \cos \alpha.$$

42. Решить задачу об остывании бесконечной цилиндрической трубы  $r_1 \leq r \leq r_2$  заполненной охлаждающей жидкостью, если температура охлаждающей жидкости все время равна температуре внутренней поверхности трубы, внешняя поверхность теплоизолирована. Начальная температура трубы равна  $u|_{t=0} = f(r)$ ,  $r_1 < r < r_2$ .

43. Решить предыдущую задачу, предполагая конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю.

44. Найти температуру конечного однородного круглого цилиндра  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$ , на поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру, равной нулю, если начальная температура цилиндра равна  $u|_{t=0} = f(r, \varphi, z)$ ,  $0 \leq r < r_0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 < z < l$ .

45. Найти выражение для потенциала электростатического поля внутри бесконечного круглого цилиндра  $0 \leq r \leq 1$ , если на его боковой поверхности задан постоянный потенциал  $\varphi_0$ .

46. Найти выражение для потенциала электростатического поля внутри цилиндрической коробки круглого сечения  $r \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , оба основания которой заземлены, а боковая поверхность заряжена до потенциала  $z(1-z)$ . Определить напряженность поля на оси симметрии.

47. Найти выражение для потенциала электростатического поля внутри цилиндрической коробки круглого сечения  $r \leq r_0$ ,  $0 \leq z \leq l$ , верхнее основание и боковая поверхность которой заземлены, а нижнее основание поддерживается при постоянном потенциале  $\varphi_0$ . Определить напряженность поля на оси симметрии.

48. Определить потенциал электростатического поля внутри твердого тела, имеющего форму цилиндрической коробки  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$ , если нижнее основание  $z = 0$  заземлено, на боковой поверхности  $r = r_0$  задан потенциал  $f(z) = u_0 z/l$ , а на верхнем основании  $z = l$  поддерживается потенциал  $u_0$ .

49. Определить стационарное распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму ограниченного твердого цилиндра  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$ , если к нижнему основанию  $z = 0$  подводится постоянный тепловой поток  $q$ , на боковой поверхности  $r = r_0$  происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю, верхнее основание  $z = l$  поддерживается при температуре, равной нулю.

50. Решить предыдущую задачу при условии, что верхнее основание  $z = l$  теплоизолировано.

51. Определить стационарное распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму ограниченного твердого цилиндра  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$ , если к нижнему основанию  $z = 0$  подводится постоянный тепловой поток  $q$ , а на боковой поверхности  $r = r_0$  и верхнем основании  $z = l$  проис-

ходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю.

52. Определить стационарное распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму ограниченного твердого цилиндра  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$ , если нижнее основание  $z = 0$  поддерживается при постоянной температуре  $u_0$ , на боковой поверхности  $r = r_0$  задана температура  $f(z) = u_0(1 - z/l)$ , а верхнее основание  $z = l$  поддерживается при температуре, равной нулю.

53. Решить первую краевую задачу для уравнения Лапласа внутри ограниченного цилиндра  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$ , если  $u|_{r=r_0} = 0$ ,  $u|_{z=0} = f_0(r, \varphi)$ ,  $u|_{z=l} = f_1(r, \varphi)$ , где  $f_0(r, \varphi)$  и  $f_1(r, \varphi)$  - известные функции.

54. Решить предыдущую задачу, если  $u|_{z=0} = f_0(r)$ ,  $u|_{z=l} = f_1(r)$ .

55. Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \quad 0 < x < 1,$$

$$u|_{t=0} = a(x), \quad u_t|_{t=0} = b(x), \quad |u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = f(t),$$

если:

a)  $a(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{J_0(2x)}{J_0(2)} \right)$ ,  $b(x) = 0$ ,  $f(t) = \sin^2 t$ ;

b)  $a(x) = \frac{J_0(2x)}{J_0(2)}$ ,  $b(x) = 0$ ,  $f(t) = \cos 2t$ ;

c)  $a(x) = J_0(\mu_1 x)$ , где  $\mu_1$  - первый корень уравнения  $J_0(\mu) = 0$ ,  $b(x) = 0$ ,  $f(t) = t - 1$ .

