

А.А. Алабужев, Т.С. Белозерова, В.К. Хеннер

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Часть I

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

$$\Delta U(x, y) = 0,$$

$$U|_{x=0} = V, U|_{x \rightarrow \infty} = O(1),$$

$$U|_{y=0} = V_0, U|_{y=b} = 0.$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. А. Алабужев, Т. С. Белозерова, В. К. Хеннер

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Часть I
ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки бакалавров «Физика»,
«Прикладная математика и физика», «Нанотехнологии
и микросистемная техника», «Радиофизика»
и по направлению подготовки магистров
«Физика»*



Пермь 2016

УДК 517.58
ББК 22.311
А 45

Алабужев А. А.

А 45 Методы математической физики. Уравнения эллиптического типа: учеб.-метод. пособие: в 2 ч. / А. А. Алабужев, Т. С. Белозерова, В. К. Хеннер; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2016. – Ч. I: Прямоугольная система координат. – 102 с.

ISBN 978-5-7944-2694-6 (Ч. I)

ISBN 978-5-7944-2693-9

В данном пособии подробно рассматриваются важнейшие уравнения эллиптического типа – уравнения Лапласа и Пуассона. Основное внимание уделяется физическим задачам, математическая постановка которых содержит уравнения данного вида.

Цель пособия – помочь студентам физических и математических специальностей в изучении теории дифференциальных уравнений в частных производных, приводящих к уравнениям Лапласа и Пуассона, в определении методов решения таких уравнений в прямоугольной (декартовой) системе координат и самостоятельном решении задач по моделированию различных физических явлений и процессов.

Ил. 6. Библиогр. 18 назв.

УДК 517.58
ББК 22.311

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Пермского государственного национального исследовательского университета*

Рецензенты: лаборатория физики и механики мягкого вещества Ин-та механики сплошных сред УрО РАН (рецензент – зав. лабораторией, д. ф.-м. н., проф. **Ю. Л. Райхер**); к. ф.-м. н., доц. кафедры общей физики Перм. нац. исслед. политехн. ун-та **А. В. Перминов**

ISBN 978-5-7944-2694-6 (Ч. I)
ISBN 978-5-7944-2693-9

© ПГНИУ, 2016

© Алабужев А.А., Белозерова Т.С.,
Хеннер В. К., 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Эллиптические уравнения.....	5
1.1. Общие сведения.....	5
1.2. Стационарное распределение тепла и диффузия.....	7
1.3. Потенциальные поля и электростатический потенциал....	8
1.4. Невязкое течение несжимаемой жидкости.....	15
1.5. Граничные условия: общие сведения.....	18
1.6. Принцип максимума. Корректность краевой задачи.....	23
Глава 2. Решение уравнений Лапласа и Пуассона в прямоуголь- ной области.....	27
2.1. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в прямо- угольнике.....	27
2.2. Методика ускорения сходимости рядов в случае согласо- ванных граничных условий.....	32
2.3. Другие типы краевых условий.....	35
2.4. Одномерная задача Штурма-Лиувилля.....	37
2.5. Решения неоднородной задачи.....	39
2.6. Задача о распределении температуры внутри прямо- угольной области.....	41
2.7. Уравнение Пуассона в прямоугольной области.....	44
Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямо- угольной области.....	49
Задачи.....	91
Библиографический список.....	100

Введение

Эллиптические уравнения относятся к дифференциальным уравнениям второго порядка в частных производных и описывают стационарные процессы [1-6]. Например, уравнения Лапласа и Пуассона описывают различные стационарные физические поля, уравнение Стокса (стационарный аналог уравнения Навье-Стокса) описывает установившееся течение жидкости, уравнение Гельмгольца получается из уравнений Максвелла из предположения, что электромагнитное поле либо не меняется с течением времени, либо меняется по гармоническому закону и т.д.

Для аналитического решения эллиптических уравнений обычно используют метод разделения переменных (метод разложения в ряды Фурье), метод функции Грина и метод потенциалов [7-13].

В данном пособии основное внимание уделяется аналитическому решению уравнений Лапласа и Пуассона в декартовой системе координат. Вид решения таких уравнений определяется граничными условиями, поэтому подробно рассматриваются основные краевые задачи: задача Дирихле (первая краевая задача), задача Неймана (вторая краевая задача) и задача Робена (третья краевая задача).

Авторы выражают свою искреннюю признательность Сергею Викторовичу Шкляеву за его огромный вклад в создание данного пособия.

Глава 1

Эллиптические уравнения

1.1. Общие сведения

При изучении стационарных (не зависящих от времени) процессов [1-6] очень часто встречаются уравнения эллиптического типа [7-13]. Одним из самых распространенных является уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 u = 0 \text{ или } \Delta u = 0. \quad (1.1.1)$$

Оператор ∇^2 (другое обозначение Δ) является скалярным произведением двух векторных операторов градиента $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$. В декартовой системе координат

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

и уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Выражение в левой части называется *оператором Лапласа* (или *Лапласианом*) скалярной функции u и

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называется *оператором Лапласа* (или *Лапласианом*).

Функция называется *гармонической* в некоторой области, если она имеет непрерывные производные первого и второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа (1.1.1) в этой области. Например, функции $2xy$, $x^2 - y^2$, $e^{-x} \cos y$ удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.1.2)$$

которое является дифференциальным уравнением в частных производных для функции двух переменных $u(x, y)$. Таким образом, эти

функции являются гармоническими во всей плоскости (x, y) . Отметим, если функции u_1 и u_2 гармонические, то и их линейная комбинация $c_1 u_1 + c_2 u_2$ (c_1 и c_2 – некоторые действительные константы) тоже является гармонической функцией в силу линейности уравнения Лапласа.

Неоднородное уравнение

$$\nabla^2 u = -f$$

с заданной функцией f , зависящей от координат, называется *уравнением Пуассона*. Ниже мы покажем, что знак минус в правой части соответствует большому количеству физических процессов.

Очевидно, что вид оператора Лапласа зависит от системы координат. Кроме декартовой системы координат (СК), наиболее часто встречающимися СК являются цилиндрическая и сферическая.

Формулы преобразования декартовых координат (x, y, z) в цилиндрические (r, φ, z) хорошо известны

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

и оператор Лапласа в цилиндрической СК имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.1.3)$$

Частным случаем трехмерной цилиндрической СК является двумерная полярная СК с координатами (r, φ) :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

Лапласиан

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Формулы для перехода из декартовой СК в сферическую (r, φ, ϑ) имеют следующий вид:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta,$$

и Лапласиан будет выглядеть следующим образом:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.1.4)$$

Множество стационарных физических процессов, таких как теплопередача, диффузия, электростатика, гидродинамика и пр., описываются уравнением Лапласа или Пуассона. Ниже мы приводим несколько примеров, иллюстрирующих эти явления.

1.2. Стационарное распределение тепла и диффузия

Во многих ситуациях процесс распространения тепла в физическом теле описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (1.2.1)$$

где T – температура, χ – коэффициент температуропроводности. Если тело поддерживается в состоянии равновесия (т.е. не зависит от времени), например, с помощью постоянного нагрева на его поверхности или потока тепла через его поверхность, то уравнение (1.2.1) сводится к уравнению Лапласа:

$$\Delta T = 0. \quad (1.2.2)$$

Когда среда содержит источник тепла, уравнение теплопроводности становится неоднородным:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + \frac{Q}{\rho c}, \quad (1.2.3)$$

где ρ – массовая плотность, c – удельная теплоемкость, Q – функция координат и времени, описывающая скорость, с которой источник излучает или поглощает энергию в единице объема за единицу времени.

Если температура (и источник тепла) не зависят от времени, то уравнение (1.2.3) становится частным случаем уравнения Пуассона:

$$\Delta T = -\frac{Q}{\rho c \chi},$$

которое можно записать в более общем виде:

$$\Delta u = -f.$$

Аналогичные рассуждения можно использовать в случае нестационарного уравнения диффузии

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D\nabla^2 q + F, \quad (1.2.4)$$

где D – коэффициент диффузии, F – источник диффундирующего вещества.

1.3. Потенциальные поля и электростатический потенциал

В этом разделе рассмотрим другую физическую ситуацию, которая тоже приводит к уравнению Пуассона или Лапласа. Работа по перемещению, которую совершают силы электростатического поля (т.е. поля, создаваемого стационарными, фиксированными зарядами), зависит только от расположения начальной и конечной точек движения, но не от пути, соединяющего эти точки. Отметим, что такие поля называют консервативными или потенциальными. Это свойство позволяет ввести в рассмотрение очень важное понятие потенциала электростатического поля.

Определение: разность потенциалов между двумя точками в электростатическом поле напряженностью \vec{E} равна взятой с обратным знаком работе, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда из первой точки во вторую, т.е.

$$d\phi = -dW = -\vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (1.3.1)$$

или

$$\phi - \phi_0 = -W = -\int_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (1.3.2)$$

где L – произвольная линия, соединяющая точки P_0 и P .

Если начальная и конечная точки совпадают, то из формулы (1.3.2) получаем, что

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0, \quad (1.3.3)$$

т.е. интеграл вектора напряженности \vec{E} по любому замкнутому контуру равен нулю. Вообще поле произвольного вектора \vec{E} , вне зависимости от его физического смысла (сила, скорость и т.д.), является потенциальным в том и только в том случае, если при любом выборе закинутого пути интегрирования L выполняется условие (1.3.3) [1,2,4].

Линейный интеграл $\int_L \vec{E} \cdot d\vec{s}$ произвольного вектора \vec{E} вдоль какого-либо произвольного закинутого пути L называется циркуляцией этого вектора вдоль пути L . Теорема Стокса позволяет выразить циркуляцию вектора по замкнутому контуру через оператор ротора от этого вектора:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (1.3.4)$$

(вектор $d\vec{S}$ перпендикулярен элементу площади dS и имеет длину $|d\vec{S}|$; направление $d\vec{S}$ определяется правилом правой руки для контура L).

Таким образом, из формул (1.3.3) и (1.3.4) для вектора напряженности \vec{E} электростатического поля получаем, что

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \text{ или } \text{rot}(\vec{E}) = 0. \quad (1.3.5)$$

Это уравнение входит в систему уравнений Максвелла для стационарного электромагнитного поля.

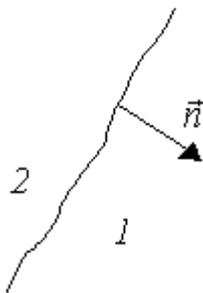


Рис. 1.1. Поверхность раздела двух сред

Из уравнения (1.3.3) следует, что вдоль любой поверхности касательная компонента вектора напряженности непрерывна $E_{1t} = E_{2t}$ (индексы 1 и 2 соответствуют двум однородным средам, разделенным поверхностью, см. рис. 1). В частности, так как в стационарном случае напряженность поля внутри проводников равна нулю $\vec{E} = 0$, то тангенциальная составляющая \vec{E} их внешней поверхности тоже должна равняться нулю $E_t = 0$. Это означает,

что на внешней поверхности проводника поле имеет только нормальную составляющую E_n . Электрическое поле вне проводника и вблизи его поверхности равно $\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$ (\vec{n} – внешняя нормаль поверхности проводника, σ – поверхностная плотность заряда). Этот результат легко получается с помощью применения теоремы Гаусса для электростатического поля, которое создается стационарными зарядами заданной плотности. Из данной формулы следует, что на поверхности имеется разрыв нормальной составляющей поля \vec{E} , равный $|\Delta E_n| = 4\pi\sigma$. Отметим, что это выражение справедливо и для поверхности раздела двух диэлектриков. Таким образом, для потенциала на поверхности будет справедливо следующее условие:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_1 = 4\pi\sigma, \quad (1.3.6)$$

где вектор нормали к поверхности направлен в стороны среды 1 (см. рис. 1).

Легко показать, что формулы

$$d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_s ds \quad (1.3.7)$$

(где E_s – компонента вектора вдоль бесконечно малого приращения ds) и

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (1.3.8)$$

эквивалентны. Действительно, из первой формулы (1.3.7) получаем, что $\partial\phi/\partial s = -E_s$, где $\partial\phi/\partial s$ обозначает производную от потенциала ϕ в направлении вектора \vec{s} . Это то же самое, что и $E_s = -\text{grad}_s\phi$. Это можно записать в виде формулы (1.3.8), т.к. направление вектора \vec{s} произвольно. Вектор градиента потенциала $\nabla\phi$ направлен в сторону увеличения потенциала, а вектор напряженности \vec{E} – в сторону уменьшения потенциала, поэтому в формуле (1.3.8) стоит знак «минус».

Основная особенность электростатического поля состоит в том, что напряженность поля, создаваемого точечным положительным зарядом, равна

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r} = \frac{q}{r^2} \vec{e}_r, \quad (1.3.9)$$

где $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ – единичный вектор, направленный от заряда в сторону точки, где измеряется поле, r – расстояния от заряда до точки измерения. Из сказанного выше становится понятно, что потенциал такого поля можно представить в виде

$$\phi = \frac{q}{r}. \quad (1.3.10)$$

Этот результат легко получить из формул (1.3.8) и (1.3.9)

$$\vec{E} = -\nabla\phi = q \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (1.3.11)$$

Потенциал поля произвольной системы точечных зарядов q_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ равен, очевидно, сумме потенциалов полей каждого из этих зарядов в отдельности:

$$\phi = \sum_i \frac{q_i}{r_i}. \quad (1.3.12)$$

Напомним, что как эти, так и предшествующие формулы имеют смысл лишь на расстояниях, которые велики по сравнению с самими зарядами.

Полученные выше формулы легко обобщить на случай непрерывного распределения заряда. В случае поверхностного заряда, заряд каждой поверхности может быть разложен на совокупность элементарных зарядов бесконечно малых элементов поверхности dS : $dq = \sigma dS$, где σ – поверхностная плотность заряда. Заменяя в формуле (1.3.12) точечные заряды q_i через dq и переходя от суммирования к интегрированию по всем заряженным поверхностям, получим потенциал поля поверхностных зарядов

$$\phi = \iint \frac{\sigma dS}{r}, \quad (1.3.13)$$

где r – расстояние между элементарной площадкой dS и точкой измерения потенциала.

Для заряда, распределенного с плотностью ρ внутри некоторого объема, роль элементарных зарядов будут играть заряды $dq = \rho dV$ бесконечно малых элементов объема dV , и формула (1.3.12) примет вид

$$\phi = \iiint \frac{\rho dV}{r}, \quad (1.3.14)$$

где r – расстояние от точки с потенциалом ϕ до элементарного объема dV .

Если имеется поверхностное и объемное распределение зарядов, то суммарный потенциал в точке r будет иметь вид

$$\phi = \iiint \frac{\rho dV}{r} + \iint \frac{\sigma dS}{r}. \quad (1.3.15)$$

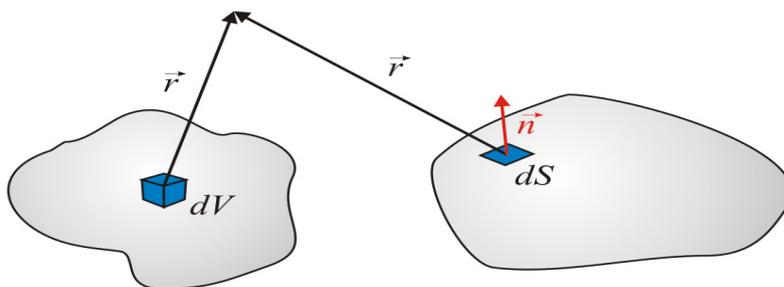


Рис. 1.2. Потенциал при поверхностном и объемном распределении заряда

Поскольку электрическое поле равно нулю внутри замкнутого объема, то электрический потенциал постоянен (см. формулу (1.3.8)), $\phi = const$ и его можно занулить, выбрав это значение за начало отсчета, т.е. потенциал электростатического поля является аддитивной величиной так же, как температура или давление. Следовательно, значение поверхностного интеграла (1.3.15) будет равно нулю, если точка измерения находится внутри объема или на поверхности.

Несмотря на то, что расстояние r входит в знаменатель формул (1.3.13) и (1.3.14), эти интегралы остаются конечными во всех точках поля поверхностного или объемного зарядов. Для примера рассмот-

рим формулу (1.3.13) в сферической СК (r, φ, ϑ) . Элементарный объем в этой СК

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\theta d\varphi$$

и формула (1.3.13)

$$\phi = \iiint \rho r \sin \vartheta dr d\theta d\varphi, \quad (1.3.16)$$

причем подынтегральное выражение конечно даже при $r = 0$.

Теорема Гаусса вместе с уравнением (1.3.8) позволяет установить связь между потенциалом электрического поля и плотностью заряда. Напомним, что теорема Гаусса дает связь между напряженностью электрического поля и плотностью заряда ρ [1]:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (1.3.17)$$

Подставляя в (1.3.17) формулу (1.3.8), получим

$$\operatorname{divgrad}\phi = -\operatorname{div} \vec{E} = -4\pi\rho. \quad (1.3.18)$$

В левой части

$$\operatorname{divgrad}\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi = \Delta\phi, \quad (1.3.19)$$

Следовательно,

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}). \quad (1.3.20)$$

Это уравнение Пуассона для электростатического потенциала. В области, где нет электрических зарядов, например вне тела, где $\rho = 0$, потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta\phi(\vec{r}) = 0. \quad (1.3.21)$$

Эти уравнения были получены Лапласом и Пуассоном для гравитационных полей. Уравнения подобного типа справедливы для потенциала любого поля, силы которого убывают с расстоянием как $1/r^2$.

Уравнение Пуассона (1.3.20) можно использовать для нахождения потенциала поля зарядов, если известна их плотность распределения. Решение этого дифференциального уравнения в частных производных с соответствующими граничными условиями дает результат, аналогичной полученному выше (1.3.14):

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d\vec{r}'. \quad (1.3.22)$$

Отметим, что в большинстве случаев проще решить уравнение Пуассона или Лапласа, а не использовать формулы интегрального представления, приведенные выше.

Упражнение. Докажите, что если r является расстоянием от некоторой фиксированной точки, пусть для простоты от начала отсчета, до некоторой точки в пространстве, то скалярная функция $\phi = r^{-1}$ ($r \neq 0$) удовлетворяет уравнению Лапласа.

Указания:

- i) попробуйте «физическое» доказательство, как если бы ϕ являлось потенциалом точечного заряда и должна быть решением уравнения, описывающего потенциал поля для этого случая;
- ii) найти $\nabla^2(r^{-1})$ в декартовой СК.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} = -3 \frac{x^2}{r^4} + \frac{1}{r^3}, \text{ и т.д.,}$$

откуда

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{r} = 0, \quad (1.3.23)$$

- iii) повторить для цилиндрической СК. Отметим, что в этом случае нельзя просто заменить функцию в (1.1.1) на $1/r$, т.к. r – расстояние до оси, а не до начала отсчета;
- iv) повторить для сферической СК.

Последние два результата могут быть легко получены с использованием оператора Лапласа в этих системах координат и, предположив, что функция ϕ зависит только от r .

Отметим, что *потенциал и его первые производные (градиент) конечны во всем пространстве*. Расходимость потенциала или производной приводят к бесконечным значениям электрического поля, что физически бессмысленно.

1.4. Невязкое течение несжимаемой жидкости

В качестве еще одного примера рассмотрим течение невязкой несжимаемой жидкости, скорость течения которой \vec{v} зависит от координат [6]. Более того, мы не предполагаем, что течение стационарное, т.е. скорость \vec{v} может зависеть от времени тоже. Предположим, что течение безвихревое, т.е.

$$\text{rot}(\vec{v}) = 0 \text{ или } \text{curl} \vec{v} = 0. \quad (1.4.1)$$

Как уже говорилось выше, в этом случае потенциал скорости может быть введен с помощью отношения¹

$$\vec{v} = \text{grad} \phi = \nabla \phi. \quad (1.4.2)$$

Другими словами, это потенциальное течение.

Легко показать, что ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа. Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.4.3)$$

для несжимаемой жидкости (плотность $\rho = \text{const}$) дает $\text{div} \vec{v} = 0$.

Подставляя в это условие выражение $\vec{v} = \text{grad} \phi$

$$\text{div} \vec{v} = \text{div}(\nabla \phi) = \Delta \phi \quad (1.4.4)$$

мы получим, что потенциал ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \phi = 0. \quad (1.4.5)$$

На твердой неподвижной поверхности сосуда можно поставить граничное условие непротекания жидкости

$$\frac{d\phi}{dn} = 0, \quad (1.4.6)$$

где \vec{n} – вектор нормали к твердой поверхности. Если тело движется вместе с жидкостью, то на его поверхности ставится граничное условие

¹ В гидродинамике знак «минус» обычно опускают.

$$\frac{d\phi}{dn} = f(\vec{r}, t), \quad (1.4.7)$$

где $f(\vec{r}, t)$ – нормальная компонента скорости на поверхности тела, которая является функцией координат и времени. Два последних частных граничных условия являются граничными условиями второго рода, или условиями Неймана [7-11].

Более сложные граничные условия возникают при свободной поверхности жидкости или на поверхности раздела между двумя жидкостями. Кратко рассмотрим первый случай (для второго то же самое можно сделать по аналогии в качестве упражнения). Трудность, возникающая в этом случае, состоит в следующем: положение свободной поверхности неизвестно и должно быть найдено одновременно с потенциалом. Таким образом, имеется дополнительная неизвестная функция и нужно дополнительное граничное условие. Если форма поверхности жидкости определяется уравнением

$$F(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.4.8)$$

то функция $F(\vec{r}, t)$ изменяется согласно так называемому *кинематическому уравнению*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\phi \cdot \nabla F = 0, \quad (1.4.9)$$

которое является одним из двух условий на свободной поверхности. Это условие можно записать в Лагранжевом формализме:

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad (1.4.10)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla$ – полная производная, в которую входит скорость жидкости, т.е. $F(\vec{r}, t) = 0$ в любой момент времени. Постоянная интегрирования при взятии интеграла от (1.4.10) равна нулю в силу справедливости условия (1.4.8) на свободной поверхности.

Физический смысл условия (1.4.9) очевиден: нормальная компонента скорости жидкости на поверхности равна скорости движения поверхности в том же направлении. Действительно, хорошо известно, что вектор нормали к свободной поверхности можно определить как

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}, \quad (1.4.11)$$

т.е. F изменяется только за счет нормальной компоненты скорости.

Как мы уже упоминали выше, надо написать еще одно граничное условие, которое связывает потенциал ϕ и функцию F . Это так называемое *условие баланса нормальных напряжений*. Если пренебречь поверхностным натяжением, то давление постоянно на всей свободной поверхности:

$$p = const. \quad (1.4.12)$$

Эту константу часто зануляют, т.к. абсолютное значение давления не влияет на поведение несжимаемой жидкости; важен только градиент давления.

Давление внутри жидкости можно найти через потенциал скорости, используя уравнение Бернулли:

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right) + \Phi(r, t), \quad (1.4.13)$$

где $\Phi(\vec{r}, t)$ – потенциал поля внешних сил (например, $\Phi = -\rho g z$ в гравитационном поле). Объединяя (1.4.12) и (1.4.13), мы получим следующие граничные условия на свободной поверхности:

$$F(\vec{r}, t) = 0: \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla F = 0, \quad (1.4.14)$$

$$-\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right) + \Phi(r, t) = 0. \quad (1.4.15)$$

Отметим, что в общем случае это нелинейные уравнения. Действительно, нелинейное слагаемое $(\nabla \phi)^2$ содержится в граничном условии (1.4.15). Более того, как уравнение (1.4.14), так и (1.4.15) определены на свободной поверхности, которую саму необходимо получить из решения. Таким образом, задача довольно сложная и имеет аналитическое решение только в некоторых случаях.

1.5. Граничные условия: общие сведения

Во-первых, отметим, что в рассматриваемых проблемах, описываемых эллиптическими уравнениями, нет зависимости от времени. Следовательно, нет необходимости ставить начальные условия. Также физически очевидно, что уравнения Лапласа и Пуассона сами по себе не являются достаточными, чтобы определить, например, температуру во всех точках тела, или электрический потенциал вне проводника. Необходимо знать тепловой режим или распределение заряда на поверхности тела или проводника, чтобы решить эти задачи. Эти дополнительные данные представляют собой граничные условия. Из физических соображений ясно, если, например, известно распределение температуры на поверхности тела, то решение такой краевой задачи, которая состоит из уравнения Лапласа или Пуассона вместе с граничным условием, должно существовать и быть нетривиальным.

Граничные условия могут быть сформулированы несколькими способами, и выше мы уже приводили несколько типов для конкретных краевых задач. Ниже мы приведем три основных типа граничных условий, которые соответствуют различным температурным режимам на поверхности тела (здесь для наглядности используются температурные условия, но для других процессов граничные условия можно получить аналогичным образом [7]).

Рассмотрим некоторый объем V , ограниченный поверхностью S . Краевая задача стационарного распределения температуры $u(x, y, z)$ тела может быть описана несколькими способами:

Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри V уравнению Пуассона

$$\Delta u = -f(x, y, z) \quad (1.5.1)$$

и граничному условию, одному из следующих типов:

I. $u = f_1$ на S – граничное условие первого рода.

II. $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на S – граничное условие второго рода.

III. $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0^2$ на S – граничное условие третьего рода.

Здесь f_1, f_2, f_3, h – известные функции, $\partial u/\partial n$ производная по направлению внешней нормали к поверхности S .

Сформулированная таким образом краевая задача, когда необходимо найти температуру внутри некоторого конечного объема V , называется *внутренней краевой задачей*. Если же необходимо найти температуру снаружи тела в неограниченном пространстве, то такая задача называется *внешней краевой задачей*.

Физический смысл написанных выше граничных условий очевиден. Граничное условие первого рода определяет температуру на поверхности тела и называется *условием Дирихле*. Краевая задача с таким условием называется задачей Дирихле, или первой краевой задачей. Граничное условие второго рода определяет тепловой поток через поверхность тела и называется *условием Неймана*. Соответственно, краевая задача с подобным условием называется задачей Неймана, или второй краевой задачей. Граничное условие третьего рода в данном случае соответствует хорошо известному закону Ньютона (или Ньютона-Рихмана) для теплообмена, когда тепловой поток пропорционален разности температур тела и окружающей среды. Краевая задача с граничным условием третьего рода называется смешанной задачей (задачей Робена, задачей Ньютона), или третьей краевой задачей.

Очевидно, что стационарное распределение температуры внутри тела возможно только в том случае, если тело находится в состоянии термодинамического равновесия с окружающей средой, т.е. суммарный тепловой поток (внешний – из тела в окружающую среду и внутренний – из окружающей среды внутрь тела) равен нулю. Следовательно, это накладывает определенные ограничения на граничное ус-

² Отметим, что коэффициент теплопередачи h должен быть неотрицательным.

ловие второго рода внутренней краевой задачи, а именно, функция f_2 должна удовлетворять дополнительному условию

$$\iint_S f_2 dS = 0.$$

Подобным образом это же условие может быть сформулировано для двумерного случая, когда границей является замкнутый контур L . В этом случае требование суммарного нулевого теплового потока для внутренней задачи будет иметь вид

$$\oint_L f_2 dl = 0.$$

В случае одномерной задачи, когда функция $u(x)$ зависит только от одной переменной, уравнение Лапласа превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, решить которое не составляет особого труда.

Пример: В декартовой СК одномерное уравнение Лапласа имеет вид $d^2u/dx^2 = 0$ и его решение $u = ax + b$. Решением задачи Дирихле с граничными условиями $u(x=0) = u_1$, $u(x=l) = u_2$ будет $u(x) = (u_2 - u_1)x/l + u_1$.

Упражнение 1. В декартовой СК получить решение одномерной задачи Неймана для уравнения Лапласа.

Упражнение 2. В декартовой СК получить решение одномерной смешанной задачи для уравнения Лапласа.

В качестве другого примера вернемся к условию, которое возникает на границе раздела двух сред. Для простоты ограничимся плоской поверхностью на $x = 0$, предполагая, что первая (внутренняя) среда расположена в области $x < 0$, а вторая (внешняя) – в $x > 0$. Фактически, необходимо решить в обеих средах уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 u = 0, \tag{1.5.2}$$

с условиями непрерывности температуры и теплового потока на поверхности раздела:

$$x = 0 : \quad T_1 = T_2, \quad \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}. \quad (1.5.3)$$

Здесь $\kappa_{1,2}$ – коэффициенты теплопроводности сред.

Если $\kappa_1 \ll \kappa_2$, то температура внешней среды будет примерно постоянной, т.к. T_{2x} очень мал по сравнению с T_{1x} . Это означает, что второе условие (1.5.3) дает только слабое изменение (порядка κ_1/κ_2) к распределению температуры на поверхности раздела и задание температуры T_2 на поверхности раздела может рассматриваться в качестве граничного условия для температуры T_1 . Таким образом, получаем задачу Дирихле для неизвестной функции T_1 .

В противоположном случае $\kappa_1 \gg \kappa_2$, мы можем учесть во втором условии (1.5.3), например, фиксированный тепловой поток через поверхность раздела для T_1 – задача Неймана. Конечно, температура непрерывна при переходе через поверхность раздела, т.е. это условие зависит от температуры внешней «окружающей» среды. Таким образом, получается дополнительная поправка порядка κ_2/κ_1 функции температуры T_1 .

В промежуточной ситуации $\kappa_1 \approx \kappa_2$, распределение температуры в окружающей среде также должно быть получено вместе с решением краевой задачи для T_1 . Но мы можем упростить решение, предполагая для $T_2(x)$ простое линейное соотношение между $T_2(0)$ и $T_2'(0)$:

$$T_2'(0) = -\alpha T_2(0), \quad (1.5.4)$$

т.е. тепловой поток во вторую среду пропорционален локальному значению температуры на поверхности раздела. Учитывая соотношение (1.5.4), можно исключить $T_2(0)$ и $T_2'(0)$ из граничных условий (1.5.3), чтобы получить закон Ньютона (или условие Био)

$$T_1'(x) + hT_1(x) = f(x), \quad h = \alpha \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \quad (1.5.5)$$

т.е. получается смешанная задача для функции T_1 . Уравнение (1.5.5) может быть легко получено в одномерном случае (см. упражнения ниже). Простое обобщение (1.5.5) для трехмерного случая приводит к закону Ньютона для теплообмена:

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} + hT_1 = f. \quad (1.5.6)$$

В самом деле, такое условие позволяет учитывать тепловые свойства окружающей среды, не решая задачи теплопроводности для нее. Особенно это удобно в случае, когда внешняя среда – газ, а внутренняя – жидкость или твердое тело. Однако есть случаи, когда прямое применение закона Ньютона приводит к неправильным решениям, и распространение тепла в газе тоже должно быть учтено. Следует также заметить, что коэффициент h (коэффициент теплопередачи) характеризует не только свойства сред, но и геометрию окружающей среды.

Упражнение 3. В одномерном случае для бесконечного слоя окружающего газа, решение уравнения Лапласа для T_2 очевидно:

$$T_2 = C_1 + C_2x. \quad (1.5.7)$$

Выразите константы h и f в условии (1.5.5) через $C_{1,2}$ и $\kappa_{1,2}$, используя граничные условия (1.5.3).

Упражнение 4. Рассмотрите подобную задачу для двухмерного случая, предполагая, что функции $T_1(x, y)$ и $T_2(x, y)$ периодические вдоль y :

$$T_{1,2}(x, y) \sim e^{iky}. \quad (1.5.8)$$

Найти распределение температуры в области $x > 0$ и затем выразить коэффициенты h и f в условии (1.5.5) через $\kappa_{1,2}$ и k , используя граничные условия (1.5.3).

Упражнение 5. Слой жидкости на твердой подложке ($x = 0$), нагретой до температуры T_0 , имеет свободную поверхность при $x = a$ и

окружен газом. Найти температуру внутри слоя, используя условие Био (1.5.5) с $f = 0$.

Упражнение 6. Решить задачу Дирихле для случая осевой симметрии с граничными условиями $u(r = a) = u_1$, $u(r = b) = u_2$. Результат будет описывать стационарное распределение тепла между двумя соосными цилиндрами, боковые поверхности которых поддерживаются при постоянной температуре. Так же оно описывает потенциал между двумя эквипотенциальными цилиндрическими поверхностями. (Решение является гармонической функцией между поверхностями; ось $r = 0$ исключена.)

Указание. Использовать уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат без учета зависимости от φ и z .

Упражнение 7. Решить задачу Дирихле для случая сферической симметрии с граничными условиями $u(r = a) = u_1$, $u(r = b) = u_2$. Результат будет описывать стационарное распределение тепла между двумя сферами, имеющими общий центр, поверхности которых поддерживаются при постоянной температуре. Так же оно описывает потенциал между двумя эквипотенциальными сферическими поверхностями. Как и в предыдущем случае, решение является гармонической функцией между поверхностями; центр $r = 0$ исключен.

Указание. Использовать оператор Лапласа в сферической системе координат, не учитывая зависимость от угловых переменных φ и ϑ .

1.6. Принцип максимума. Корректность краевой задачи

Сначала сформулируем *принцип максимума* или *принцип максимального значения*:

Теорема: *Если функция u является гармонической внутри некоторой области, окруженной поверхностью S , то она достигает максимального (минимального) значения на границе.*

Этот принцип соответствует аналогичному принципу максимума для решения параболических уравнений [7]. Действительно, выбирая

решение краевой задачи для уравнения Лапласа в качестве начального условия для соответствующего параболического уравнения, приходим к выводу, что полученное решение не зависит от времени. Таким образом, максимальное значение может быть достигнуто только на границах, как указано выше.

Мы не будем строго доказывать теорему, а приведем основную идею доказательства. Предположим, что некоторая функция u достигает своего максимального значения в некоторой точке M , лежащей внутри области. В этом случае необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия в M :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (1.6.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \leq 0. \quad (1.6.2)$$

Из условия (1.6.2) получаем, что $\Delta u \leq 0$ и равенство нулю возможно только тогда, когда все три производных второго порядка равны нулю в M . Можно показать, что такое равенство не может быть достигнуто в точке M , которая лежит внутри области, таким образом, максимальное значение возможно только на границе (строгое доказательство, см., например, в [7]). Для минимального значения используются аналогичные рассуждения.

Важным следствием этой теоремы является следующее:

Решение уравнения Лапласа равно нулю в любом случае, если граничные условия равны нулю (для задачи Неймана при любом значении константы).

Доказательство этого следствия очевидно: гармоническая функция u достигает своего максимального значения на границе области, т.е., если максимальное значение функции на границе $\max(u) = 0$, то значения функции внутри области не превышают этого значения. Более того, минимальное значение функции также достигается на границе области. Следовательно, если на границе минимальное значение $\min(u) = 0$, то значения функции внутри области не будут ниже это-

го значения. Следовательно, если на границе гармоническая функция $u = 0$, то и во всей области $u = 0$.

Это следствие будет активно использоваться при обсуждении корректных граничных условий для уравнения Лапласа.

Корректность задачи означает, что ее решение существует, единственно, нетривиально и непрерывно зависит от параметров задачи. Последний критерий означает, что задача является *физически определенной*, т.е., если малому изменению условий, определяющих решение задачи (в данном случае граничных условий) соответствует малое изменение самого решения. В этом случае решение называют *устойчивым*.

Рассмотрим более подробно внутреннюю задачу Дирихле: функция u задана на некоторой поверхности S , окружающей область V . Необходимо найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ внутри V . В предположении, что функция $u(x, y, z)$ является непрерывной в замкнутой области $V + S$, можно доказать единственность решения:

Теорема: *Первая внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа не может иметь двух различных решений.*

Допустим, что существуют две различные функции u_1 и u_2 , удовлетворяющие уравнению Лапласа в объеме V , непрерывные в замкнутой области $V + S$ и принимающие одно и то же значение на поверхности S . Разность этих функций $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению Лапласа внутри области V , непрерывна в замкнутой области $V + S$ и равна нулю на поверхности S . Таким образом, функция u непрерывна и гармонична в области V и равна нулю на границе. Следовательно, как было показано выше, $u = 0$, т.е. $u_1 = u_2$.

Часто встречается также задача Дирихле с разрывными граничными условиями. В этом случае важной является следующая теорема:

Теорема: *Решение первой краевой задачи с кусочно-непрерывными граничными значениями единственно.*

Для решения внешней задачи дополнительное условие, вытекающее из физических соображений, ставится на бесконечности: решение на бесконечности должно быть конечным (регулярным).

Теорема: *Внешняя первая краевая задача имеет единственное решение, которое конечно на бесконечности.*

Можно привести простые аргументы, основанные на наглядных физических примерах, показывающие, что в трехмерном случае решение в точке P стремится к нулю, т.е. $u(P) \rightarrow 0$ при $P \rightarrow \infty$, и в двумерном случае $u(\infty) \rightarrow \text{const}$. Например, $\varphi = r^{-1}$ – электростатический потенциал точечного заряда в пространстве. Другим примером является температурное поле с постоянным значением u_0 на поверхности сферы радиуса R . В этом случае функция $u(r) = u_0 R/r$ является решением внешней задачи для уравнения Лапласа. Для двумерных задач, когда на окружности L радиуса R поставлено граничное условие $u|_L = f_0$, единственное решение внешней задачи для уравнения Лапласа – $u \equiv f_0$, и нет решения, которое стремится к нулю на бесконечности.

Теоремы, аналогичные приведенным выше для первой краевой задачи, могут быть сформулированы и доказаны для второй и третьей краевых задач для эллиптических уравнений. Отметим, что решение краевой задачи для эллиптического уравнения, по крайней мере, всегда гладко настолько (в том смысле, что она имеет ряд непрерывных производных) насколько гладкими являются граничные условия. Обычно решение имеет бесконечное число производных в любой точке внутри области. Это свойство эллиптических уравнений соответствует статическому характеру тех физических процессов, которые эти уравнения моделируют.

Глава 2

Решение уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольной области

2.1. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике

Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике также могут быть решены методом разделения переменных. Рассмотрим подробно решение первой краевой задачи:

$$\Delta u = 0 \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (2.1.1)$$

$$u(x=0, y) = g_1(y), \quad u(x=a, y) = g_2(y), \quad (2.1.2)$$

$$u(x, y=0) = g_3(x), \quad u(x, y=b) = g_4(x). \quad (2.1.3)$$

Задачу (2.1.1)-(2.1.3) разобьем на две части, каждая из которых имеет однородные граничные условия по одной из переменных. Пусть

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y), \quad (2.1.4)$$

где $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ – решения следующих задач в прямоугольнике

$$\Delta u_1 = 0, \quad (2.1.5)$$

$$u_1(x=0, y) = u_1(x=a, y) = 0, \quad (2.1.6)$$

$$u_1(x, y=0) = g_3(x), \quad u_1(x, y=b) = g_4(x). \quad (2.1.7)$$

$$\Delta u_2 = 0, \quad (2.1.8)$$

$$u_2(x, y=0) = u_2(x, y=b) = 0, \quad (2.1.9)$$

$$u_2(x=0, y) = g_1(y), \quad u_2(x=a, y) = g_2(y). \quad (2.1.10)$$

Каждую из этих задач будем называть стандартной. Рассмотрим стандартную задачу для функции $u_1(x, y)$. Построим сначала решения уравнения Лапласа, представимые в виде

$$u_1(x, y) = X(x)Y(y), \quad (2.1.11)$$

не равные нулю тождественно и удовлетворяющие однородным граничным условиям по x (2.1.6).