56. Найти решение смешанной задачи:

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + g(t), \quad 0 < x < 1,$$

$$u|_{t=0} = a(x), \quad u_t|_{t=0} = b(x), \quad |u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = f(t),$$

a)  $a(x) = 1 - \frac{J_0(2x)}{J_0(2)}$ ,  $b(x) = 0$ ,  $f(t) = 0$ ,  $g(t) = \cos t$ ;

b)  $a(x) = 1$ ,  $b(x) = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{J_0(3x)}{J_0(3)} \right)$ ,  $f(t) = 1$ ,  $g(t) = \cos 3t$ ;

c)  $a(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{J_0(2x)}{J_0(2)} - 1 \right) + J_0(\mu_1 x)$ , где  $\mu_1$  - корень уравнения

$$J_0(\mu) = 0, b(x) = 0, f(t) = 0, g(t) = -2 \cos 2t.$$

57. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{1}{x^2} u + f(t) J_1(\mu_k x),$$

где  $\mu_k$  - корень уравнения  $J_1(\mu_k) = 0$ ,  $0 < x < 1$ ,

$$u|_{t=0} = 0, u|_{x=1} = 0, |u|_{x=0} < \infty,$$

если: а)  $f(t) = \sin t$ , б)  $f(t) = e^{-t}$

58. Решить следующие смешанные задачи:

a)  $u_t = x u_{xx} + u_x - \frac{1}{4x} u + t J_1(\mu_k \sqrt{x})$ , где  $\mu_k$  - корень уравнения

$$J_1(\mu_k) = 0, 0 < x < 1, u|_{t=0} = 0, u|_{x=1} = 0, |u|_{x=0} < \infty.$$

b)  $u_t = x u_{xx} + u_x - \frac{9}{4x} u$ ,  $0 < x < 1$ ,  $u|_{x=1} = 0$ ,  $|u|_{x=0} < \infty$ ,

$$u|_{t=0} = J_3(\mu_k \sqrt{x}), \text{ где } \mu_k \text{ - корень уравнения } J_3(\mu_k) = 0.$$

### Библиографический список

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972.

2. Будак Б.М. Сборник задач по математической физике/ Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. М.: Наука, 1980.

3. Очан Ю.С. Методы математической физики/ Ю.С. Очан. М.: Высшая школа, 1965.

4. Очан Ю.С. Сборник задач по методам математической физики/ Ю.С. Очан. М.: Высшая школа. 1973.



5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики/ В.С. Владимиров. М.: Наука. 1985.
6. Сборник задач по уравнениям математической физики/ под ред. В.С. Владимирова. М.: Физматлит, 2001.
7. Справочник по специальным функциям/ под ред. М. Абрамовица и М. Стигана. М.: Наука, 1979.
8. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации/ Ю. Люк. М.: Наука, 1980.
9. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции/ В.Я. Арсенин. М.: Наука. 1974.
10. Никифоров А.Ф. Специальные функции математической физики/ А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. М.: Наука, 1984.

**Смешанные граничные условия**

В этом приложении обсуждается важный вопрос о знаках отношения коэффициентов граничных условий (1.4)

$$\begin{aligned}\alpha_1 y' + \beta_1 y|_{x=a} &= 0, \\ \alpha_2 y' + \beta_2 y|_{x=b} &= 0.\end{aligned}\tag{I.1}$$

Напомним, что должно выполняться условие  $\beta_1/\alpha_1 < 0$  и  $\beta_2/\alpha_2 > 0$ . Знаки этих отношений коэффициентов важны при формулировании граничных условий в различных физических задачах. В качестве одного из простых примеров рассмотрим задачу о продольных колебаниях горизонтальной пружины длиной  $l$ , один из концов которой в  $x = 0$  закреплен, а другой конец в  $x = l$  закреплен упруго. Точка пружины, имеющая в начальный момент времени  $t = 0$  координату  $x$ , в некоторый момент времени будет иметь координату  $\tilde{x} = x + u(x, t)$ . Граничное условие в точке  $x = 0$  для смещения  $u(x, t)$ :

$$u(0, t) = u|_{x=0} = 0.\tag{I.2}$$

Это граничное условие имеет простой физический смысл: левый конец пружины в  $x = 0$  закреплен, поэтому не может перемещаться. Следовательно, отклонение этого конца пружины должно быть равно нулю в любой момент времени  $t$ . Обсудим теперь граничное условие на правом конце пружины при  $x = l$ . Сила натяжения пружины  $F(x, t)$ , которая подчиняется закону Гука, в  $x = l$  имеет вид

$$F(l, t) = k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = k u_x|_{x=l},\tag{I.3}$$