Подставляя (2.1.11) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} \equiv -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda. \quad (2.1.12)$$

Отсюда получаем отдельные уравнения для $X(x)$ и $Y(y)$. Поскольку по переменной x должны выполняться однородные граничные условия (2.1.6), для определения функции $X(x)$ имеем одномерную задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \quad 0 < x < l_x \\ X(0) &= X(a) = 0, \end{aligned}$$

$X(x)$ не равно нулю тождественно,

решение которой имеет вид

$$X_n = \sin k_n x, \quad \lambda_n = k_n^2, \quad k_n = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1.13)$$

Учитывая найденное значение λ_n , получаем из (2.1.12) уравнение для $Y(y)$:

$$Y'' - k_n^2 Y = 0, \quad 0 < y < b. \quad (2.1.14)$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$Y_n = \tilde{C}_n^{(1)} \exp(k_n y) + \tilde{C}_n^{(2)} \exp(-k_n y). \quad (2.1.15)$$

Но такая запись неудобна для дальнейшего анализа. Выберем в качестве фундаментальной системы решений данного уравнения функции

$$Y_n^{(1)} = \frac{\operatorname{sh} k_n y}{\operatorname{sh} k_n b}, \quad Y_n^{(2)} = \frac{\operatorname{sh} k_n (b - y)}{\operatorname{sh} k_n b}.$$

Очевидно, что эти функции удовлетворяют уравнению (2.1.14) и следующим граничным условиям:

$$Y_n^{(1)}(0) = Y_n^{(2)}(b) = 0, \quad Y_n^{(1)}(a) = Y_n^{(2)}(0) = 1. \quad (2.1.16)$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.1.14) можно переписать в виде

$$Y_n = A_n Y_n^{(1)} + B_n Y_n^{(2)}. \quad (2.1.17)$$

Упражнение. Сведите решение (2.1.15) к решению (2.1.17), выразив постоянные $\tilde{C}_n^{(1,2)}$ через A_n и B_n .

Указание. Воспользуйтесь формулой суммы гиперболических косинусов

$$\operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta, \quad (2.1.18)$$

доказательство которой предлагается в качестве упражнения.

Общее решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее нулевым условиям на границах $x = 0, a$ (2.1.6), запишем в виде ряда по указанным решениям:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n Y_n^{(1)}(y) + B_n Y_n^{(2)}(y) \right] \sin k_n x. \quad (2.1.19)$$

Коэффициенты данного ряда определяются из граничных условий (2.1.7). Воспользовавшись условиями (2.1.16), будем иметь

$$u_1(x, y = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x = g_3(x), \quad (2.1.20)$$

$$u_1(x, y = b) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x = g_4(x).$$

Раскладывая функции $g_{3,4}(x)$ в ряды Фурье по $\sin k_n x$, получим

$$g_{3,4}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^{(3,4)} \sin k_n x, \quad (2.1.21)$$

где

$$G_n^{(3,4)} = \frac{2}{a} \int_0^a g_{3,4}(\xi) \sin k_n \xi d\xi. \quad (2.1.22)$$

Подставляя разложение (2.1.21) в условия (2.1.20) и приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, получаем

$$A_n = G_n^{(4)}, \quad B_n = G_n^{(3)}, \quad (2.1.23)$$

что завершает решение стандартной задачи (2.1.5)-(2.1.7).

Очевидно, что решение второй стандартной задачи (2.1.8)-(2.1.10) может быть получено из (2.1.19), (2.1.22), (2.1.23) заменами $x \leftrightarrow y$, $a \leftrightarrow b$, т.е. дается формулой

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n X_n^{(1)}(x) + D_n X_n^{(2)}(x)] \sin q_n y, \quad (2.1.24)$$

где

$$X_n^{(1)}(x) = \frac{\operatorname{sh} q_n x}{\operatorname{sh} q_n a}, \quad X_n^{(2)}(x) = \frac{\operatorname{sh} q_n (a-x)}{\operatorname{sh} q_n a}, \quad q_n = \frac{\pi n}{b}, \quad (2.1.25)$$

$$C_n = \frac{2}{b} \int_0^b g_2(\xi) \sin q_n \xi d\xi, \quad D_n = \frac{2}{b} \int_0^b g_1(\xi) \sin q_n \xi d\xi. \quad (2.1.26)$$

Пример 2.1. Найти стационарное распределение температуры внутри прямоугольника, границы которого поддерживаются при следующих условиях:

$$T(x=0, y) = T_0 + (T_3 - T_0) \frac{y}{b}, \quad T(x=a, y) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{y}{b}, \quad (2.1.27)$$

$$T(x, y=0) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{x}{a}, \quad T(x, y=b) = T_3 + (T_2 - T_3) \frac{x}{a}, \quad (2.1.28)$$

т.е. в углах прямоугольника поддерживаются температуры T_0, T_1, T_2, T_3 , а на границах – линейные функции.

Решение. Введем вспомогательную функцию $u = T - T_0$, сдвигая начало отсчета температуры. Вычисляя интегралы в (2.1.22) и (2.1.26), получим

$$A_n = \frac{2}{\pi n} (T_3 - T_0 - (-1)^n T_2), \quad B_n = -2 \frac{(-1)^n}{\pi n} (T_1 - T_0). \quad (2.1.29)$$

$$C_n = \frac{2}{\pi n} (T_1 - T_0 - (-1)^n T_2), \quad D_n = -2 \frac{(-1)^n}{\pi n} (T_3 - T_0). \quad (2.1.30)$$

С другой стороны, данная задача допускает решение в виде комбинации гармонических функций x, y, xy . Действительно, разыскивая решение в виде

$$T = T_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy \quad (2.1.31)$$

и удовлетворяя первым граничным условиям в (2.1.27), (2.1.28), получаем

$$c_1 = \frac{T_1 - T_0}{a}, \quad c_2 = \frac{T_3 - T_0}{b}. \quad (2.1.32)$$

Тогда из второго из условий (2.1.27)

$$T(x = a, y) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{y}{b} = c_1 a + c_2 y + c_3 a y = T_1 + \left(\frac{T_3 - T_0}{b} + c_3 a \right) y,$$

т.е.

$$c_3 = \frac{T_0 + T_2 - T_1 - T_3}{ab}. \quad (2.1.33)$$

Проверим, выполнено ли второе из условий (2.1.28):

$$T(x, y = b) = c_1 x + c_2 b + c_3 b x = \frac{T_1 - T_0}{a} x + T_3 + \frac{T_0 + T_2 - T_1 - T_3}{a} x, \quad (2.1.34)$$

что совпадает со значением $T_3 + (T_2 - T_3)x/a$, следующим из (2.1.28).

Таким образом, аналитическое решение задачи имеет вид

$$T = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{a} x + \frac{T_3 - T_0}{b} y + \frac{T_0 + T_2 - T_1 - T_3}{ab} xy. \quad (2.1.35)$$

Построим изолинии температуры, проводя численное суммирование рядов (2.1.19) и (2.1.24) с коэффициентами (2.1.29), (2.1.30), положив для простоты $b = 2a$, $T_0 = T_2$, $T_1 = T_3$. Переходя к безразмерным переменным (в качестве единицы длины выбрана a , в качестве единицы температуры $T_1 - T_0$) и сдвигая начало отсчета температуры на T_0 , получаем

$$a = 1, \quad b = 2, \quad T_0 = T_2 = 0, \quad T_1 = T_3 = 1. \quad (2.1.36)$$

Отметим, что при представлении решения в виде (2.1.4) граничные условия для вспомогательных функций $u_{1,2}$ при $x = a$, $y = 0$ не согласованы. Действительно?

$$u_1(x = 0, y \rightarrow b) = 0, \quad u_1(x \rightarrow 0, y = b) = g_4(0) = T_3 = 1. \quad (2.1.37)$$

$$u_2(x = 0, y \rightarrow b) = g_1(b) = T_3 = 1, \quad u_2(x \rightarrow 0, y = b) = 0. \quad (2.1.38)$$

Аналогично не согласованы условия для $u_{1,2}$ при $x = 0, y = b$ (условия при $x = a, y = b$ оказались согласованными в силу предположения о том, что $T_2 = T_0$). Это свойство заметно ухудшает сходимость рядов. На рис. 2.1 представлены суммы с числом членов ряда N , равным 20 (а), 50 (б), 100 (с). Как видно, при удержании двадцати членов результат нельзя считать удовлетворительным – нефизические осцилляции сильно искажают поле температуры. Увеличение числа членов ряда заметно улучшает сходимость результатов. Однако вблизи точек, в которых граничные условия не согласованы, сходимость рядов медленная.

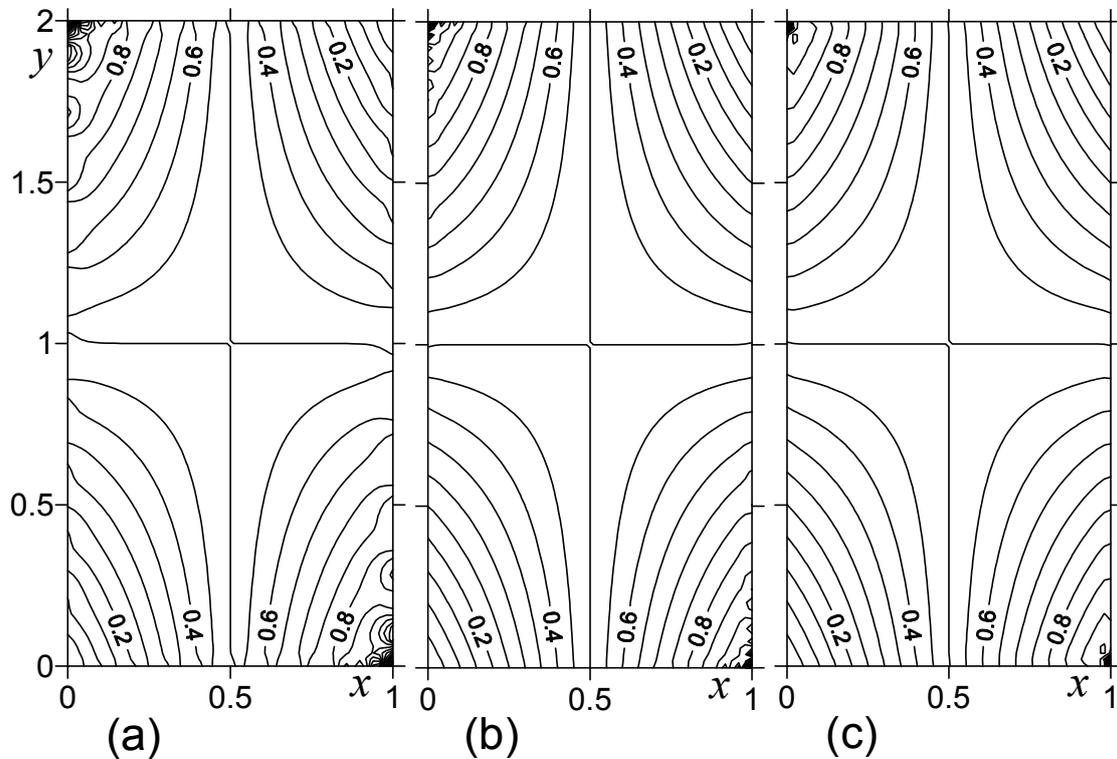


Рис. 2.1. Поля температуры для разного числа членов ряда: (а) – $N = 20$, (б) – $N = 50$, (с) – $N = 100$

2.2. Методика ускорения сходимости рядов в случае согласованных граничных условий

Заметим, что медленная сходимость рядов в рассмотренном примере связана не с постановкой задачи (граничные условия (2.1.27)-(2.1.28) в исходной краевой задаче согласованы), а с процедурой по-

иска решения. С другой стороны, в рассматриваемой задаче легко построить решение, воспользовавшись формулой (2.1.34). Это замечание позволяет сформулировать следующий рецепт, заметно ускоряющий сходимость рядов для задач с согласованными условиями.

Представим искомую функцию в виде суперпозиции двух гармонических функций

$$u = T + w, \quad (2.2.1)$$

где $T(x, y)$ – простейшая функция, удовлетворяющая следующим условиям в углах прямоугольника:

$$\begin{aligned} T(x=0, y=0) &= g_1(0) = g_3(0) \equiv T_0, \\ T(x=a, y=0) &= g_2(0) = g_3(a) \equiv T_1, \\ T(x=a, y=b) &= g_2(b) = g_4(a) \equiv T_2, \\ T(x=0, y=b) &= g_1(b) = g_4(0) \equiv T_3. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Очевидно, что эта функция может быть выбрана, например, в виде (2.1.35). Тогда, для функции $w(x, y)$ будем иметь следующую краевую задачу:

$$\nabla^2 w = 0, \quad (2.2.3)$$

$$w(x=0, y) = \tilde{g}_1(y), \quad w(x=a, y) = \tilde{g}_2(y), \quad (2.2.4)$$

$$w(x, y=0) = \tilde{g}_3(x), \quad w(x, y=b) = \tilde{g}_4(x), \quad (2.2.5)$$

где $\tilde{g}_1(y) = g_1(y) - T(x=0, y)$ и аналогичные очевидные замены проведены для остальных функций.

Полученная краевая задача (2.2.3)-(2.2.5) формально не отличается от исходной задачи (2.1.1)-(2.1.3), однако, в силу очевидного свойства

$$\tilde{g}_{1,2}(0) = \tilde{g}_{1,2}(b) = \tilde{g}_{3,4}(0) = \tilde{g}_{3,4}(a) = 0, \quad (2.2.6)$$

соответствующие ряды (2.1.19) и (2.1.24) для $w(x, y)$ сходятся значительно быстрее.

Для того чтобы продемонстрировать преимущества данного метода, рассмотрим

Пример 2.2. Найти поле температуры в прямоугольнике, на границах которого заданы следующие граничные условия:

$$u(x=0, y) = 0, \quad u(x=a, y) = \Theta \frac{y^2}{b^2}, \quad (2.2.7)$$

$$u(x, y=0) = 0, \quad u(x, y=b) = \Theta \frac{x^2}{a^2}. \quad (2.2.8)$$

Решение. Очевидно, что в данном случае граничные условия во всех углах согласованы. Однако при прямом разделении решения на две функции u_1 и u_2 согласно (2.1.4), получаются краевые задачи с несогласованными условиями.

Находя коэффициенты разложения в методе Фурье, согласно общему рецепту, получаем

$$A_n = C_n = -2\Theta \frac{(-1)^n}{\pi n} - \frac{4\Theta}{\pi^3 n^3} \left[1 - (-1)^n \right], \quad B_n = D_n = 0. \quad (2.2.9)$$

Как видно, первое слагаемое в (2.2.9) обратно пропорционально первой степени n , т.е. сходимость ряда медленная.

Для ускорения сходимости рядов представим решение в виде

$$u(x, y) = \Theta \frac{xy}{ab} + w(x, y), \quad (2.2.10)$$

где первое слагаемое является решением (2.1.35) с $T_0 = T_1 = T_3 = 0$, $T_2 = \Theta$ (сравни условия (2.2.2) и (2.2.7), (2.2.8)).

Для вспомогательной функции $w(x, y)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа, получаем следующие граничные условия:

$$w(x=0, y) = 0, \quad w(x=a, y) = \Theta \frac{y^2 - by}{b^2}, \quad (2.2.11)$$

$$w(x, y=0) = 0, \quad w(x, y=b) = \Theta \frac{x^2 - ax}{a^2}.$$

Раскладывая функции $\tilde{g}_{2,4}$ в ряды Фурье, получаем для коэффициентов разложения функции $w(x, y)$ в ряды, аналогичные (2.1.19) и (2.1.24), следующие выражения:

$$\tilde{A}_n = \tilde{C}_n = -\frac{4\Theta}{\pi^3 n^3} \left[1 - (-1)^n \right], \quad \tilde{B}_n = \tilde{D}_n = 0. \quad (2.2.12)$$

Сравнивая коэффициенты разложения в ряды Фурье (2.2.9) и (2.2.12), видим, что в формуле (2.2.10) из первого решения выделяется наименее медленно сходящаяся часть $\Theta xy/(ab)$.

Результаты численного суммирования полученных рядов для $b = 2a$ представлены на рис. 2.2. Решение строилось в безразмерном виде, в качестве единиц измерения длины и температуры выбраны a и Θ , соответственно. Как видно, прямое решение, заданное согласно формулам (2.1.19), (2.1.24) с коэффициентами (2.2.9), приводит к осцилляциям в окрестности угла $x = a, y = b$ даже при удержании 50 членов, в то время как решение в виде (2.2.10) выглядит гладко даже при удержании всего десяти ненулевых членов ($N = 20$).

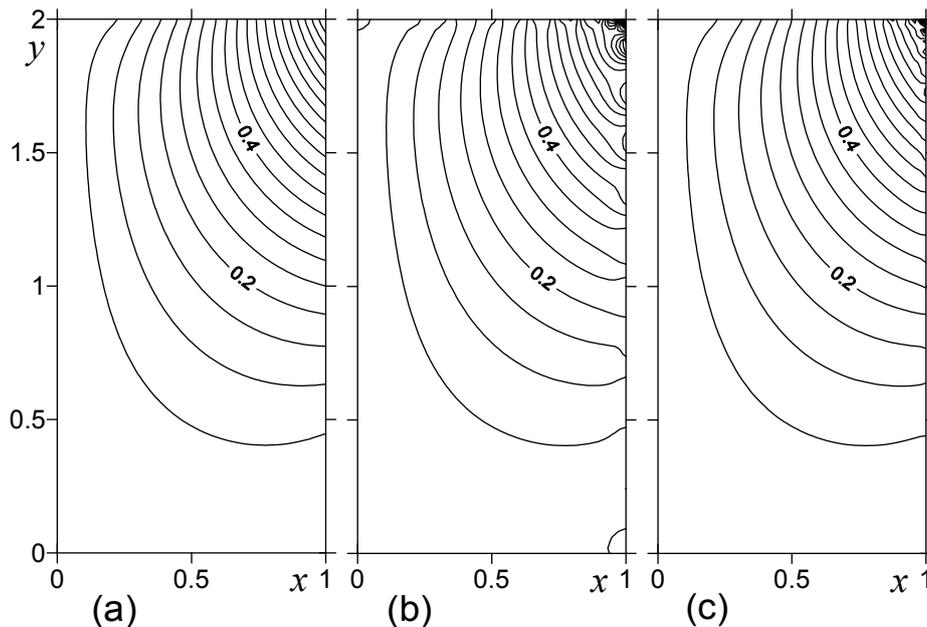


Рис. 2.2. Распределение температуры, заданное формулой (2.2.10) (a) для $N = 20$; прямое решение с коэффициентами (2.2.9) для $N = 20$ (b), $N = 50$ (c)

2.3. Другие типы краевых условий

Для остальных вариантов граничных условий уравнение Лапласа внутри прямоугольника решается тем же способом. Меняются лишь базисные функции, по которым ведется разложение.

При этом очевидно, что обсуждению подлежат лишь разные варианты одной из стандартных задач, скажем, первой. Рассмотрим такую задачу в наиболее общем виде:

$$\Delta u_1 = 0, \quad (2.3.1)$$

$$P_1[u_1] \equiv \left(\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \beta_1 u_1 \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad P_2[u_1] \equiv \left(\alpha_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \beta_2 u_1 \right) \Big|_{x=a} = 0, \quad (2.3.2)$$

$$P_3[u_1] \equiv \left(\alpha_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \beta_3 u_1 \right) \Big|_{y=0} = g_3(x), \quad (2.3.3)$$

$$P_4[u_1] \equiv \left(\alpha_4 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \beta_4 u_1 \right) \Big|_{y=b} = g_4(x).$$

Разделяя переменные, представим решение краевой задачи (2.3.1)-(2.3.3) в виде суперпозиции функций:

$$u_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y). \quad (2.3.4)$$

Здесь $X_n(x)$ – решение задачи Штурма-Лиувилля:

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0, \quad (2.3.5)$$

$$P_1[X_n] = P_2[X_n] = 0, \quad (2.3.6)$$

$X_n(x)$ не равно нулю тождественно,

а $Y_n(y)$ удобно представить в виде суммы (с пока неизвестными коэффициентами) двух частных решений ($Y_n^{(1)}$ и $Y_n^{(2)}$) уравнения

$$Y_n'' - \lambda_n Y_n = 0, \quad (2.3.7)$$

удовлетворяющих следующим граничным условиям:

$$P_3[Y_n^{(1)}] = 0, \quad P_4[Y_n^{(1)}] \equiv 1, \quad (2.3.8)$$

$$P_3[Y_n^{(2)}] = 1, \quad P_4[Y_n^{(2)}] \equiv 0. \quad (2.3.9)$$

Вид функций $X_n(x)$ и $Y_n^{(1,2)}(y)$ зависит от граничных условий и обсуждается ниже.

Следуя общей идее метода разделения переменных, запишем решение задачи (2.3.1)-(2.3.3) в виде

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n Y_n^{(1)}(y) + B_n Y_n^{(2)}(y) \right) X_n(x)^3. \quad (2.3.10)$$

Удовлетворяя граничным условиям при $y = 0$, получим ввиду (2.3.8), (2.3.9):

$$P_3[u_1] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n P_3[Y_n^{(1)}] + B_n P_3[Y_n^{(2)}] \right) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x) = g_3(x). \quad (2.3.11)$$

Аналогично при $y = b$ будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = g_4(x). \quad (2.3.12)$$

Таким образом, A_n и B_n являются коэффициентами разложения функций $g_4(x)$ и $g_3(x)$, соответственно, по базису $\{X_n(x)\}$. Коэффициенты этих разложений имеют вид

$$A_n = \frac{1}{\|X_n^2\|_0} \int_0^a g_4(x) X_n(x) dx, \quad B_n = \frac{1}{\|X_n^2\|_0} \int_0^a g_3(x) X_n(x) dx, \quad (2.3.13)$$

где $\|X_n\|^2 = \int_0^a X_n^2(x) dx$ – квадрат нормы для данного разложения.

Перейдем теперь к обсуждению конкретных вариантов краевых условий.

2.4. Одномерная задача Штурма-Лиувилля

Приведем для удобства читателей решения задачи Штурма-Лиувилля (2.3.5), (2.3.6) для разных вариантов граничных условий (см. табл. 1). Получение данных выражений предлагается читателю в качестве упражнения. Как и в п. 2.1, полагаем $\lambda_n = k_n^2$.

³ Для некоторых вариантов краевых условий удобнее нумеровать решения, начиная с $n = 0$. В этих случаях во всех нижеследующих формулах этого раздела необходимо заменить нижний предел суммирования на нуль.

Собственные значения и собственные функции
задачи Штурма-Лиувилля (2.3.5), (2.3.6)

α_1	β_1	α_2	β_2	Собственное значение $\lambda_n = k_n^2$	Собственная функция X_n	Нормировка $\ X_n\ ^2$
1. Условия Дирихле на обеих границах						
0	1	0	1	$k_n = \frac{\pi n}{a},$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$X_n = \sin k_n x$	$\frac{a}{2}$
2. Условия Неймана на обеих границах						
1	0	1	0	$k_n = \frac{\pi n}{a},$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$	$X_n = \cos k_n x$	$\begin{cases} \frac{a}{2}, n > 0 \\ a, n = 0 \end{cases}$
3. Условие Дирихле при $x = 0$, условие Неймана при $x = a$						
0	1	1	0	$k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2a},$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$	$X_n = \sin k_n x$	$\frac{a}{2}$
4. Условие Неймана при $x = 0$, условие Дирихле при $x = a$ ⁴						
1	0	0	1	$k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2a},$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$	$X_n = \cos k_n x$	$\frac{a}{2}$
5. Условия Дирихле при $x = 0$, смешанное условие при $x = a$						
0	1	1	h	$\operatorname{tg} k_n a = -\frac{k_n}{h}.$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$X_n = \sin k_n x$	$\frac{1}{2} \left(a + \frac{h}{k_n^2 + h^2} \right)$

⁴ Очевидно, что задачи Штурма-Лиувилля 3 и 4 сводятся друг к другу заменой $x \rightarrow x_1 = a - x$.

Ввиду этого далее приводится только один пример из каждой такой пары.

α_1	β_1	α_2	β_2	Собственное значение $\lambda_n = k_n^2$	Собственная функция X_n	Нормировка $\ X_n\ ^2$
6. Условия Неймана при $x = 0$, смешанное условие при $x = a$						
1	0	1	h	$\operatorname{tg} k_n a = -\frac{k_n}{h},$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$X_n = \cos k_n x$	$\frac{1}{2} \left(a + \frac{h}{k_n^2 + h^2} \right)$
7. Смешанные условия на обеих границах						
1	h_1	0	h_2	$\operatorname{tg} k_n a = \frac{h k_n}{k_n^2 - h_1 h_2},$ $n = 1, 2, 3, \dots,$ $h \equiv h_2 + h_1$	$X_n = k_n \cos k_n x$ $+ h_1 \sin k_n x$	$\frac{a}{2} (k_n^2 + h_1^2) +$ $\frac{h (\lambda_n + h_1 h_2)}{2 (k_n^2 + h_2^2)}$

2.5. Решения неоднородной задачи

Рассмотрим теперь решения задачи (2.3.7)-(2.3.9) для разных вариантов граничных условий (считаем $\lambda_n = k_n^2$). Вновь приведем решения без вывода, оставляя доказательство в качестве упражнения.

Таблица 2

Решения неоднородных краевых задач (2.3.7)-(2.3.9)

α_3	β_3	α_4	β_4	$Y_n^{(1)}$	$Y_n^{(2)}$
1. Условия Дирихле на обеих границах					
0	1	0	1	$\frac{\operatorname{sh} k_n y}{\operatorname{sh} k_n b}$	$\frac{\operatorname{sh} k_n (b - y)}{\operatorname{sh} k_n b}$
2. Условия Неймана на обеих границах					
1	0	1	0	$\frac{\operatorname{ch} k_n y}{\operatorname{ch} k_n b}$	$-\frac{\operatorname{ch} k_n (b - y)}{\operatorname{ch} k_n b}$
3. Условие Дирихле при $y = 0$, условие Неймана при $y = b$					
0	1	1	0	$\frac{\operatorname{sh} k_n y}{k_n \operatorname{ch} k_n b}$	$\frac{\operatorname{ch} k_n (b - y)}{\operatorname{ch} k_n b}$

α_3	β_3	α_4	β_4	$Y_n^{(1)}$	$Y_n^{(2)}$
4. Условие Неймана при $y = 0$, условие Дирихле при $y = b$					
1	0	0	1	$\frac{\operatorname{ch} k_n y}{\operatorname{ch} k_n b}$	$-\frac{\operatorname{sh} k_n (b - y)}{k_n \operatorname{ch} k_n b}$
5. Условие Дирихле при $y = 0$, смешанное условие при $y = b$					
0	1	1	h	$\frac{\operatorname{sh} k_n y}{h \operatorname{sh} k_n b + k_n \operatorname{ch} k_n b}$	$\frac{h \operatorname{sh} k_n (b - y) + k_n \operatorname{ch} k_n (b - y)}{h \operatorname{sh} k_n b + k_n \operatorname{ch} k_n b}$
6. Смешанное условие при $y = 0$, условие Дирихле при $y = b$					
1	h	0	1	$\frac{h \operatorname{sh} k_n y + k_n \operatorname{ch} k_n y}{h \operatorname{sh} k_n b + k_n \operatorname{ch} k_n b}$	$-\frac{\operatorname{sh} k_n (b - y)}{h \operatorname{sh} k_n b + k_n \operatorname{ch} k_n b}$
7. Условие Неймана при $y = 0$, смешанное условие при $y = b$					
1	0	1	h	$\frac{\operatorname{ch} k_n y}{h \operatorname{ch} k_n b + k_n \operatorname{sh} k_n b}$	$-\frac{h \operatorname{sh} k_n (b - y) + k_n \operatorname{ch} k_n (b - y)}{k_n (h \operatorname{ch} k_n b + k_n \operatorname{sh} k_n b)}$
8. Смешанное условие при $y = 0$, условие Неймана при $y = b$					
1	h	1	0	$\frac{h \operatorname{sh} k_n y + k_n \operatorname{ch} k_n y}{k_n (h \operatorname{ch} k_n b + k_n \operatorname{sh} k_n b)}$	$-\frac{\operatorname{ch} k_n (b - y)}{h \operatorname{ch} k_n b + k_n \operatorname{sh} k_n b}$
9. Смешанные условия на обеих границах					
1	h_1	0	h_2	$\frac{h_1 \operatorname{sh} k_n y - k_n \operatorname{ch} k_n y}{H \operatorname{sh} k_n b + k_n h \operatorname{ch} k_n b}$, $H = h_1 h_2 - k_n^2, h = h_1 - h_2$	$\frac{h_2 \operatorname{sh} k_n (b - y) + k_n \operatorname{ch} k_n (b - y)}{H \operatorname{sh} k_n b + k_n h \operatorname{ch} k_n b}$

Разумеется, четвертая, шестая и восьмая строки табл. 2 могут быть получены из предшествующих им строк заменой y на $b - y$, $Y_n^{(1)}$ на $Y_n^{(2)}$ и наоборот. При этом важно указанным в табл. 2 образом сменить знаки у частных решений (при указанной смене границ меняются знаки для условий Неймана и смешанных условий).

Не останавливаясь на подробном обсуждении метода, позволяющего ускорить сходимость рядов для задач с согласованными граничными условиями, обсудим его на примере (см. п. 0). В каждом конкретном случае подходящая вспомогательная функция $T(x, y)$ может быть легко найдена.

2.6. Задача о распределении температуры внутри прямоугольной области

Найдем решение уравнения Лапласа в прямоугольнике при следующих граничных условиях:

$$u(x=0, y) = 0, u(x=a, y) = \Theta \frac{y}{b}, \quad (2.6.1)$$

$$u(x, y=0) = 0, u_y(x, y=b) = q(x) = q_0(e^{\alpha x} - 1). \quad (2.6.2)$$

Эта задача о распределении температуры, на одной из границ которого задан тепловой поток $-kq(x)$ (k – коэффициент теплопроводности), а на соседней границе поддерживается линейное распределение температуры. Граничные условия при $x=a, y=b$ согласованы, если выполнено следующее условие:

$$\frac{\Theta}{b} = q(x=a) = q_0(e^{\alpha a} - 1). \quad (2.6.3)$$

Далее предполагаем, что это условие имеет место.

Пользуясь формулами, приведенными в табл. 1 и табл. 2., будем искать решение данной задачи в виде

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\text{sh } k_n y}{k_n \text{ ch } k_n b} \sin k_n x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\text{sh } q_n x}{\text{sh } q_n a} \sin q_n y, \quad (2.6.4)$$

где $k_n = \pi n/a$, $q_n = \pi(2n+1)/(2b)$.

Коэффициенты разложения (2.6.4) определяются следующим образом:

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin k_n x dx = \frac{2q_0}{a} \left[\frac{k_n}{k_n^2 + \alpha^2} \left(1 - (-1)^n e^{\alpha a} \right) - \frac{1 - (-1)^n}{k_n} \right], \quad (2.6.5)$$

$$B_n = \frac{2\Theta}{b^2} \int_0^b y \sin q_n y dy = 2\Theta \frac{(-1)^n}{q_n^2 b^2}. \quad (2.6.6)$$

Построим безразмерное поле температуры, выбрав в качестве единиц длины и температуры a и Θ соответственно. Для иллюстрации далее рассмотрим случай $b = 2a$, $\alpha = a^{-1}$.

Ряды (2.6.4)-(2.6.6) сходятся достаточно быстро – на рис. 2.3(a) приведено поле температуры, полученное при удержании всего двадцати слагаемых в ряду, визуально это поле не отличается от более точного решения.

Однако при вычислении теплового потока, с точностью до множителя, совпадающего с u_y , найденный ряд сходится значительно хуже. На рис. 2.3(b) и рис. 2.3(c) показаны поля u_y , найденные при удержании в рядах (2.6.4)-(2.6.6) двадцати и пятидесяти членов (на рисунках показана только окрестность точки $x = a$, $y = b$, в которой сходимость ряда медленная).

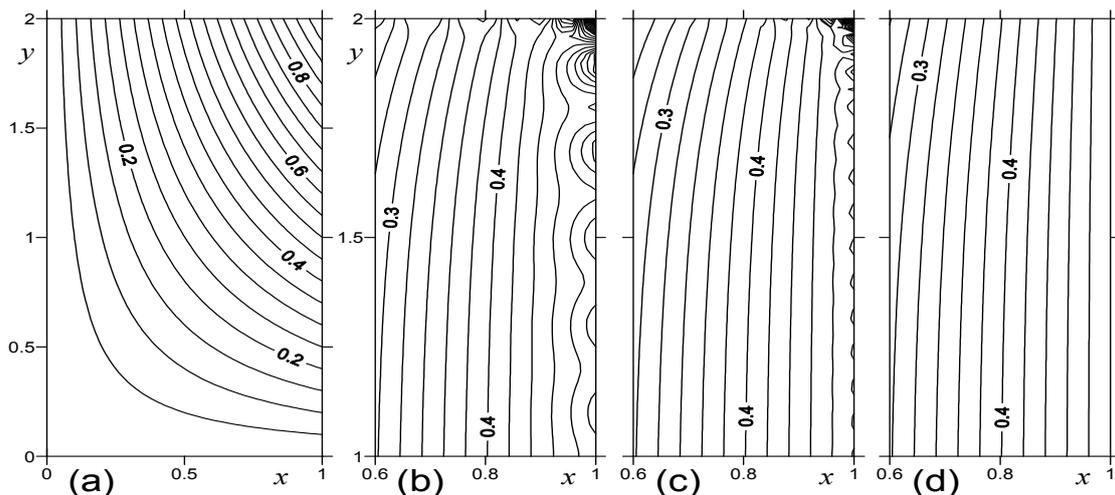


Рис. 2.3. Распределение температуры $u(x, y)$ (a), поле $u_y(x, y)$ в окрестности угла, полученное по формулам (2.6.4)-(2.6.6) для $N = 20$ (b) и $N = 50$ (c). Поле $u_y(x, y)$, полученное из (2.6.15) для $N = 20$

С другой стороны, полученных осцилляций для u_y можно легко избежать, перейдя к поиску новой функции

$$u(x, y) = w(x, y) + T(x, y), \quad (2.6.7)$$

где гармоническая функция $T(x, y)$ определяется из условий

$$\begin{aligned} T(x=0, y=0) &= T(x=0, y=b) = T(x=a, y=0) = 0, \\ T(x=a, y=b) &= -\Theta, \quad T_y(x=a, y=b) = -q(x=a) = -\frac{\Theta}{b}. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Такую функцию подобрать достаточно просто:

$$T = -\Theta \frac{xy}{ab}, \quad (2.6.9)$$

что дает следующую краевую задачу для $w(x, y)$:

$$\nabla^2 w = 0 \quad (2.6.10)$$

$$w(x=0, y) = 0, \quad w(x=a, y) = 0, \quad (2.6.11)$$

$$w(x, y=0) = 0, \quad w_y(x, y=b) = \tilde{q}(x) = q(x) - \frac{\Theta x}{ab}. \quad (2.6.12)$$

Решение данной краевой задачи очевидно:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \frac{\operatorname{sh} k_n y}{k_n \operatorname{ch} k_n b} \sin k_n x, \quad (2.6.13)$$

где оставлено прежнее обозначение для k_n , а коэффициенты разложения имеют вид

$$\tilde{A}_n = \frac{2}{a} \int_0^a \tilde{q}(x) \sin k_n x dx = -\frac{2q_0 \alpha^2}{ak_n (k_n^2 + \alpha^2)}. \quad (2.6.14)$$

Полное же решение уравнения Лапласа с краевыми условиями (2.6.1), (2.6.2) задается формулой

$$u = \Theta \frac{xy}{ab} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \frac{\operatorname{sh} k_n y}{k_n \operatorname{ch} k_n b} \sin k_n x. \quad (2.6.15)$$

Для полученного решения сходимость ряда для u_y заметно улучшается – на рис. 2.3(d) показано решение, полученное при удержании в ряду всего двадцати членов.

2.7. Уравнение Пуассона в прямоугольной области

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Пуассона внутри прямоугольной области:

$$\Delta u = -f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (2.7.1)$$

$$u(x = 0, y) = g_1(y), \quad u(x = a, y) = g_2(y), \quad (2.7.2)$$

$$u(x, y = 0) = g_3(x), \quad u(x, y = b) = g_4(x). \quad (2.7.3)$$

Решение данной задачи представим в виде суммы решения уравнения Пуассона $u_p(x, y)$, удовлетворяющего краевой задаче

$$\Delta u_p = -f(x, y), \quad (2.7.4)$$

$$u_p(x = 0, y) = u_p(x = a, y) = 0, \quad (2.7.5)$$

$$u_p(x, y = 0) = u_p(x, y = b) = 0. \quad (2.7.6)$$

и частного решения уравнения Лапласа $u_0(x, y)$:

$$\Delta u_0 = 0, \quad (2.7.7)$$

$$u_0(x = 0, y) = g_1(y), \quad u_0(x = a, y) = g_2(y), \quad (2.7.8)$$

$$u_0(x, y = 0) = g_3(x), \quad u_0(x, y = b) = g_4(x). \quad (2.7.9)$$

Решение краевой задачи (2.7.7)-(2.7.9) подробно обсуждалось в п. 0 и далее не рассматривается.

Заметим, что в качестве u_p можно взять любое решение неоднородного уравнения (2.7.4) без учета граничных условий (2.7.5), (2.7.6). В этом случае меняются лишь граничные условия для функции u_0 :

$$u_0(x = 0, y) = g_1(y) - u_p(x = 0, y),$$

$$u_0(x = a, y) = g_2(y) - u_p(x = a, y), \quad (2.7.10)$$

$$u_0(x, y = 0) = g_3(x) - u_p(x, y = 0),$$

$$u_0(x, y = b) = g_4(x) - u_p(x, y = b). \quad (2.7.11)$$

В ряде случаев этот способ оказывается удобным, здесь, однако, рассмотрен метод определения частного решения u_p , удовлетворяющего именно краевой задаче (2.7.4)-(2.7.6). Такое решение может

быть построено в виде ряда по собственным функциям соответствующей задачи Штурма-Лиувилля.

Пусть $\{\lambda_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$ и $\{V_{nm}(x,y)\}_{n,m=1}^{\infty}$ – системы собственных значений и ортонормированных собственных функций следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] + \lambda V = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (2.7.12)$$

$$V(x=0, y) = 0, \quad V(x=a, y) = 0, \quad (2.7.13)$$

$$V(x, y=0) = 0, \quad V(x, y=b) = 0. \quad (2.7.14)$$

$V(x, y) \neq 0$ тождественно.

Легко показать, что решением данной задачи является функция

$$V_{nm} = \sin k_n x \sin q_m y, \quad k_n = \frac{\pi n}{a}, \quad q_m = \frac{\pi m}{b}, \quad \lambda_{nm} = k_n^2 + q_m^2. \quad (2.7.15)$$

Данные собственные функции этой задачи ортогональны друг другу:

$$\int_0^a dx \int_0^b dy V_{nm}(x, y) V_{pq}(x, y) = \frac{4}{ab} \delta_{np} \delta_{mq}. \quad (2.7.16)$$

Решение задачи (2.7.4)-(2.7.6) может быть разложено в ряд по собственным функциям задачи (2.7.12)-(2.7.14):

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} V_{nm}(x, y), \quad (2.7.17)$$

где A_{nm} – подлежащие определению коэффициенты разложения. Заметим, что в силу условий (2.7.13), (2.7.14) однородные граничные условия (2.7.5) и (2.7.6) выполняются для каждого слагаемого в (2.7.17).

Подставляя разложение (2.7.17) в уравнение (2.7.4) и учитывая, что каждая функция V_{nm} удовлетворяет уравнению (2.7.12), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \left(\frac{\partial^2 V_{nm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{nm}}{\partial y^2} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{nm} A_{nm} V_{nm} = -f. \quad (2.7.18)$$

Разложим правую часть данного уравнения в ряд по решениям задачи Штурма-Лиувилля:

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} V_{nm}(x, y), \quad (2.7.19)$$

где

$$f_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) V_{nm}(x, y) dx dy. \quad (2.7.20)$$

Подставляя данное разложение в (2.7.18) и приравнявая коэффициенты при каждой базисной функции V_{nm} , получаем

$$A_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}}. \quad (2.7.21)$$

В силу (2.7.15) для всех n и m справедливо неравенство $\lambda_{nm} > 0$, поэтому значение всех коэффициентов A_{nm} конечно. Формула (2.7.21), совместно с формулами (2.7.17) и (2.7.20), завершают построение решения.

Решения второй и третьей краевой задач для уравнения Пуассона строятся аналогичным образом и предлагается читателю в качестве упражнения. Следует заметить, что для задачи Неймана $\lambda_{00} = 0$ ($V_{00} = 1$), что, однако, не приводит к неразрешимости задачи. Действительно, для задачи Неймана должно выполняться следующее условие разрешимости:

$$f_{00} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) dx dy = 0, \quad (2.7.22)$$

т.е. A_{00} невозможно определить из уравнения (2.7.21) – решение задачи Неймана определяется с точностью до константы.