где  $k$  - модуль Юнга,  $k > 0$ . Если бы правый конец пружины был бы свободен, т.е. на него не действовали бы никакие внешние силы, то граничное условие в  $x = l$  имело бы простой вид

$$u_x|_{x=l} = 0.\tag{I.4}$$

В нашем случае упругого закрепления, при котором конец  $x = l$  может перемещаться, но упругая сила закрепления вызывает на

этом конце натяжение, стремящееся вернуть конец в прежнее положение. То есть действие этой упругой силы направлено в противоположную сторону действия силы упругости пружины (I.3). Эта упругая сила, согласно закону Гука, пропорциональна смещению  $u(x, t)$ . Коэффициент пропорциональности  $\gamma$  называется коэффициентом жесткости закрепления, причем  $\gamma > 0$ . Следовательно, граничное условие при упругом закреплении в  $x = l$  имеет вид

$$ku_x|_{x=l} = -\gamma u|_{x=l} \quad (I.5)$$

или

$$\mathcal{G}(t) = 0. \quad (I.6)$$

Данное граничное условие (I.6) совпадает со вторым условием (I.1). Из (I.6) видно, что  $\gamma/k > 0$ , т.к. в противном случае мы получаем условие, противоречащее физическим законам. Такой знак соответствует знаку отношения  $\beta_2/\alpha_2 > 0$  в (I.1). Пусть теперь в  $x = 0$  левый конец пружины тоже упруго закреплен. В этой точке сила упругости пружины  $F(x, t)$  имеет вид

$$F|_{x=0} = ku_x|_{x=0}. \quad (I.7)$$

Упругая сила, действующая на левый конец пружины, имеет вид

$$F|_{x=0} = \gamma u|_{x=0}. \quad (I.8)$$

Следовательно, граничное условие в точке  $x = 0$

$$ku_x - \gamma u|_{x=0} = 0 \quad (I.9)$$

Полученное граничное условие (I.9) аналогично первому условию (I.1). Причем  $-\gamma/k < 0$ , что соответствует  $\beta_1/\alpha_1 < 0$ .

Отметим, что часто физические задачи содержат неоднородные граничные условия, т.е. правые части (I.1) отличные от нуля. Однако при решении необходимо такие граничные условия привести к однородным (путем введения дополнительных функций – см. примеры в главе 2), так как в задаче Штурмаллиувилля граничные условия должны быть обязательно однородными.

Приведем еще один пример, где встречаются условия, аналогичные (I.1) и (I.6), (I.9). Рассмотрим остывание однород-

ного стержня, на концах которого задан закон теплообмена с окружающей средой, которая имеет температуру  $\vartheta(t)$ . Рассмотрим элемент стержня  $(x_1, x_1 + \Delta x)$  длиной  $\Delta x$ . За единицу времени этот элемент получит приращение тепла  $c\rho\sigma\Delta x u_t$ , где  $c$  - удельная теплоемкость,  $\rho$  - плотность массы,  $\sigma$  - поперечное сечение. Это количество тепла равно приращению тепла, поступившему единицу времени через поперечные сечения  $x_1$  и  $x_1 + \Delta x$

$$-\sigma\lambda u_x \Big|_{x=x_1} + \sigma\lambda u_x \Big|_{x=x_1+\Delta x}.$$

Здесь  $\lambda$  - удельный коэффициент теплопроводности стержня. Следовательно, получаем следующее равенство:

$$c\rho\Delta x u_t = -\lambda u_x \Big|_{x=x_1} + \lambda u_x \Big|_{x=x_1+\Delta x}. \quad (I.10)$$

Обсудим более подробно знаки слагаемых в правой части (I.10). Если на торце  $x$  рассматриваемого элемента стержня будет  $u_x > 0$ , т.е. градиент температуры направлен вдоль оси  $x$  и в точках, лежащих правее торца  $x_1$ , т.е. для  $x_1 < x < x_1 + \Delta x$  (точки внутри рассматриваемого элемента) температура будет больше, чем в точках, лежащих левее торца, т.е. для  $x_1 > x$  (точки вне элемента). Следовательно, тепло будет вытекать из элемента – тепловой поток направлен в противоположную сторону оси  $x$  (напомним, что  $\vec{q} = -\kappa\nabla T$ ), поэтому первое слагаемое в правой части (I.10) надо брать со знаком минус. Если же  $u_x < 0$ , то температура в точках левее торца ( $x < x_1$ ) будет больше, чем температура в точках правее торца ( $x_1 < x < x_1 + \Delta x$ ), то тепло втекает в стержень и тепловой поток направлен вдоль оси  $x$ . Следовательно, первое слагаемое в правой части (I.10) должно быть положительным, поэтому перед ним надо поставить знак минус, так как  $u_x < 0$ . Аналогичные рассуждения используются и при обосновании знака для второго слагаемого в правой части (I.10).

Используя уравнение (I.10), получим граничные условия на торцах стержня. По условию задачи на них задан теплообмен

с окружающей средой, которая имеет температуру  $\mathcal{G}(t)$ . Рассмотрим сначала правый конец стержня  $x = l$ . Запишем аналог уравнения (I.10) для элемента  $(l - \Delta x, l)$ . На левом конце  $x = l - \Delta x$  рассматриваемого элемента тепловой поток совпадает с первым слагаемым (I.10):  $-\lambda \sigma u_x|_{x=l-\Delta x}$ . Через правый же торец  $x = l$  количество тепла, поступающее за единицу времени в рассматриваемый элемент, равно  $\sigma \alpha (u|_{x=l} - \mathcal{G}(t))$ , где  $\alpha > 0$  - коэффициент теплообмена. Эта разность положительна, если температура торца стержня больше температуры окружающей среды, т.е. тепловой поток направлен вдоль оси  $x$  - элемент теряет тепло (остывает), и отрицательна в противоположном случае - элемент нагревается. Следовательно, уравнение (I.10) вблизи правого конца стержня примет вид

$$c\rho\Delta x u_t = -\lambda u_x|_{x=l-\Delta x} - \alpha (u|_{x=l} - \mathcal{G}(t)). \quad (\text{I.11})$$

Еще раз отметим, что  $-\alpha (u|_{x=l} - \mathcal{G}(t)) > 0$ , если температура окружающей среды больше температуры правого торца стержня, т.е. стержень нагревается. Переходя в уравнении (I.11) к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим граничное условие для торца  $x = l$

$$\lambda u_x + \alpha (u - \mathcal{G}(t))|_{x=l} = 0. \quad (\text{I.12})$$

Полученное условие имеет вид подобный второму условию (1.4) и условию (I.6), если положить  $\mathcal{G}(t) = 0$ . При этом  $\alpha/\lambda > 0$ . Аналогично получается граничное условие и для левого конца стержня  $x = 0$  при рассмотрении элемента  $(0, \Delta x)$ . В этом случае тепловой поток за единицу времени на правом торце  $x = \Delta x$  рассматриваемого элемента совпадает со вторым слагаемым уравнения (I.10):  $\sigma \lambda u_x|_{x=\Delta x}$ . Через левый торец  $x = 0$  рассматриваемый элемент получает тепла  $-\sigma \alpha (u|_{x=0} - \mathcal{G}(t))$ . Этот тепловой поток положителен, если температура стержня меньше температуры окружающей среды, т.е. стержень нагревается, и тепловой поток направлен вдоль оси  $x$ . Следовательно, уравне-

ние (I.10) для элемента  $(0, \Delta x)$  стержня запишется следующим образом:

$$c\rho\Delta x u_t = -\alpha(u|_{x=0} - \mathcal{G}(t)) + \lambda u_x|_{x=\Delta x} \quad (\text{I.13})$$

или, в пределе при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,

$$\lambda u_x - \alpha(u - \mathcal{G}(t))|_{x=0} = 0. \quad (\text{I.14})$$

Полученное граничное условие (I.14) совпадает с первым условием (1.4) и с условием (I.9). Более того,  $-\alpha/\lambda < 0$ .

Из приведенных примеров следует, что знак соотношения коэффициентов для граничных условий (I.1) очень важен. В противном случае могут возникнуть бессмысленные физические ситуации, например, отрицательная теплопроводность – холодное тело нагревает более горячее. Отметим, однако, что в некоторых физических задачах другие знаки в соотношениях (I.1). Например, к ним можно отнести некоторые задачи диффузии.