Это условие имеет очевидную трактовку для уравнения теплопроводности – для внутренней задачи не существует стационарного решения уравнения теплопроводности при наличии среднего по области тепловыделения и в отсутствие теплового потока через границы.

В качестве иллюстрации данного метода рассмотрим следующий пример:

Пример 2.3. Найти распределение потенциала внутри прямоугольной области, если на границах $x = 0, a$ отсутствует тепловой поток, на границах $y = 0, b$ поддерживается одинаковая постоянная температура, а внутри области выделяется тепло, причем плотность тепловыделения есть Q_0 при $x < a/2$ и $-Q_0$ – при $x > a/2$.

Решение. Математическая постановка задачи выглядит следующим образом:

$$\Delta T = -f(x, y), f = \frac{Q_0}{\kappa} \begin{cases} 1, x < a/2 \\ -1, x > a/2 \end{cases}, \quad (2.7.23)$$

$$T_x(x = 0, y) = T_x(x = a, y) = 0, \quad (2.7.24)$$

$$T(x, y = 0) = T(x, y = b) = 0. \quad (2.7.25)$$

Здесь $\kappa = \rho c \chi$ – коэффициент теплопроводности.

Перейдем к безразмерным переменным, выбрав a в качестве единицы длины, $2Q_0 a^2 / \kappa$ – в качестве единицы температуры. В этом случае будем иметь краевую задачу (для безразмерных величин оставлены прежние обозначения):

$$\Delta T = -f(x, y), f = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, x < 1/2 \\ -1, x > 1/2 \end{cases}, \quad (2.7.26)$$

$$T_x(x = 0, y) = T_x(x = 1, y) = 0, \quad (2.7.27)$$

$$T(x, y = 0) = T(x, y = L) = 0. \quad (2.7.28)$$

Здесь $L = b/a$.

Будем искать решение в виде

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} V_{nm}(x, y), \quad (2.7.29)$$

где $V_{nm}(x, y)$ – решения соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$V_{nm} = \cos k_n x \sin q_m y, k_n = \pi n, q_m = \frac{\pi m}{L}, n = 0, 1, \dots, m = 1, 2, \dots \quad (2.7.30)$$

Определяя по формуле (2.7.20) коэффициенты разложения функции f в ряд по V_{nm} , получим, что $f_{nm} = 0$, если хотя бы один из индексов n или m четный. Для $n = 2l + 1$ и $m = 2j + 1$ получаем

$$f_{2l+1,2j+1} = \frac{8(-1)^l}{\pi^2 (2l+1)(2j+1)}. \quad (2.7.31)$$

Таким образом, решение задачи (2.7.26)-(2.7.28) дается рядом

$$T = \frac{8}{\pi^4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \cos \pi(2l+1)x \sin \pi(2j+1)y/L}{(2l+1)(2j+1) \left[(2l+1)^2 + (2j+1)^2 / L^2 \right]}. \quad (2.7.32)$$

Ряд (2.7.32) суммировался численно, результаты для трех значений L представлены на рис. 2.4. Как видно, с увеличением L (т.е. расстояния между изотермическими границами) отклонения температуры становятся больше.

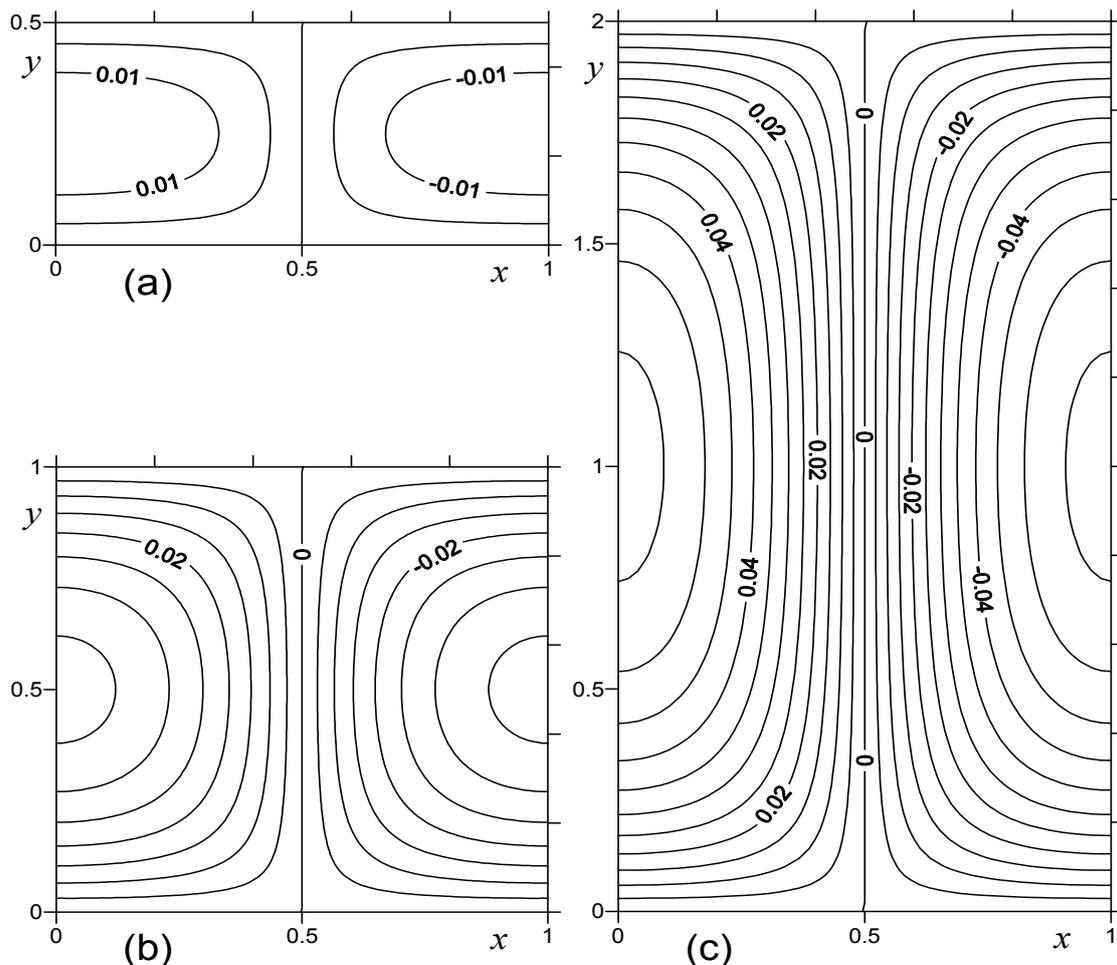


Рис. 2.4. Распределение температуры внутри прямоугольной области. (а), (b) и (с) соответствуют $L = 0.5, 1, 2$. Изотермы проведены через 0.005 для всех трех рисунков

Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольной области

Пример 1

Найти стационарное распределение температуры в тонкой однородной прямоугольной пластинке ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$), если часть контура ($x = 0$ и $x = l_x$) поддерживается при температуре $u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l_y} y$, сторона $y = 0$ – при температуре $u = u_1$, а сторона $y = l_y$ – при температуре $u = u_2$. Теплового обмен между боковой поверхностью пластинки и окружающей средой отсутствует.

Указания. Задача приводится к решению уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

с условиями

$$u(0, y) = u(l_x, y) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l_y} y, \quad u(x, 0) = u_1, \quad \lambda_{xn} = \left[\frac{\mu_{xn}}{l_x} \right]^2.$$

Решение. Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы

$$u(x, y) = w(x, y) + v(x, y).$$

Граничные условия согласованы:

$$g_1(0) = g_3(0) = u_1,$$

$$g_1(l_y) = g_4(0) = u_2,$$

$$g_2(0) = g_3(l_x) = u_1,$$

$$g_2(l_y) = g_4(l_x) = u_2.$$

Вспомогательная функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям, имеет вид

$$w(x, y) = g_1(y) \cdot \bar{X} + g_2(y) \cdot \bar{X} + g_3(x) \cdot \bar{Y} + g_4(x) \cdot \bar{Y} + \\ + A \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} + B \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} + C \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} + D \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y},$$

где

$$\overline{X}(x) = 1 - \frac{x}{l_x}, \quad \overline{\overline{X}}(x) = \frac{x}{l_x},$$

$$\overline{Y}(y) = 1 - \frac{y}{l_y}, \quad \overline{\overline{Y}}(y) = \frac{y}{l_y},$$

$$A = C = -u_1, \quad B = D = -u_2.$$

Следовательно,

$$w(x, y) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l_y} y.$$

Функция $w(x, y)$ – гармоническая, так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Аналитическое решение

$$u(x, y) = w(x, y) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l_y} y.$$

Пример 2

В тонкой однородной прямоугольной пластинке ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$) часть контура ($x = 0$ и $y = 0$) поддерживается при нулевой температуре, сторона $x = l_x$ теплоизолирована, на стороне $y = l_y$ поддерживается температура

$$u(x, l_y) = \sin \frac{5\pi x}{2l_x}.$$

Тепловой обмен между боковой поверхностью пластинки и окружающей средой отсутствует.

Найдите стационарное распределение температуры в пластинке.

Указания. Задача приводится к решению уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l_x, y) = 0, \quad u(x, l_y) = \sin \frac{5\pi x}{2l_x}.$$

Решение. Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы

$$u(x, y) = w(x, y) + v(x, y).$$

Граничные условия согласованы:

$$g_1|_{y=0} = g_3|_{x=0} = 0,$$

$$g_1|_{y=l_y} = g_4|_{x=0} = 0,$$

$$g_2|_{y=0} = \frac{\partial g_3}{\partial x} \Big|_{x=l_x} = 0,$$

$$g_2|_{y=l_y} = \frac{\partial g_4}{\partial x} \Big|_{x=l_x} = 0.$$

Вспомогательная функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям, имеет вид

$$w(x, y) = g_1(y) \cdot \bar{X} + g_2(y) \cdot \bar{\bar{X}} + g_3(x) \cdot \bar{Y} + g_4(x) \cdot \bar{\bar{Y}} + \\ + A \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} + B \cdot \bar{X} \cdot \bar{\bar{Y}} + C \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{Y} + D \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{\bar{Y}},$$

где

$$\bar{X}(x) = 1, \quad \bar{\bar{X}}(x) = x,$$

$$\bar{Y}(y) = 1 - \frac{y}{l_y}, \quad \bar{\bar{Y}}(y) = \frac{y}{l_y},$$

$$A = B = C = D = 0.$$

Следовательно, вспомогательная функция имеет вид

$$w(x, y) = \frac{y}{l_y} \cdot \sin \frac{5\pi x}{2l_x}.$$

Для функции $v(x, y)$ получаем краевую задачу, где

$$f^*(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{y}{l_y} \cdot \left(\frac{5\pi}{2l_x} \right)^2 \sin \frac{5\pi x}{2l_x}.$$

Собственные значения и собственные функции задачи:

$$\lambda_{xn} = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l_x} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l_x}, \quad \|X_n\|^2 = \frac{l_x}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda_{ym} = \left(\frac{m\pi}{l_y} \right)^2, \quad Y_m(y) = \sin \frac{m\pi y}{l_y}, \quad \|Y_m\|^2 = \frac{l_y}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda_{nm} = \lambda_{xn} + \lambda_{ym} = \pi^2 \left[\frac{(2n+1)^2}{4l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2} \right],$$

$$V_{nm}(x, y) = X_n(x) \cdot Y_m(y) = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l_x} \sin \frac{m\pi y}{l_y},$$

$$\|V_{nm}\|^2 = \|X_n\|^2 \cdot \|Y_m\|^2 = \frac{l_x l_y}{4}.$$

Решение $v(r, \varphi)$ определяется рядом

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l_x} \sin \frac{m\pi y}{l_y},$$

где

$$C_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}}.$$

$$f_{nm} = \frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f^*(x, y) \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l_x} \sin \frac{m\pi y}{l_y} dx dy =$$

$$= \begin{cases} (-1)^m \frac{25\pi}{2ml_x^2} & \text{при } n = 2, \\ 0 & \text{при } n \neq 2, \end{cases}$$

$$C_{2m} = \frac{f_{2m}}{\lambda_{2m}} = (-1)^m \frac{50l_y^2}{m\pi [25l_y^2 + 4m^2l_x^2]}, \quad C_{nm} = 0, \quad \text{при } n \neq 2.$$

Аналитическое решение

$$u(x, y) = w(x, y) + v(x, y) =$$

$$= \frac{y}{l_y} \cdot \sin \frac{5\pi x}{2l_x} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{50l_y^2}{m\pi [25l_y^2 + 4m^2l_x^2]} \sin \frac{5\pi x}{2l_x} \sin \frac{m\pi y}{l_y}.$$

Пример 3

В тонкой однородной прямоугольной пластинке ($0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$) стороны контура $y = 0$ и $y = l_y$ поддерживаются при температурах

$$u(x, 0) = \cos x \text{ и } u(x, l_y) = \cos 3x,$$

а на стороны $x = 0$ и $x = l_x$ извне подаются постоянные тепловые потоки плотности

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \sin y \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x}(l_x, y) = \sin 5y.$$

Тепловой обмен между боковой поверхностью пластинки и окружающей средой отсутствует. Найдите стационарное распределение температуры в пластинке.

Указания. Задача приводится к решению уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

с условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= \sin y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l_x, y) = \sin 5y, \\ u(x, 0) &= \cos x, \quad u(x, l_y) = \cos 3x. \end{aligned}$$

Решение. Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы

$$u(x, y) = w(x, y) + v(x, y).$$

Граничные условия согласованы:

$$\begin{aligned} g_1 \Big|_{y=0} &= \frac{\partial g_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\ g_1 \Big|_{y=\pi} &= \frac{\partial g_4}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\ g_2 \Big|_{y=0} &= \frac{\partial g_3}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \\ g_2 \Big|_{y=\pi} &= \frac{\partial g_4}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0. \end{aligned}$$

Вспомогательная функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям, имеет вид

$$w(x, y) = g_1(y) \cdot \bar{X} + g_2(y) \cdot \bar{\bar{X}} + g_3(x) \cdot \bar{Y} + g_4(x) \cdot \bar{\bar{Y}} + A \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} + B \cdot \bar{X} \cdot \bar{\bar{Y}} + C \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{Y} + D \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{\bar{Y}},$$

где

$$\bar{X}(x) = x - \frac{x^2}{2\pi}, \quad \bar{\bar{X}}(x) = \frac{x^2}{2\pi},$$

$$\bar{Y}(y) = 1 - \frac{y}{\pi}, \quad \bar{\bar{Y}}(y) = \frac{y}{\pi},$$

$$A = B = C = D = 0.$$

Следовательно, вспомогательная функция имеет вид

$$w(x, y) = \sin y \cdot \left(x - \frac{x^2}{2\pi} \right) + \sin 5y \cdot \frac{x^2}{2\pi} + \cos x \cdot \left(1 - \frac{y}{\pi} \right) + \cos 3x \cdot \frac{y}{\pi}.$$

Для функции $v(x, y)$ получаем краевую задачу, где

$$f^*(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left\{ \sin y \cdot (x^2 - 2\pi x - 2) + \sin 5y \cdot (2 - 25x^2) + 2 \cos x \cdot (y - \pi) - 18y \cdot \cos 3x \right\}.$$

Собственные значения и собственные функции задачи:

$$\lambda_{xn} = n^2, \quad X_n(x) = \cos nx, \quad \|X_n\|^2 = \begin{cases} \pi, & \text{если } n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } n > 0 \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\lambda_{ym} = m^2, \quad Y_m(y) = \sin my, \quad \|Y_m\|^2 = \frac{\pi}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\lambda_{nm} = \lambda_{xn} + \lambda_{ym} = n^2 + m^2,$$

$$V_{nm}(x, y) = X_n(x) \cdot Y_m(y) = \cos nx \cdot \sin my,$$

$$\|V_{nm}\|^2 = \|X_n\|^2 \cdot \|Y_m\|^2 = \begin{cases} \frac{\pi^2}{2}, & \text{если } n = 0, \\ \frac{\pi^2}{4}, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

Решение $v(x, y)$ определяется рядом

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \cos nx \cdot \sin my.$$

где

$$C_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}} \cdot f_{nm} = \frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f^*(x, y) \cdot \cos nx \cdot \sin my \, dx dy,$$

$$\frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx (x^2 - 2\pi x - 2) dx \cdot \int_0^{\pi} \sin y \cdot \sin my \, dy =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) & \text{при } m = 1, n = 0, \\ \frac{2}{\pi n^2} & \text{при } m = 1, n > 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 1, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \cdot (2 - 25x^2) dx \cdot \int_0^{\pi} \sin 5y \cdot \sin my \, dy =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{25\pi^2}{6} \right) & \text{при } m = 5, n = 0, \\ \frac{50}{\pi n^2} (-1)^{n+1} & \text{при } m = 5, n > 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 5, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \cdot \cos x \, dx \cdot \int_0^{\pi} 2(y - \pi) \cdot \sin my \, dy = \begin{cases} -\frac{2}{\pi m} & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n \neq 1, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \cdot \cos 3x \, dx \cdot \int_0^{\pi} (-18y) \cdot \sin my \, dy = \begin{cases} \frac{18}{\pi m} (-1)^n & \text{при } n = 3, \\ 0 & \text{при } n \neq 3, \end{cases}$$

$$C_{01} = \frac{f_{01}}{\lambda_{01}} = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right), \quad C_{n1} = \frac{f_{n1}}{\lambda_{n1}} = \frac{2}{\pi n^2 (n^2 + 1)},$$

$$C_{05} = \frac{f_{05}}{\lambda_{05}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{25} - \frac{\pi^2}{6} \right),$$

$$C_{n5} = \frac{f_{n5}}{\lambda_{n5}} = (-1)^{n+1} \frac{50}{\pi n^2 (n^2 + 25)}, \quad C_{1m} = \frac{f_{1m}}{\lambda_{1m}} = -\frac{2}{\pi m (m^2 + 1)},$$

$$C_{3m} = \frac{f_{3m}}{\lambda_{3m}} = (-1)^m \frac{18}{\pi m (m^2 + 9)}, \quad C_{nm} = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

Аналитическое решение

$$u(x, y) = w(x, y) + u(x, y) =$$

$$= \sin y \cdot \left(x - \frac{x^2}{2\pi} \right) + \sin 5y \cdot \frac{x^2}{2\pi} + \cos x \cdot \left(1 - \frac{y}{\pi} \right) + \cos 3x \cdot \frac{y}{\pi} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} [C_{n1} \sin y + C_{n5} \sin 5y] \cdot \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} [C_{1m} \cos x + C_{3m} \cos 3x] \cdot \sin my.$$

Пример 4

В тонкой однородной прямоугольной пластинке ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$) часть контура ($y = l_y$) поддерживается при нулевой температуре, сторона $y = 0$ теплоизолирована, на стороне $x = 0$ поддерживается температура $u = 1$, а на стороне $x = l_x$ – температура

$$u(l_x, y) = \cos \frac{3\pi y}{2l_y}.$$

Тепловой обмен между боковой поверхностью пластинки и окружающей средой отсутствует.

Найдите стационарное распределение температуры в пластинке.

Указания. Задача приводится к решению уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

с условиями

$$u(0, y) = 1, \quad u(l_x, y) = \cos \frac{3\pi y}{2l_y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad u(x, l_y) = 0.$$

Решение. Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы

$$u(x, y) = w(x, y) + v(x, y).$$

Граничные условия не согласованы:

$$\left. \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|_{y=0} = g_3 \Big|_{x=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial g_2}{\partial x} \right|_{y=0} = g_3 \Big|_{x=l_x} = 0,$$

$$g_2 \Big|_{y=l_y} = g_4 \Big|_{x=l_x} = 0,$$

$$g_1 \Big|_{y=l_y} = 1 \neq g_4 \Big|_{x=0} = 0.$$

Вспомогательную функцию, удовлетворяющую заданным граничным условиям, ищем в виде суммы двух функций

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y),$$

где $w_1(x, y)$ – вспомогательная функция, удовлетворяющая согласованным граничным условиям

$$P_1[w_1]_{x=0} = w_1(0, y) = g_1(y) = 1,$$

$$P_2[w_1]_{x=l_x} = w_1(l_x, y) = g_2(y) = \cos \frac{3\pi y}{2l_y},$$

$$P_3[w_1]_{y=0} = \frac{\partial w_1}{\partial y}(x, 0) = -A\bar{X} - C\bar{X} = 0,$$

$$P_4[w_1]_{y=l_y} = w_1(x, l_y) = -B\bar{X} - D\bar{X} = 1 - \frac{x}{l_x},$$

$w_2(x, y)$ – частное решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям вида

$$P_1[w_2]_{x=0} = w_2(0, y) = 0,$$

$$P_2[w_2]_{x=l_x} = w_2(l_x, y) = 0,$$

$$P_3[w_2]_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = g_3(x) + A\bar{X} + C\bar{\bar{X}} = 0,$$

$$P_4[w_2]_{y=l_y} = w_2(x, l_y) = g_4(x) + B\bar{X} + D\bar{\bar{X}} = \frac{x}{l_x} - 1.$$

Функция $w_1(x, y)$ имеет вид

$$w_1(x, y) = g_1(y) \cdot \bar{X} + g_2(y) \cdot \bar{\bar{X}} + [g_3(x) - \tilde{g}_3(x)] \cdot \bar{Y} + [g_4(x) - \tilde{g}_4(x)] \cdot \bar{\bar{Y}} + A \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} + B \cdot \bar{X} \cdot \bar{\bar{Y}} + C \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{Y} + D \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{\bar{Y}},$$

где

$$\bar{X}(x) = 1 - \frac{x}{l_x}, \quad \bar{\bar{X}}(x) = \frac{x}{l_x},$$

$$\bar{Y}(y) = y - l_y, \quad \bar{\bar{Y}}(y) = 1,$$

$$A = C = D = 0, \quad B = -1.$$

Следовательно, вспомогательная функция имеет вид

$$w_1(x, y) = 1 - \frac{x}{l_x} \cdot \left(1 - \cos \frac{3\pi y}{2l_y} \right).$$

Функция $w_2(x, y)$ строится в виде

$$w_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n Y_{1n}(y) + B_n Y_{2n}(y)\} \cdot X_n(x),$$

где λ_{xn} , $X_n(x)$ – собственные значения и собственные функции одномерной задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_{xn} = \left[\frac{n\pi}{l_x} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l_x}, \quad \|X_n\|^2 = \frac{l_x}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решения $Y_{1n}(y)$ и $Y_{2n}(y)$ для заданных граничных условий имеют вид

$$Y_{1n}(y) = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} y}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} l_y}, \quad Y_{2n}(y) = -\frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (l_y - y)}{\sqrt{\lambda_n} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} l_y}.$$

Коэффициенты A_n и B_n определяем по формулам

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{l_x} \left[g_4(x) + B\bar{X} + D\bar{\bar{X}} \right] X_n(x) dx = \\
&= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} \left(\frac{x}{l_x} - 1 \right) \sin \frac{n\pi x}{l_x} dx = -\frac{2}{n\pi}, \\
B_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{l_x} \left[g_3(x) + A\bar{X} + C\bar{\bar{X}} \right] X_n(x) dx = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$w_2(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} y}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} l_y} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l_x},$$

Функция $w_2(x, y)$ – частное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0.$$

Для функции $v(x, y)$ получаем краевую задачу, где

$$f^*(x, y) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = -\frac{x}{l_x} \cdot \left(\frac{3\pi}{2l_y} \right)^2 \cos \frac{3\pi y}{2l_y}.$$

Собственные значения и собственные функции задачи:

$$\begin{aligned}
\lambda_{x_n} &= \left[\frac{n\pi}{l_x} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l_x}, \quad \|X_n\|^2 = \frac{l_x}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \\
\lambda_{y_m} &= \left[\frac{(2m+1)\pi}{2l_y} \right]^2, \quad Y_m(y) = \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2l_y}, \quad \|Y_m\|^2 = \frac{l_y}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

$$\lambda_{nm} = \lambda_{x_n} + \lambda_{y_m} = \pi^2 \left[\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{(2m+1)^2}{4l_y^2} \right],$$

$$V_{nm}(x, y) = X_n(x) \cdot Y_m(y) = \sin \frac{n\pi x}{l_x} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2l_y},$$

$$\|V_{nm}\|^2 = \|X_n\|^2 \cdot \|Y_m\|^2 = \frac{l_x l_y}{4}.$$

Решение $v(x, y)$ определяется рядом

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin \frac{n\pi x}{l_x} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2l_y},$$

где

$$C_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}},$$

$$f_{nm} = \frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f^*(x, y) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l_x} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2l_y} dx dy =$$

$$= \begin{cases} (-1)^n \frac{9\pi}{2nl_y^2} & \text{при } m = 1, \\ 0 & \text{при } m \neq 1, \end{cases}$$

$$C_{n1} = \frac{f_{n1}}{\lambda_{n1}} = (-1)^n \frac{18l_x^2}{n\pi [4n^2l_y^2 + 9l_x^2]}, \quad C_{nm} = 0, \text{ при } m \neq 1.$$

Аналитическое решение

$$u(x, y) = [w_1(x, y) + w_2(x, y)] + v(x, y) = 1 - \frac{x}{l_x} \cdot \left(1 - \cos \frac{3\pi y}{2l_y} \right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} y}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} l_y} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l_x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{18l_x^2}{n\pi [4n^2l_y^2 + 9l_x^2]} \sin \frac{n\pi x}{l_x} \cos \frac{3\pi y}{2l_y}.$$

Пример 5

В тонкой однородной прямоугольной пластинке ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$) часть контура ($x = 0$ и $y = 0$) поддерживается при температуре $u = u_1$, а другая часть ($x = l_x$ и $y = l_y$) – при температуре $u = u_2$. Тепловой обмен между боковой поверхностью пластинки и окружающей средой отсутствует.

Найдите стационарное распределение температуры в пластинке.

Указания. Задача приводится к решению уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

с условиями

$$u(0, y) = u_1, \quad u(l_x, y) = u_2, \quad u(x, 0) = u_1, \quad u(x, l_y) = u_2.$$

Возьмите, для начала, следующие значения параметров задачи (восстановите размерности):

$$l_x = 4, \quad l_y = 6 \text{ — длина и ширина пластинки;}$$

$$u_1 = 10, \quad u_2 = 20 \text{ — температуры на сторонах пластинки.}$$

Решение. Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы

$$u(x, y) = w(x, y) + v(x, y).$$

Граничные условия не согласованы:

$$g_1|_{y=0} = g_3|_{x=0} = u_1,$$

$$g_2|_{y=0} = u_2 \neq g_3|_{x=l_x} = u_1,$$

$$g_2|_{y=l_y} = g_4|_{x=l_x} = u_2,$$

$$g_1|_{y=l_y} = u_1 \neq g_4|_{x=0} = u_2.$$

Вспомогательную функцию, удовлетворяющую заданным граничным условиям, ищем в виде суммы двух функций

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y),$$

где $w_1(x, y)$ — вспомогательная функция, удовлетворяющая согласованным граничным условиям

$$P_1[w_1]_{x=0} = g_1(y) = u_1, \quad P_2[w_1]_{x=l_x} = g_2(y) = u_2,$$

$$P_3[w_1]_{y=0} = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l_x}, \quad P_4[w_1]_{y=l_y} = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l_x}.$$

$w_2(x, y)$ — частное решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям вида

$$P_1[w_2]_{x=0} = 0, \quad P_2[w_2]_{x=l_x} = 0,$$

$$P_3[w_2]_{y=0} = \frac{x}{l_x} (u_1 - u_2), \quad P_4[w_2]_{y=l_y} = (u_2 - u_1) \cdot \left(1 - \frac{x}{l_x}\right).$$

Функция $w_1(x, y)$ имеет вид

$$w_1(x, y) = g_1(y) \cdot \overline{X} + g_2(y) \cdot \overline{X},$$

где

$$\overline{X}(x) = 1 - \frac{x}{l_x}, \quad \overline{\overline{X}}(x) = \frac{x}{l_x},$$

$$A = B = -u_1, \quad C = D = -u_2.$$

Следовательно, вспомогательная функция имеет вид

$$w_1(x, y) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l_x}.$$

Функция $w_1(x, y)$ – гармоническая, т.е.

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0.$$

Функция $w_2(x, y)$ строится в виде

$$w_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n Y_{1n}(y) + B_n Y_{2n}(y)\} \cdot X_n(x),$$

где λ_{xn} , $X_n(x)$ – собственные значения и собственные функции одномерной задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_{xn} = \left[\frac{n\pi}{l_x} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l_x}, \quad \|X_n\|^2 = \frac{l_x}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решения $Y_{1n}(y)$ и $Y_{2n}(y)$ для заданных граничных условий имеют вид

$$Y_{1n}(y) = \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_n} y}{\text{sh} \sqrt{\lambda_n} l_y}, \quad Y_{2n}(y) = \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_n} (l_y - y)}{\text{sh} \sqrt{\lambda_n} l_y}.$$

Коэффициенты A_n и B_n определяем по формулам

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{l_x} \left[g_4(x) + B\overline{X} + D\overline{\overline{X}} \right] X_n(x) dx =$$

$$= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} (u_2 - u_1) \cdot \left(1 - \frac{x}{l_x} \right) \sin \frac{n\pi x}{l_x} dx = \frac{2}{n\pi} (u_2 - u_1),$$

$$B_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{l_x} \left[g_3(x) + A\bar{X} + C\bar{\bar{X}} \right] X_n(x) dx =$$

$$= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} \frac{x}{l_x} (u_1 - u_2) \sin \frac{n\pi x}{l_x} dx = (-1)^n \frac{2}{n\pi} (u_2 - u_1).$$

Таким образом,

$$w_2(x, y) = 2(u_2 - u_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} l_y} \left\{ \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} y + (-1)^n \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (l_y - y) \right\} \sin \frac{n\pi x}{l_x}.$$

Функция $w_2(x, y)$ – частное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0.$$

Для функции $v(x, y)$ получаем краевую задачу, где

$$f^*(x, y) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \equiv 0,$$

следовательно,

$$v(x, y) \equiv 0.$$

Аналитическое решение

$$u(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l_x} +$$

$$+ 2(u_2 - u_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} l_y} \left\{ \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} y + (-1)^n \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (l_y - y) \right\} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l_x}.$$

Пример 6

Найдите стационарное распределение температуры в тонкой однородной прямоугольной пластинке ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$), если часть контура ($x = l_x$ и $y = l_y$) поддерживается при температуре $u = u_0$, а другая часть ($x = 0$ и $y = 0$) – теплоизолирована. В пластине действует один сосредоточенный источник постоянной мощности Q , находящийся в точке (x_0, y_0) ($0 \leq x_0 \leq l_x$, $0 \leq y_0 \leq l_y$). Тепловой обмен между боковой поверхностью пластинки и окружающей средой отсутствует.

Указания. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -Q \cdot \delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

с условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad u(l_x, y) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad u(x, l_y) = u_0.$$

Возьмите, для начала, следующие значения параметров задачи (восстановите размерности):

$l_x = 4, l_y = 6$ – длина и ширина пластинки;

$x_0 = 2, y_0 = 3$ – координаты точки сосредоточения источника;

$Q = 100$ – значение мощности источника;

$u_0 = 10$ – температура на сторонах пластинки.

Решение. Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы

$$u(r, \varphi) = w(r, \varphi) + v(r, \varphi).$$

Граничные условия согласованы:

$$\left. \frac{\partial g_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial g_3}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (= -A),$$

$$g_1 \Big|_{y=l_y} = \left. \frac{\partial g_4}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (= -B),$$

$$\left. \frac{\partial g_2}{\partial y} \right|_{y=0} = g_3 \Big|_{x=l_x} = 0 \quad (= -C),$$

$$g_2 \Big|_{y=l_y} = g_4 \Big|_{x=l_x} = u_0 \quad (= -D).$$

Вспомогательная функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям, имеет вид

$$w(x, y) = g_1(y) \cdot \overline{\overline{X}} + g_2(y) \cdot \overline{\overline{X}} + g_3(x) \cdot \overline{\overline{Y}} + g_4(x) \cdot \overline{\overline{Y}} + \\ + A \cdot \overline{\overline{X}} \cdot \overline{\overline{Y}} + B \cdot \overline{\overline{X}} \cdot \overline{\overline{Y}} + C \cdot \overline{\overline{X}} \cdot \overline{\overline{Y}} + D \cdot \overline{\overline{X}} \cdot \overline{\overline{Y}},$$

где

$$\overline{\overline{X}}(x) = x - l_x, \quad \overline{\overline{X}}(x) = 1, \quad \overline{\overline{Y}}(y) = y - l_y, \quad \overline{\overline{Y}}(y) = 1,$$

$$A = B = C = 0, D = -u_0.$$

Следовательно, вспомогательная функция имеет вид

$$w(x, y) = u_0.$$

Функция $w(x, y)$ – гармоническая, так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Собственные значения и собственные функции задачи:

$$\lambda_{xn} = \left[\frac{\pi(2n+1)}{2l_x} \right]^2, X_n(x) = \cos \frac{\pi(2n+1)x}{2l_x}, \|X_n\|^2 = \frac{l_x}{2}, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\lambda_{ym} = \left[\frac{\pi(2m+1)}{2l_y} \right]^2, Y_m(y) = \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2l_y}, \|Y_m\|^2 = \frac{l_y}{2}, m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\lambda_{nm} = \lambda_{xn} + \lambda_{ym} = \pi^2 \left(\frac{(2n+1)^2}{4l_x^2} + \frac{(2m+1)^2}{4l_y^2} \right),$$

$$V_{nm}(x, y) = X_n(x) \cdot Y_m(y) = \cos \frac{\pi(2n+1)x}{2l_x} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2l_y},$$

$$\|V_{nm}\|^2 = \|X_n\|^2 \cdot \|Y_m\|^2 = \frac{l_x l_y}{4}.$$

Решение $v(r, \varphi)$ определяется рядом

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l_x} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2l_y},$$

где

$$C_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}},$$

$$\begin{aligned} f_{nm} &= \frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f(x, y) \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l_x} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2l_y} dx dy = \\ &= \frac{4Q}{l_x l_y} \cos \frac{(2n+1)\pi x_0}{2l_x} \cos \frac{(2m+1)\pi y_0}{2l_y}, \end{aligned}$$

$$C_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}} = \frac{16Ql_x l_y}{\pi^2 [(2n+1)^2 l_x^2 + (2m+1)^2 l_y^2]} \cos \frac{(2n+1)\pi x_0}{2l_x} \cos \frac{(2m+1)\pi y_0}{2l_y}.$$

Аналитическое решение

$$\begin{aligned} u(x, y) &= w(x, y) + v(x, y) = \\ &= u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l_x} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2l_y}. \end{aligned}$$

Пример 7

Через грань $y = 0$ бесконечного цилиндра с прямоугольным сечением $0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$ вытекает, а через грань $x = 0$ вытекает количество тепла Q .

Найти распределение температуры внутри цилиндра, считая, что тепловой поток равномерно распределен по поверхности грани $y = 0$ и соответственно по поверхности грани $x = 0$, а остальные две грани тела теплоизолированы.

Указания. Задача приводится к решению уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

с условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = -\frac{Q}{\kappa l_y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l_x, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{Q}{\kappa l_x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, l_y) = 0.$$

Решение задачи существует, так как

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_0^{l_x} [g_3(x) + g_4(x)] dx + \int_0^{l_y} [g_1(x) + g_2(x)] dx = 0.$$

Возьмите, для начала, следующие значения параметров задачи (восстановите размерности):

$l_x = 4$, $l_y = 6$ – длина и ширина прямоугольного сечения цилиндра;

$Q = 10$ – значение количества тепла;

$\kappa = 1$ – коэффициент теплопроводности.

Решение. Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы

$$u(r, \varphi) = w(r, \varphi) + v(r, \varphi).$$

Граничные условия согласованы:

$$\left. \frac{\partial g_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial g_3}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (= -A),$$

$$\left. \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|_{y=l} = \left. \frac{\partial g_4}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (= -B),$$

$$\left. \frac{\partial g_2}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial g_3}{\partial y} \right|_{x=l} = 0 \quad (= -C),$$

$$\left. \frac{\partial g_2}{\partial y} \right|_{y=l} = \left. \frac{\partial g_4}{\partial y} \right|_{x=l} = 0 \quad (= -D).$$

Вспомогательная функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям, имеет вид

$$w(x, y) = g_1(y) \cdot \bar{X} + g_2(y) \cdot \overline{\bar{X}} + g_3(x) \cdot \bar{Y} + g_4(x) \cdot \overline{\bar{Y}} + \\ + A \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} + B \cdot \bar{X} \cdot \overline{\bar{Y}} + C \cdot \overline{\bar{X}} \cdot \bar{Y} + D \cdot \overline{\bar{X}} \cdot \overline{\bar{Y}},$$

где

$$\bar{X}(x) = x - \frac{x^2}{2l_x}, \quad \overline{\bar{X}}(x) = \frac{x^2}{2l_x},$$

$$\bar{Y}(y) = y - \frac{y^2}{2l_y}, \quad \overline{\bar{Y}}(y) = \frac{y^2}{2l_y},$$

$$A = B = C = D = 0.$$

Следовательно, вспомогательная функция имеет вид

$$w(x, y) = -\frac{Q}{\kappa l_y} \cdot \left(x - \frac{x^2}{2l_x} \right) + \frac{Q}{\kappa l_x} \cdot \left(y - \frac{y^2}{2l_y} \right) = \\ = \frac{Q}{2\kappa l_x l_y} \cdot \left[-x(2l_x - x) + y(2l_y - y) \right].$$

Функция $w(x, y)$ – гармоническая, так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Следовательно,

$$v(x, y) \equiv 0.$$

Аналитическое решение

$$u(x, y) = w(x, y) = \frac{Q}{2\kappa l_x l_y} \cdot \left[-x(2l_x - x) + y(2l_y - y) \right].$$

Пример 8

Найти распределение температуры внутри прямоугольной тонкой пластинки $0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$, если к одной из ее сторон ($y = l_y$) подводится постоянный поток Q , а остальные три стороны поддерживаются при постоянной температуре u_0 .

Указания. Задача приводится к решению уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

с условиями

$$u(0, y) = u_0, \quad u(l_x, y) = u_0, \quad u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, l_y) = \frac{Q}{\kappa}.$$

Возьмите, для начала, следующие значения параметров задачи (восстановите размерности):

$l_x = 4$, $l_y = 6$ – длина и ширина прямоугольного сечения цилиндра;

$u_0 = 10$ – температура на сторонах пластинки.

$Q = 100$ – значение количества тепла;

$\kappa = 1$ – коэффициент теплопроводности.