Коротко обсудим аналогичное ограничение на знаки в граничных условиях для многомерных областей. Пусть для некоторой прямоугольной области координата  $x$  изменяется в интервале  $[a, b]$ ,  $y$  - в  $[c, d]$ . Многие физические задачи, например, колебания прямоугольных мембран и пластин, задачи теплопроводности и электропроводности для таких объектов и т.д., приводят к задачам Штурма-Лиувилля отдельно для переменной  $x$  и переменной  $y$ . Краевые условия задаются на всех четырех границах области. Для переменной  $x$  они по-прежнему имеют вид (1.4), для переменной  $y$  они выглядят аналогично

$$\begin{aligned} \alpha_3 u' + \beta_3 u|_{y=c} &= 0, \\ \alpha_4 u' + \beta_4 u|_{y=d} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

с ясными ограничениями на знаки коэффициентов:  $\beta_3/\alpha_3 < 0$ ,  $\beta_4/\alpha_4 > 0$ .

Подобным образом можно обобщить вывод граничных условий для трехмерного случая в декартовых координатах  $(x, y, z)$ . Пусть переменная  $z$  изменяется в интервале  $[e, f]$ , тогда краевые условия для нее будут выглядеть подобно (1.4) и (I.15)

$$\begin{aligned}\alpha_5 u' + \beta_5 u \Big|_{z=e} &= 0, \\ \alpha_6 u' + \beta_6 u \Big|_{z=f} &= 0,\end{aligned}\tag{I.16}$$

При этом  $\beta_5/\alpha_5 < 0$ ,  $\beta_6/\alpha_6 > 0$ .

В случае области, представляющей собой круг радиуса  $R$ , удобнее пользоваться полярными координатами  $(r, \varphi)$ . Граничное условие на границе окружности  $r = R$  в общем случае выглядит так:

$$\alpha u' + \beta u \Big|_{r=R} = 0,\tag{I.17}$$

с ограничением за знаки коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\beta/\alpha > 0$ . Если рассматриваемая область задается условием  $r \geq R$ , то знак соотношения коэффициентов в условии (I.17), очевидно, следует брать противоположный:  $\beta/\alpha < 0$ . Полученные граничные условия легко обобщить на случай кольцевой области  $a \leq r \leq b$

$$\begin{aligned}\alpha_1 u' + \beta_1 u \Big|_{r=a} &= 0, \\ \alpha_2 u' + \beta_2 u \Big|_{r=b} &= 0,\end{aligned}\tag{I.18}$$

с понятными ограничениями на знаки:  $\beta_1/\alpha_1 < 0$ ,  $\beta_2/\alpha_2 > 0$ .

Для круглого цилиндра радиуса  $R$  и высотой  $l$  в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  смешанные граничные условия на поверхности

$$\begin{aligned}\alpha_1 u' + \beta_1 u \Big|_{r=R} &= 0, \\ \alpha_2 u' + \beta_2 u \Big|_{z=0} &= 0, \\ \alpha_3 u' + \beta_3 u \Big|_{z=l} &= 0.\end{aligned}\tag{I.19}$$

Отношения коэффициентов краевых условий (I.19) имеют знаки, аналогичные рассмотренным выше случаям:  $\beta_1/\alpha_1 > 0$ ,  $\beta_2/\alpha_2 < 0$ ,  $\beta_3/\alpha_3 > 0$ .

Для шара радиуса  $R$  в сферических координатах  $(r, \varphi, \psi)$  на сферической поверхности граничное условие выглядит так:

$$\alpha u' + \beta u \Big|_{r=R} = 0,\tag{I.20}$$

с ограничением на знак соотношения коэффициентов:  $\beta/\alpha > 0$ .

### Функция Дирака

Функция Дирака (или дельта-функция) определена через интеграл

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk.$$

Наиболее часто  $\delta$  - функция используется при вычислении интеграла от функции  $f(x)$ , локализованной в некоторой точке  $x_0$

$$\int_a^b f(\xi) \delta(\xi - x_0) d\xi = \begin{cases} 0, & x_0 < a, x_0 > b \\ \frac{1}{2} f(x_0), & x_0 = a, x_0 = b \\ f(x_0), & a < x_0 < b, \end{cases}$$

где  $f(x)$  - произвольная функция, непрерывная в точке  $x = x_0$ .