Решение. Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы

$$u(r, \varphi) = w(r, \varphi) + v(r, \varphi).$$

Граничные условия не согласованы:

$$g_1|_{y=0} = g_3|_{x=0} = u_0,$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} \Big|_{y=l} = 0 \neq g_4 \Big|_{x=0} = \frac{Q}{\kappa},$$

$$g_2 \Big|_{y=0} = g_3 \Big|_{x=l} = u_0,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y} \Big|_{y=l} = 0 \neq g_4 \Big|_{x=l} = \frac{Q}{\kappa},$$

$$A = -P_3[g_1(y)]_{y=0} = -u_0, \quad C = -P_3[g_2(y)]_{y=0} = -u_0,$$

$$B = -P_4[g_1(y)]_{y=l} = 0, \quad D = -P_4[g_2(y)]_{y=l} = 0.$$

Вспомогательную функцию, удовлетворяющую заданным граничным условиям, ищем в виде суммы двух функций

$$w(r, \varphi) = w_1(r, \varphi) + w_2(r, \varphi),$$

где $w_1(x, y)$ – вспомогательная функция, удовлетворяющая согласованным граничным условиям

$$P_1[w_1]_{x=0} = g_1(y) = u_0, \quad P_2[w_1]_{x=l_x} = g_2(y) = u_0,$$

$$P_3[w_1]_{y=0} = -A \cdot \overline{X} - C \cdot \overline{\overline{X}} = u_0, \quad P_4[w_1]_{y=l_y} = -B \cdot \overline{X} - D \cdot \overline{\overline{X}} = 0,$$

$w_2(x, y)$ – частное решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям вида

$$P_1[w_2]_{x=0} = 0, \quad P_2[w_2]_{x=l_x} = 0,$$

$$P_3[w_2]_{y=0} = g_3(x) + A \cdot \overline{X} + C \cdot \overline{\overline{X}} = u_0 - u_0 = 0,$$

$$P_4[w_2]_{y=l_y} = g_4(x) + B \cdot \overline{X} + D \cdot \overline{\overline{X}} = \frac{Q}{\kappa}.$$

Функция $w_1(r, \varphi)$ имеет вид

$$w_1(x, y) = g_1(y) \cdot \overline{X} + g_2(y) \cdot \overline{\overline{X}},$$

где

$$\overline{X}(x) = 1 - \frac{x}{l_x}, \quad \overline{\overline{X}}(x) = \frac{x}{l_x}.$$

Следовательно, вспомогательная функция имеет вид

$$w_1(x, y) = u_0.$$

Функция $w(x,y)$ – гармоническая, так как

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0.$$

Функция $w_2(r, \varphi)$ строится в виде

$$w_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n Y_{1n}(y) + B_n Y_{2n}(y)\} \cdot X_n(x),$$

где λ_{xn} , $X_n(x)$ – собственные значения и собственные функции одномерной задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_{xn} = \left[\frac{n\pi}{l_x} \right]^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l_x}, \quad \|X_n\|^2 = \frac{l_x}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решения $Y_{1n}(y)$ и $Y_{2n}(y)$ для заданных граничных условий имеют вид

$$Y_{1n}(y) = \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_n} y}{\sqrt{\lambda_n} \text{ch} \sqrt{\lambda_n} l_y}, \quad Y_{2n}(y) = \frac{\text{ch} \sqrt{\lambda_n} (l_y - y)}{\text{ch} \sqrt{\lambda_n} l_y}.$$

Коэффициенты A_n и B_n определяем по формулам

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{l_x} \left[g_4(x) + B\bar{X} + D\bar{\bar{X}} \right] X_n(x) dx =$$

$$= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} \frac{Q}{\kappa} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l_x} dx = \begin{cases} \frac{Q}{\kappa} \cdot \frac{4}{n\pi}, & \text{если } n - \text{нечетное,} \\ 0, & \text{если } n - \text{четное,} \end{cases}$$

$$B_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{l_x} \left[g_3(x) + A\bar{X} + C\bar{\bar{X}} \right] X_n(x) dx = 0.$$

Таким образом,

$$w_2(x, y) = \frac{4Q \cdot l_x}{\kappa \pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \frac{\text{sh} \frac{(2k+1)\pi y}{l_x}}{\text{ch} \frac{(2k+1)\pi l_y}{l_x}} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l_x}.$$

Функция $w_2(r, \varphi)$ – частное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0.$$

Следовательно,

$$v(x, y) \equiv 0.$$

Аналитическое решение

$$u(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) =$$

$$= u_0 + \frac{4Q \cdot l_x}{\kappa \pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi y}{l_x}}{\operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi l_y}{l_x}} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l_x}.$$

Пример 9

Найти распределение температуры внутри прямоугольной тонкой пластинки $0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$, если на контуре пластины происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна $u_{md} = \text{const}$, и в пластине действует распределенный по пластине источник постоянной мощности Q . Тепловой обмен между боковой поверхностью пластинки и окружающей средой отсутствует.

Указания. Задача приводится к решению уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -Q, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

с условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_{md}) \right|_{x=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_{md}) \right|_{x=l_x} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} - h(u - u_{md}) \right|_{y=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} + h(u - u_{md}) \right|_{y=l_y} = 0.$$

Возьмите, для начала, следующие значения параметров задачи (восстановите размерности):

$h = 1$ – коэффициент теплопроводности;

$l_x = 4, l_y = 6$ – длина и ширина пластинки;

$u_{md} = 10$ – температура среды;

$Q = 100$ – мощность источника.

Решение. Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы

$$u(r, \varphi) = w(r, \varphi) + v(r, \varphi).$$

Граничные условия согласованы:

$$\left. \frac{\partial g_1}{\partial y} - hg_1 \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial g_3}{\partial x} - hg_3 \right|_{x=0} = h^2 u_{md} \quad (= -A),$$

$$\left. \frac{\partial g_1}{\partial y} + hg_1 \right|_{y=l_y} = \left. \frac{\partial g_4}{\partial x} - hg_4 \right|_{x=0} = -h^2 u_{md} \quad (= -B),$$

$$\left. \frac{\partial g_2}{\partial y} - hg_2 \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial g_3}{\partial x} + hg_3 \right|_{x=l_x} = -h^2 u_{md} \quad (= -C),$$

$$\left. \frac{\partial g_2}{\partial y} + hg_2 \right|_{y=l_y} = \left. \frac{\partial g_4}{\partial x} + hg_4 \right|_{x=l_x} = h^2 u_{md} \quad (= -D).$$

Вспомогательная функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям, имеет вид

$$w(x, y) = g_1(y) \cdot \overline{X} + g_2(y) \cdot \overline{\overline{X}} + g_3(x) \cdot \overline{Y} + g_4(x) \cdot \overline{\overline{Y}} + \\ + A \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} + B \cdot \overline{X} \cdot \overline{\overline{Y}} + C \cdot \overline{\overline{X}} \cdot \overline{Y} + D \cdot \overline{\overline{X}} \cdot \overline{\overline{Y}},$$

где

$$\overline{X}(x) = -\frac{1 + hl_x}{h(hl_x + 2)} + \frac{x}{hl_x + 2}, \quad \overline{\overline{X}}(x) = \frac{1}{h(hl_x + 2)} + \frac{x}{hl_x + 2},$$

$$\overline{Y}(y) = -\frac{1 + hl_y}{h(hl_y + 2)} + \frac{y}{hl_y + 2}, \quad \overline{\overline{Y}}(y) = \frac{1}{h(hl_y + 2)} + \frac{y}{hl_y + 2},$$

$$A = D = -h^2 u_{md}, \quad B = C = h^2 u_{md}.$$

Следовательно, вспомогательная функция имеет вид

$$w(x, y) = u_{md}.$$

Функция $w(x, y)$ – гармоническая, так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Собственные значения и собственные функции задачи:

$$\lambda_{xn} = \left[\frac{\mu_{xn}}{l_x} \right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где μ_{xn} - n -й корень уравнения $\tan \mu_x = \frac{2hl_x \mu_x}{\mu_x^2 - h^2 l_x^2}$.

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{xn} + h^2}} \left[\sqrt{\lambda_{xn}} \cos \sqrt{\lambda_{xn}} x + h \sin \sqrt{\lambda_{xn}} x \right],$$

$$\|X_n\|^2 = \frac{1}{2} \left[l_x + \frac{2h(\lambda_{xn} + h^2)}{(\lambda_{xn} + h^2)^2} \right],$$

$$\lambda_{ym} = \left[\frac{\mu_{ym}}{l_y} \right]^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где μ_{ym} - m -й корень уравнения $\tan \mu_y = \frac{2hl_y \mu_y}{\mu_y^2 - h^2 l_y^2}$.

$$Y_m(y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{ym} + h^2}} \left[\sqrt{\lambda_{ym}} \cos \sqrt{\lambda_{ym}} y + h \sin \sqrt{\lambda_{ym}} y \right],$$

$$\|Y_m\|^2 = \frac{1}{2} \left[l_y + \frac{2h(\lambda_{ym} + h^2)}{(\lambda_{ym} + h^2)^2} \right],$$

$$\lambda_{nm} = \lambda_{xn} + \lambda_{ym} = \frac{\mu_{xn}^2}{l_x^2} + \frac{\mu_{ym}^2}{l_y^2},$$

$$V_{nm}(x, y) = X_n(x) \cdot Y_m(y), \quad \|v_{nm}\|^2 = \|X_n\|^2 \cdot \|Y_m\|^2.$$

Решение $v(x, y)$ определяется рядом

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} X_n(x) Y_m(y).$$

где

$$C_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}},$$

$$f_{nm} = -\frac{Q}{\|V_{nm}\|^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_{xn} + h^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_{ym} + h^2}} \times$$

$$\times \int_0^{l_x} \left[\sqrt{\lambda_{xn}} \cos \sqrt{\lambda_{xn}} x + h \sin \sqrt{\lambda_{xn}} x \right] dx \cdot \int_0^{l_y} \left[\sqrt{\lambda_{ym}} \cos \sqrt{\lambda_{ym}} y + h \sin \sqrt{\lambda_{ym}} y \right] dy,$$

$$C_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}} = -\frac{Q}{\|V_{nm}\|^2 \lambda_{nm} \sqrt{\lambda_{xn} \lambda_{ym} (\lambda_{xn} + h^2) (\lambda_{ym} + h^2)}} \times$$

$$\times \left[\sqrt{\lambda_{xn}} \sin \sqrt{\lambda_{xn}} l_x + h (1 - \cos \sqrt{\lambda_{xn}} l_x) \right] \cdot \left[\sqrt{\lambda_{ym}} \sin \sqrt{\lambda_{ym}} l_y + h (1 - \sin \sqrt{\lambda_{ym}} l_y) \right].$$

Аналитическое решение

$$u(x, y) = w(x, y) + v(x, y) = u_{md} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} X_n(x) Y_m(y).$$

Пример 10

В тонкой однородной прямоугольной пластинке ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$) часть контура ($y = 0$ и $y = l_y$) теплоизолирована, а на другой части ($x = 0$ и $x = l_x$) происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна $u_{md} = \text{const}$. В пластине действует распределенный по пластине источник постоянной мощности

$$Q(x, y) = A \cos \frac{\pi x}{l_x} \cos \frac{\pi y}{l_y}.$$

Тепловой обмен между боковой поверхностью пластинки и окружающей средой отсутствует.

Найдите стационарное распределение температуры в пластинке.

Указания. Задача приводится к решению уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -A \cos \frac{\pi x}{l_x} \cos \frac{\pi y}{l_y}, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

при условиях

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_{md}) \right|_{x=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_{md}) \right|_{x=l_x} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=l_y} = 0.$$

Возьмите, для начала, следующие значения параметров задачи (восстановите размерности):

$h = 1.5$ – коэффициент теплопроводности;

$l_x = 4$, $l_y = 6$ – длина и ширина пластинки;

$u_{md} = 10$ – температура среды;

$A = 5$ – коэффициент.

Решение. Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы

$$u(r, \varphi) = w(r, \varphi) + v(r, \varphi).$$

Граничные условия согласованы:

$$\left. \frac{\partial g_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial g_3}{\partial x} - hg_3 \right|_{x=0} = 0 \quad (= -A),$$

$$\left. \frac{\partial g_1}{\partial y} \right|_{y=l_y} = \left. \frac{\partial g_4}{\partial x} - hg_4 \right|_{x=0} = 0 \quad (= -B),$$

$$\left. \frac{\partial g_2}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial g_3}{\partial x} + hg_3 \right|_{x=l_x} = 0 \quad (= -C),$$

$$\left. \frac{\partial g_2}{\partial y} \right|_{y=l_y} = \left. \frac{\partial g_4}{\partial x} + hg_4 \right|_{x=l_x} = 0 \quad (= -D).$$

Вспомогательная функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям, имеет вид

$$w(x, y) = g_1(y) \cdot \bar{X} + g_2(y) \cdot \bar{\bar{X}} + g_3(x) \cdot \bar{Y} + g_4(x) \cdot \bar{\bar{Y}} + \\ + A \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} + B \cdot \bar{X} \cdot \bar{\bar{Y}} + C \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{Y} + D \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{\bar{Y}},$$

где

$$\bar{X}(x) = -\frac{1 + hl_x}{h(hl_x + 2)} + \frac{x}{hl_x + 2}, \quad \bar{\bar{X}}(x) = \frac{1}{h(hl_x + 2)} + \frac{x}{hl_x + 2}, \\ \bar{Y}(y) = y - \frac{y^2}{2l_y}, \quad \bar{\bar{Y}}(y) = \frac{y^2}{2l_y},$$

$$A = B = C = D = 0.$$

Следовательно, вспомогательная функция имеет вид

$$w(x, y) = u_{md}.$$

Функция $w(x, y)$ – гармоническая, так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Собственные значения и собственные функции задачи:

$$\lambda_{xn} = \left[\frac{\mu_{xn}}{l_x} \right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где μ_{xn} - n -й корень уравнения $\tan \mu_x = \frac{2hl_x \mu_x}{\mu_x^2 - h^2 l_x^2}$.

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{xn} + h^2}} \left[\sqrt{\lambda_{xn}} \cos \sqrt{\lambda_{xn}} x + h \sin \sqrt{\lambda_{xn}} x \right],$$

$$\|X_n\|^2 = \frac{1}{2} \left[l_x + \frac{2h}{(\lambda_{xn} + h^2)} \right], \quad \lambda_{ym} = \left[\frac{\pi m}{l_y} \right]^2,$$

$$Y_m(y) = \cos \frac{\pi m y}{l_y}, \quad \|Y_m\|^2 = \begin{cases} l_y, & m = 0, \\ l_y / 2, & m \neq 0, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\lambda_{nm} = \lambda_{xn} + \lambda_{ym} = \left(\frac{\mu_{xn}^2}{l_x^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l_y^2} \right),$$

$$V_{nm}(x, y) = X_n(x) \cdot Y_m(y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{xn} + h^2}} \left[\sqrt{\lambda_{xn}} \cos \sqrt{\lambda_{xn}} x + h \sin \sqrt{\lambda_{xn}} x \right] \cos \frac{\pi m y}{l_y},$$

$$\|V_{nm}\|^2 = \|X_n\|^2 \cdot \|Y_m\|^2.$$

Решение $v(x, y)$ определяется рядом

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} X_n(x) Y_m(y), \quad C_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}},$$

$$\int_0^{l_x} \cos \frac{\pi x}{l_x} X_n(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{xn} + h^2}} \int_0^{l_x} \cos \frac{\pi x}{l_x} \left[\sqrt{\lambda_{xn}} \cos \sqrt{\lambda_{xn}} x + h \sin \sqrt{\lambda_{xn}} x \right] dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda_{xn}} l_x}{\sqrt{\lambda_{xn} + h^2} (\pi^2 - \lambda_{xn} l_x^2)} \left[\sin \sqrt{\lambda_{xn}} l_x - h l_x (1 + \cos \sqrt{\lambda_{xn}} l_x) \right],$$

$$\int_0^{l_y} \cos \frac{\pi y}{l_y} Y_m(y) dy = \int_0^{l_y} \cos \frac{\pi y}{l_y} \cos \frac{\pi m y}{l_y} dy = \begin{cases} l_y / 2, & m = 1, \\ 0, & m \neq 1, \end{cases}$$

$$C_{n1} = \frac{f_{n1}}{\lambda_{n1}} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \cdot \frac{A l_y^2 l_x \sqrt{\lambda_{xn}}}{\sqrt{\lambda_{xn} + h^2} (\pi^2 + \lambda_{xn} l_y^2) (\pi^2 - \lambda_{xn} l_x^2)} \times$$

$$\times \left[\sin \sqrt{\lambda_{xn}} l_x - h l_x (1 + \cos \sqrt{\lambda_{xn}} l_x) \right].$$

Аналитическое решение.

$$u(x, y) = w(x, y) + v(x, y) =$$

$$= u_{md} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{xn} + h^2}} \left[\sqrt{\lambda_{xn}} \cos \sqrt{\lambda_{xn}} x + h \sin \sqrt{\lambda_{xn}} x \right] \cdot \cos \frac{\pi y}{l_y}.$$

Пример 11

В тонкой однородной прямоугольной пластинке ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$) на стороне $x = 0$ происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна $u_{md} = \text{const}$, сторона $x = l_x$ конту-

ра теплоизолирована, а на сторонах $y = 0$ и $y = l_y$ поддерживается постоянная температура

$$u(x, 0) = u_1, \quad u(x, l_y) = \sin \frac{5\pi x}{2l_x}.$$

В пластине действует распределенный по пластине источник постоянной мощности

$$Q(x, y) = Ax \sin \frac{2\pi y}{l_y}.$$

Тепловой обмен между боковой поверхностью пластинки и окружающей средой отсутствует.

Найдите стационарное распределение температуры в пластинке.

Указания. Задача приводится к решению уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -Ax \sin \frac{2\pi y}{l_y}, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

при условиях

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_{md}) \right|_{x=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l_x} = 0,$$

$$u|_{y=0} = u_1,$$

$$u|_{y=l_y} = \sin \frac{5\pi x}{2l_x}.$$

Возьмите, для начала, следующие значения параметров задачи (восстановите размерности):

$h = 0.5$ – коэффициент теплопроводности;

$l_x = 4$, $l_y = 6$ – длина и ширина пластинки;

$u_{md} = 10$ – температура среды;

$u_1 = 20$ – температура на стороне $y = 0$;

$A = 5$ – коэффициент.

Решение. Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы

$$u(r, \varphi) = w(r, \varphi) + v(r, \varphi).$$

Граничные условия не согласованы:

$$(-A :) \quad g_1|_{y=0} = -hu_{md} \neq \left. \frac{\partial g_3}{\partial x} - hg_3 \right|_{x=0} = -hu_1,$$

$$(-B :) \quad g_1|_{y=l_y} = -hu_{md} \neq \left. \frac{\partial g_4}{\partial x} - hg_4 \right|_{x=0} = \frac{5\pi}{2l_x},$$

$$(-C :) \quad g_2|_{y=0} = \left. \frac{\partial g_3}{\partial x} \right|_{x=l_x} = 0,$$

$$(-D :) \quad g_2|_{y=l_y} = \left. \frac{\partial g_4}{\partial x} \right|_{x=l_x} = 0.$$

Находим разности

$$\Delta_1 = -g_1(0) + \frac{\partial g_3}{\partial x}(0) - hg_3(0) = h(u_1 - u_{md}),$$

$$\Delta_3 = -g_1(l_y) + \left. \frac{\partial g_4}{\partial x} - hg_4 \right|_{x=0} = hu_{md} + \frac{5\pi}{2l_x},$$

$$\Delta_2 = -g_2(0) + \left. \frac{\partial g_3}{\partial x} \right|_{x=l_x} = 0,$$

$$\Delta_4 = -g_2(l_y) + \frac{\partial g_4}{\partial x}(l_x) = 0.$$

Построим функции

$$\tilde{g}_3(x) = \Delta_1 + \frac{x}{l_x}(\Delta_2 - \Delta_1) = h(u_1 - u_{md}) \left(1 - \frac{x}{l_x} \right),$$

$$\tilde{g}_4(x) = \Delta_3 + \frac{x}{l_x}(\Delta_4 - \Delta_3) = \left(hu_{md} + \frac{5\pi}{2l_x} \right) \left(1 - \frac{x}{l_x} \right).$$

Вспомогательную функцию, удовлетворяющую заданным граничным условиям, ищем в виде суммы двух функций

$$w(r, \varphi) = w_1(r, \varphi) + w_2(r, \varphi),$$

где $w_1(x, y)$ – вспомогательная функция, удовлетворяющая согласованным граничным условиям

$$P_1[u]_{x=0} = g_1(y) = -hu_{md},$$

$$P_2[u]_{x=l_x} = g_2(y) = 0,$$

$$P_3[u]_{y=0} = g_3(x) - \tilde{g}_3(x) = u_1 - h(u_1 - u_{md}) \left(1 - \frac{x}{l_x}\right),$$

$$P_4[u]_{y=l_y} = g_4(x) - \tilde{g}_4(x) = Ax \sin \frac{2\pi y}{l_y} - \left(hu_{md} + \frac{5\pi}{2l_x}\right) \left(1 - \frac{x}{l_x}\right),$$

а $w_2(x, y)$ – частное решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям вида

$$P_1[u]_{x=0} = 0,$$

$$P_2[u]_{x=l_x} = 0,$$

$$P_3[u]_{y=0} = \tilde{g}_3(x) = h(u_1 - u_{md}) \left(1 - \frac{x}{l_x}\right),$$

$$P_4[u]_{y=l_y} = \tilde{g}_4(x) = \left(hu_{md} + \frac{5\pi}{2l_x}\right) \left(1 - \frac{x}{l_x}\right).$$