Приведем несколько формальных соотношений, содержащих  $\delta(x)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \delta(-x) = \delta(x), \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (a \neq 0),$$

$$f(x) \delta(x - a) = \frac{1}{2} [f(a - 0) + f(a + 0)] \delta(x - a), \quad x \delta(x) = 0,$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (a \neq 0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a - x) \delta(x - b) dx = \delta(a - b).$$



**Гамма – функция**

Гамма функция определена через интеграл

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (\text{III.1})$$

Здесь  $x$  - произвольное неотрицательное действительное число. В случае, когда  $x$  целое и  $\geq 2$ , то интеграл (III.1) можно посчитать по частям, сделав замену  $t^{x-1} = u$ ,  $e^{-t} dt = dv$

$$\Gamma(x) = t^{x-1} e^{-t} \Big|_0^{\infty} + (x-1) \int_0^{\infty} t^{x-2} e^{-t} dt = (x-1) \int_0^{\infty} t^{x-2} e^{-t} dt. \quad (\text{III.2})$$

Получившийся интеграл в (III.2) равен  $\Gamma(x-1)$ , т.е.

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1). \quad (\text{III.3})$$

Подставляя в (III.3)  $\Gamma(x-1) = (x-2)\Gamma(x-2)$ ,  $\Gamma(x-2) = (x-3)\Gamma(x-3)$  и т.д., получим

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\dots\Gamma(1), \quad (\text{III.4})$$

где

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1. \quad (\text{III.5})$$

Поставляя (III.5) в (III.4), найдем, что

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\dots 1 = (x-1)!, \quad x \geq 2, \quad x \in Z. \quad (\text{III.6})$$

Таким образом, через Гамма-функцию можно вычислять факториалы целых чисел. Более того, одним из важнейших свойств этой функции является возможность *вычислять факториалы любых чисел!* Сначала убедимся, что формула (III.6) справедлива при  $x=1$ . Положим  $x=1$  в (III.6), тогда  $\Gamma(1) = 0! = 1$ , что согласуется с (III.5) (и т.д. для целых значений аргумента  $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2, \dots, \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad (\text{III.7})$$

Перейдем к нецелым значениям аргумента  $x$ . Для  $x = 1/2$ , используя (III.1) и вводя обозначение  $t = z^2$ , получим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}. \quad (\text{III.8})$$

Теперь, используя рекуррентное соотношение (III.2), можем найти значение при  $x = 3/2$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (\text{III.9})$$

**Упражнение:** Показать, что при любом целом  $x \geq 1$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \quad (\text{III.10})$$

Определив значения для нецелых положительных  $x$ , можно перейти к отрицательным значениям аргумента Гамма-функции. Для этого воспользуемся рекуррентным соотношением (III.2). Сначала заменим  $x$  на  $x+1$  в (III.2)

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \quad (\text{III.11})$$

Используем полученное выражение (III.11) для нахождения, например, значения  $\Gamma(-1/2)$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)}{-1/2} = -2\sqrt{\pi}. \quad (\text{III.12})$$

Становится очевидным, что, используя формулы (III.1) и (III.12), можно найти значения  $\Gamma(x)$  для любого  $x$ , за исключением 0 и отрицательных целых чисел.

Из уравнения (III.1) следует, что функция  $\Gamma(x)$  при  $x = 0$  расходится. В результате этого из рекуррентного соотношения (III.11) вытекает, что значение функции  $\Gamma(-1)$  неопределенно, т.к.  $\Gamma(x)$  в  $x = 0$  расходится. Следовательно,  $\Gamma(x)$  не существует при аргументе  $x$ , равным отрицательным целым числам, которые являются ее простыми полюсами. График функции  $\Gamma(x)$  показан на рисунке.

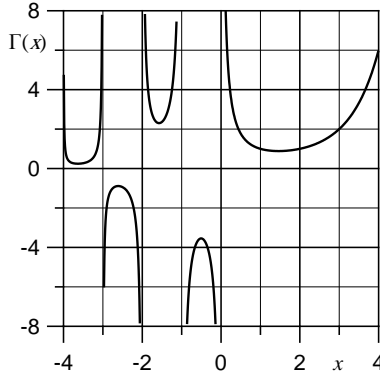


График функции  $\Gamma(x)$

Из соотношения (III.11) можно найти значения функции  $\Gamma(x)$  при любых положительных значениях аргумента используя значения  $\Gamma(x)$  на интервале  $1 \leq x \leq 2$ . Действительно, из (III.11) получаем, что, например,  $\Gamma(3.4) = 3.4 \cdot \Gamma(2.4) = 3.4 \cdot 2.4 \cdot \Gamma(1.4)$ . Используя это свойство Гамма-функции, достаточно в таблице значений привести значения  $\Gamma(x)$  при  $x \in [1, 2]$ . Гамма-функция  $\Gamma(x)$  при положительных значениях аргумента достигает минимума при  $x = 1.461632145$ .

Формулы (III.7) для любого положительного целого  $x$  можно записать в виде

$$\Gamma(x+1) = x!$$

(III.13)

С другой стороны, из (III.1) для  $\Gamma(x+1)$  получаем

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt.$$

(III.14)

Подынтегральная функция имеет резкий максимум при  $t = x$ , что позволяет получить хорошо известную формулу Стирлинга для  $x!$  при больших значениях  $x$

$$x! \sim (2\pi x)^{1/2} x^x e^{-x}. \quad (\text{III.15})$$

С помощью этой формулы можно вычислять значения  $x!$  не только для больших значений  $x$ , например, при  $x = 10$  относительная погрешность составляет менее 0.8%. Формула Стирлинга (III.15) получили наиболее распространение в статистической физике, где приходится вычислять значений факториала для очень больших чисел.

В заключении приведем еще две часто используемые формулы

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (\text{III.16})$$

$$\Gamma(2x) = \pi^{-1/2} 2^{2x-1} \Gamma(x)\Gamma(x+1/2) \quad (\text{III.17})$$

Значения  $\Gamma(x)$  при  $x \in [1, 2]$

$x$	$\Gamma(x)$	$x$	$\Gamma(x)$	$x$	$\Gamma(x)$
1	1	1.35	0.8911514420	1.7	0.9086387329
1.05	0.9735042656	1.4	0.8872638175	1.75	0.9190625268
1.1	0.9513507699	1.45	0.8856613803	1.8	0.9313837710
1.15	0.9330409311	1.5	0.8862269255	1.85	0.9456111764
1.2	0.9181687424	1.55	0.8888683478	1.9	0.9617658319
1.25	0.9064024771	1.6	0.8935153493	1.95	0.9798806513
1.3	0.8974706963	1.65	0.9001168163	2	1

### Задачи

1. Вычислить  $\Gamma(-5/2)$ ,  $\Gamma(-7/2)$ ,  $\Gamma(9/4)$ ,  $\Gamma(11/4)$ ,  $\Gamma(11/2)$ .
2. Показать, что  $\Gamma(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)\Gamma(x)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ),
3. Доказать  $\Gamma(x-n) = \frac{\Gamma(x)}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ).

4. Вычислить  $\int_0^{\infty} t^5 e^{-t^4} dt$  в терминах гамма-функции.

5. Вычислить  $\int_0^{\infty} t^m e^{-t^n} dt$  в терминах гамма-функции, если  $m$  и  $n$  положительные целые числа.

6. Показать, что  $\int_0^{\infty} t^{2n} e^{-at^2} dt = \frac{\Gamma(n + 1/2)}{2a^{n+1/2}}$ .

7. Показать, что  $\Gamma(n + 1/2)\Gamma(1/2 - n) = \frac{\pi}{\cos n\pi}$ .

## Содержание

Глава 1. Задача Штурма-Лиувилля	3
Задачи	26
Глава 2. Функции Бесселя	31
2.1. Краевая задача, приводящая к функциям Бесселя	31
2.2. Функции Бесселя 1-го рода	38
2.3. Ортогональность и нормировка	55
2.4. Ряды Фурье-Бесселя	59
Задачи	102
Библиографический список	112
Приложение I. Смешанные граничные условия	114
Приложение II. Функция Дирака	120
Приложение III. Гамма-функция	121

*Учебно-методическое издание*

**Алексей Анатольевич Алабужев  
Татьяна Сергеевна Белозерова  
Виктор Карлович Хеннер**

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ  
ЧАСТЬ I  
СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ**

Редактор *Н.И. Стрекаловская*  
Корректор *А.В. Цветкова*  
Компьютерная верстка *А.А. Алабужева*

Подписано в печать 20.02.2007. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. л. 7. Уч.-изд. л. 3.  
Тираж 100 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел Пермского государственного университета  
614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография Пермского государственного университета  
614990. Пермь, ул. Букирева, 15