Функция $w_1(r, \varphi)$ имеет вид

$$w_1(x, y) = g_1(y) \cdot \bar{X} + g_2(y) \cdot \overline{\bar{X}} + [g_3(x) - \tilde{g}_3(x)] \cdot \bar{Y} + [g_4(x) - \tilde{g}_4(x)] \cdot \overline{\bar{Y}} + A \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} + B \cdot \bar{X} \cdot \overline{\bar{Y}} + C \cdot \overline{\bar{X}} \cdot \bar{Y} + D \cdot \overline{\bar{X}} \cdot \overline{\bar{Y}},$$

где

$$\bar{X}(x) = -\frac{1}{h}, \quad \overline{\bar{X}}(x) = \frac{1}{h} + x,$$

$$\bar{Y}(y) = 1 - \frac{y}{l_y}, \quad \overline{\bar{Y}}(y) = \frac{y}{l_y},$$

$$A = B = hu_{md}, \quad C = D = 0.$$

Следовательно, вспомогательная функция имеет вид

$$w_1(x, y) = \left[u_1 - h(u_1 - u_{md}) \left(1 - \frac{x}{l_x} \right) \right] \cdot \left(1 - \frac{y}{l_y} \right) + \left[Ax \sin \frac{2\pi y}{l_y} - \left(hu_{md} + \frac{5\pi}{2l_x} \right) \left(1 - \frac{x}{l_x} \right) \right] \frac{y}{l_y}.$$

Функция $w_1(x, y)$ – гармоническая, так как

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0.$$

Функция $w_2(x, y)$ строится в виде

$$w_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ A_n Y_{1n}(y) + B_n Y_{2n}(y) \} \cdot X_n(x),$$

где λ_{xn} , $X_n(x)$ – собственные значения и собственные функции одномерной задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_{xn} = \left[\frac{\mu_{xn}}{l_x} \right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где μ_n – n -й корень уравнения $\tan \mu_x = \frac{l_x h}{\mu_x}$.

$$X_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_{xn}} (l_x - x), \quad \|X_n\|^2 = \frac{1}{2} \left(l_x + \frac{h}{\lambda_{xn} + h^2} \right).$$

Решения $Y_{1n}(y)$ и $Y_{2n}(y)$ для заданных граничных условий имеют вид

$$Y_{1n}(y) = \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_n} y}{\text{sh} \sqrt{\lambda_n} l_y}, \quad Y_{2n}(y) = \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_n} (l_y - y)}{\text{sh} \sqrt{\lambda_n} l_y}.$$

Коэффициенты A_n и B_n определяем по формулам

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{l_x} \tilde{g}_4(x) X_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \left(hu_{md} + \frac{5\pi}{2l_x} \right) \int_0^{l_x} \left(1 - \frac{x}{l_x} \right) \cos \sqrt{\lambda_n} (l - x) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{l_x} \tilde{g}_3(x) X_n(x) dx = \\
&= \frac{1}{\|X_n\|^2} h(u_1 - u_{md}) \int_0^{l_x} \left(1 - \frac{x}{l_x}\right) \cos \sqrt{\lambda_n} (l - x) dx.
\end{aligned}$$

Функция $w_2(r, \varphi)$ – частное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0.$$

Решение $v(r, \varphi)$ определяется рядом

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} V_{nm}(x, y),$$

где

$$C_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}}.$$

Собственные значения и собственные функции задачи $(\lambda_{xn}, X_n(x))$ приведены выше):

$$\lambda_{ym} = \left[\frac{\pi m}{l_y} \right]^2, \quad Y_m(y) = \sin \frac{\pi m y}{l_y}, \quad \|Y_m\|^2 = \frac{l_y}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda_{nm} = \lambda_{xn} + \lambda_{ym} = \left(\frac{\mu_{xn}^2}{l_x^2} + \frac{m^2 \pi^2}{l_y^2} \right),$$

$$V_{nm}(x, y) = X_n(x) \cdot Y_m(y) = \cos \frac{\pi(2n+1)x}{2l_x} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2l_y},$$

$$\|V_{nm}\|^2 = \|X_n\|^2 \cdot \|Y_m\|^2,$$

Решение $v(r, \varphi)$ определяется рядом

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \cos \sqrt{\lambda_{xn}} (l_x - x) \sin \frac{m\pi y}{l_y},$$

$$\begin{aligned}
f_{nm} &= \frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f(x, y) \cdot V_{nm}(x, y) dx dy = \\
&= \frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} Ax \sin \frac{2\pi y}{l_y} \cdot \cos \sqrt{\lambda_{xn}} (l_x - x) \sin \frac{m\pi y}{l_y} dx dy.
\end{aligned}$$

Аналитическое решение.

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= w_1(x, y) + w_2(x, y) + v(x, y) = \\
&= \left[u_1 - h(u_1 - u_{md}) \left(1 - \frac{x}{l_x} \right) \right] \cdot \left(1 - \frac{y}{l_y} \right) + \\
&+ \left[Ax \sin \frac{2\pi y}{l_y} - \left(hu_{md} + \frac{5\pi}{2l_x} \right) \left(1 - \frac{x}{l_x} \right) \right] \cdot \frac{y}{l_y} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} y + B_n \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (l_y - y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} l_y} \cdot \cos \sqrt{\lambda_{xn}} (l_x - x) + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \cos \sqrt{\lambda_{xn}} (l_x - x) \sin \frac{m\pi y}{l_y}.
\end{aligned}$$

Пример 12

В тонкой однородной прямоугольной пластинке ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$) на стороне $x = 0$ поддерживается постоянная температура $u(0, x) = u_1$, на стороне $x = l_x$ происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна $u_{md} = \text{const}$, сторона $y = 0$ контура теплоизолирована, а на стороне $y = l_y$ поддерживается постоянная нулевая температура. В пластине действует распределенный по пластине источник постоянной мощности

$$Q(x, y) = Axy.$$

Тепловой обмен между боковой поверхностью пластинки и окружающей средой отсутствует.

Найдите стационарное распределение температуры в пластинке.

Указания. Задача приводится к решению уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -Axy, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

при условиях

$$u|_{x=0} = u_1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_{md}) \right|_{x=l_x} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=l_y} = 0.$$

Возьмите, для начала, следующие значения параметров задачи (восстановите размерности):

$h = 0.5$ – коэффициент теплопроводности;

$l_x = 4, l_y = 6$ – длина и ширина пластинки;

$u_{md} = 40$ – температура среды;

$u_1 = 10$ – температура на стороне $x = 0$;

$A = 5$ – коэффициент.

Решение. Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы

$$u(r, \varphi) = w(r, \varphi) + v(r, \varphi).$$

Граничные условия не согласованы:

$$(-A :) \quad \left. \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|_{y=0} = g_3|_{x=0} = 0,$$

$$(-B :) \quad g_1|_{y=l_y} = u_1 \neq g_4|_{x=0} = 0,$$

$$(-C :) \quad \left. \frac{\partial g_2}{\partial x} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial g_3}{\partial x} + hg_3 \right|_{x=l_x} = 0,$$

$$(-D :) \quad g_2|_{y=l_y} = hu_{md} \neq \left. \frac{\partial g_4}{\partial x} + hg_4 \right|_{x=l_x} = 0.$$

Находим разности

$$\Delta_1 = - \left. \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|_{y=0} + g_3|_{x=0} = 0,$$

$$\Delta_3 = -g_1|_{y=l_y} + g_4|_{x=0} = -u_1,$$

$$\Delta_2 = -\frac{\partial g_2}{\partial x} \Big|_{y=0} + \frac{\partial g_3}{\partial x} + hg_3 \Big|_{x=l_x} = 0,$$

$$\Delta_4 = -g_2 \Big|_{y=l_y} + \frac{\partial g_4}{\partial x} + hg_4 \Big|_{x=l_x} = -hu_{md}.$$

Построим функции

$$\tilde{g}_3(x) = \Delta_1 + \frac{x}{l_x}(\Delta_2 - \Delta_1) = 0,$$

$$\tilde{g}_4(x) = \Delta_3 + \frac{x}{l_x}(\Delta_4 - \Delta_3) = -u_1 + (u_1 - hu_{md}) \frac{x}{l_x}.$$

Вспомогательную функцию, удовлетворяющую заданным граничным условиям, ищем в виде суммы двух функций

$$w(r, \varphi) = w_1(r, \varphi) + w_2(r, \varphi),$$

где $w_1(x, y)$ – вспомогательная функция, удовлетворяющая согласованным граничным условиям

$$P_1[u]_{x=0} = g_1(y) = u_1,$$

$$P_2[u]_{x=l_x} = g_2(y) = hu_{md},$$

$$P_3[u]_{y=0} = g_3(x) - \tilde{g}_3(x) = 0,$$

$$P_4[u]_{y=l_y} = g_4(x) - \tilde{g}_4(x) = u_1 - (u_1 - hu_{md}) \frac{x}{l_x},$$

а $w_2(x, y)$ – частное решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям вида

$$P_1[u]_{x=0} = 0,$$

$$P_2[u]_{x=l_x} = 0,$$

$$P_3[u]_{y=0} = \tilde{g}_3(x) = 0,$$

$$P_4[u]_{y=l_y} = \tilde{g}_4(x) = -u_1 + (u_1 - hu_{md}) \frac{x}{l_x}.$$

Функция $w_1(r, \varphi)$ имеет вид

$$w_1(x, y) = g_1(y) \cdot \bar{X} + g_2(y) \cdot \bar{\bar{X}} + [g_3(x) - \tilde{g}_3(x)] \cdot \bar{Y} + [g_4(x) - \tilde{g}_4(x)] \cdot \bar{\bar{Y}} + \\ + A \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} + B \cdot \bar{X} \cdot \bar{\bar{Y}} + C \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{Y} + D \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{\bar{Y}},$$

где

$$\bar{X}(x) = 1 - \frac{hx}{hl_x + 1}, \quad \bar{\bar{X}}(x) = \frac{x}{hl_x + 1},$$

$$\bar{Y}(y) = -l_y + y, \quad \bar{\bar{Y}}(y) = 1,$$

$$B = -u_1, \quad D = -hu_{md}, \quad A = C = 0.$$

Следовательно, вспомогательная функция имеет вид

$$w_1(x, y) = u_1 - (u_1 - hu_{md}) \frac{x}{l_x}.$$

Функция $w_1(x, y)$ гармоническая, так как

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0.$$

Функция $w_2(x, y)$ строится в виде

$$w_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n Y_{1n}(y) + B_n Y_{2n}(y)\} \cdot X_n(x),$$

где λ_{xn} , $X_n(x)$ – собственные значения и собственные функции одномерной задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_{xn} = \left[\frac{\mu_{xn}}{l_x} \right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где μ_n – n -й корень уравнения $\tan \mu_x = -\frac{\mu_x}{l_x h}$.

$$X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad \|X_n\|^2 = \frac{1}{2} \left(l_x + \frac{h}{\lambda_{xn} + h^2} \right).$$

Решения $Y_{1n}(y)$ и $Y_{2n}(y)$ для заданных граничных условий имеют вид

$$Y_{1n}(y) = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} y}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} l_y}, \quad Y_{2n}(y) = -\frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (l_y - y)}{\sqrt{\lambda_n} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} l_y}.$$

Коэффициенты A_n и B_n определяем по формулам

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{l_x} \tilde{g}_4(x) X_n(x) dx = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{l_x} \left[-u_1 + (u_1 - hu_{md}) \frac{x}{l_x} \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x dx,$$

$$B_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{l_x} \tilde{g}_3(x) X_n(x) dx = 0,$$

$$w_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} y}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} l_y} \cdot \sin \sqrt{\lambda_n} x,$$

Функция $w_2(r, \varphi)$ – частное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0.$$

Решение $v(r, \varphi)$ определяется рядом

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} V_{nm}(x, y),$$

где

$$C_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}}.$$

Собственные значения и собственные функции задачи (λ_{xn} , $X_n(x)$ приведены выше):

$$\lambda_{my} = \left[\frac{\pi(2m+1)}{2l_y} \right]^2, \quad Y_m(y) = \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2l_y},$$

$$\|Y_m\|^2 = \frac{l_y}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\lambda_{nm} = \lambda_{xn} + \lambda_{ym} = \left(\frac{\mu_{xn}^2}{l_x^2} + \frac{m^2 \pi^2}{l_y^2} \right),$$

$$V_{nm}(x, y) = X_n(x) \cdot Y_m(y) = \sin \sqrt{\lambda_n} x \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2l_y},$$

$$\|V_{nm}\|^2 = \|X_n\|^2 \cdot \|Y_m\|^2.$$

Решение $v(r, \varphi)$ определяется рядом

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin \sqrt{\lambda_n} x \cos \frac{\pi(2m+1)}{2l_y} y,$$

$$f_{nm} = \frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f(x, y) \cdot V_{nm}(x, y) dx dy =$$

$$= \frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} Axy \cdot \sin \sqrt{\lambda_n} x \cdot \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2l_y} dx dy.$$

Аналитическое решение

$$u(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) + v(x, y) =$$

$$= u_1 - (u_1 - hu_{md}) \frac{x}{l_x} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} y}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} l_y} \cdot \sin \sqrt{\lambda_n} x +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin \sqrt{\lambda_n} x \cdot \cos \frac{\pi(2m+1)}{2l_y} y.$$

Пример 13

Найти потенциал поля точечного электрического заряда, помещенного над идеально проводящей заземленной плоскостью $z = 0$ и вычислить плотность поверхностных индуцированных зарядов. Написать решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа в полупространстве $z \geq 0$ [14].

Решение. Пусть ось Oz направлена в то полупространство, в котором находится заряд, а плоскость Oxy совпадает с заземленной плоскостью $z = 0$. Воспользуемся методом электростатических отображений.

Потенциал электростатического поля одиночного точечного заряда q , помещенный в точку $P(x_q, y_q, z_q)$, в неограниченном пространстве описывается формулой

$$u_0 = \frac{q}{r_0},$$

где $r_0 = MP = \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2}$, $M(x, y, z)$ – точка наблюдения. Отметим, что приведенная формула является решением уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ с граничным условием $u(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ в случае $u = u(r)$.

Отображая зеркально в плоскости Oxy точечный заряд q , получим в точке $Q(x_q, y_q, -z_q)$ точечный заряд величиной $-q$, потенциал которого в неограниченном пространстве равен $-q/r_1$. Очевидно, что заряды находят на одинаковом расстоянии от плоскости, а их потенциалы на ней компенсируют друг друга, т.е.

$$z = 0: \frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + z_q^2}}.$$

Воспользовавшись принципом суперпозиции, получаем выражение для потенциала в данной задаче

$$u = q \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Поверхностная плотность зарядов

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{q}{2\pi} \frac{z_q}{\left((x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + z_q^2 \right)^{3/2}}.$$

Для нахождения решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа в полупространстве $z \geq 0$

$$\Delta u = 0, \quad u|_{z=0} = f(x, y)$$

воспользуемся функцией источника или функцией Грина (более подробно см. [7,9,10,12,14]).

В общем трехмерном случае функция источника $G(M, P)$ первой краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = -4\pi\rho$ определяется следующим образом:

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_0} + v(M, P),$$

где $v(M, P)$ – функция, регулярная всюду в рассматриваемой области V с границей S . На границе S функция G должна удовлетворять условию $G|_S = 0$. Следовательно, определение функции источника G в некоторой области V сводится к решению первой краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta v = 0$ в области V с граничным условием $v|_S = -(4\pi r_0)^{-1}$.

Если функция G известна, то решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = -F$ в V с граничным условием $u|_S = f$ может быть записано в интегральной форме

$$u(M) = -\int_S \frac{\partial G}{\partial n_P} f(P) dS_P + \int_V G(M, P) F(P) dV_P,$$

где \vec{n} – вектор внешней нормали.

В рассматриваемом случае

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right),$$

а решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа в полупространстве $z \geq 0$ определяется формулой

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2z}{\left((\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^2 + (y - y_q)^2 + z_q^2 \right)^{3/2}} f(\mathbf{x}_q, y_q) dy_q.$$

Задачи

В данном разделе приведены задачи для самостоятельного решения. В качестве дополнительных упражнений выбирайте задачи из различных сборников задач по уравнениям математической физики, например [14–18].

В задачах 1 – 5 тонкая однородная прямоугольная пластина лежит в плоскости xy . Плоскости пластины теплоизолированы, а на боковых гранях температура задается функциями $u(x, y)|_{\Gamma}$, значения которых приводятся ниже.

(a) Найти распределение температуры в пластине.

(b) Определить температуру во внешних точках

$P_1\left(x = \frac{\pi}{2} - 1, y = 0\right)$ и $P_2\left(x = \frac{\pi}{2} + 1, y = 0\right)$ с точностью 10^{-4} .

1. $u|_{y=\frac{\pi}{2}} = x^2$, $u|_{y=-\frac{\pi}{2}} = u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$.

2. $u|_{y=\frac{\pi}{2}} = u|_{y=-\frac{\pi}{2}} = \cos 2x$, $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$.

3. $u|_{y=\frac{\pi}{2}} = x^2$, $u|_{y=-\frac{\pi}{2}} = 0.8x^2$, $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$.

4. $u|_{y=\frac{\pi}{2}} = x^2 + \cos 2x$, $u|_{y=-\frac{\pi}{2}} = u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$.

5. $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = (y + \pi/2)^2$, $u|_{y=\frac{\pi}{2}} = u|_{y=-\frac{\pi}{2}} = 0$.

В задачах 6 и 7 тонкая однородная электропроводящая прямоугольная пластина лежит в плоскости xy . Плоскости пластины электроизолированы, а на боковых гранях электростатический потенциал задается функциями $u(x, y)|_{\Gamma}$, значения которых приводятся ниже.

(a) Найти электрический потенциал в пластине.

(b) Найти потенциал во внешних точках $P_1\left(x = \frac{\pi}{2} - 1, y = 0\right)$ и

$P_2\left(x = \frac{\pi}{2} + 1, y = 0\right)$ с точностью 10^{-4} .

$$6. u|_{y=\frac{\pi}{2}} = u|_{y=-\frac{\pi}{2}} = x^2 - x, u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

$$7. u|_{y=-\frac{\pi}{2}} = x^2, u|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0.7x, u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

В задачах 8 и 9 у бесконечного цилиндра прямоугольного сечения ось симметрии параллельна оси z . На боковой поверхности цилиндра электростатический потенциал задается функциями $u(x, y)|_{\Gamma}$, значения которых приводятся ниже.

(а) Найти электростатический потенциал внутри цилиндра.

(б) Найти потенциал во внешних точках $P_1\left(x = \frac{\pi}{2} - 1, y = 0\right)$ и

$P_2\left(x = \frac{\pi}{2} + 1, y = 0\right)$ с точностью 10^{-4} .

$$8. u|_{y=\frac{\pi}{2}} = u|_{y=-\frac{\pi}{2}} = u|_{y=-\frac{\pi}{2}} = 3x^2, u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

$$9. u|_{y=\frac{\pi}{2}} = \cos 2x - 2x, u|_{y=-\frac{\pi}{2}} = u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

10. Найти равновесное распределение температуры в бесконечно длинном цилиндре прямоугольного сечения, с длинной граней $0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y$:

а) на боковой поверхности $x = l_x$ поддерживается постоянная температура T_0 , на остальных поверхностях – нулевая температура.

$$\text{Ответ. } u(x, y) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \frac{\sinh[(2n+1)\pi x / l_y]}{\sinh[(2n+1)\pi l_x / l_y]} \sin \frac{n\pi y}{l_y};$$

б) написать аналогичное решение (не решая уравнение методом Фурье), если на поверхности $y = l_y$ задана постоянная температура T_0 , а на остальных трех поверхностях поддерживается нулевая температура;

с) решить, если на поверхностях $x = l_x$ и $y = l_y$ задана постоянная температура T_0 , а на $x = 0$ и $y = 0$ – нулевая.

11. Найти стационарное распределение температуры в кубе с длиной ребра l , если на грани $z = 0$ задана постоянная температура T_0 , а остальные 5 граней находятся при нулевой температуре.

Указание. Решить трехмерное уравнение Лапласа, используя метод Фурье, раскладывая T_0 в двойной ряд Фурье по функциям

$$\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi y}{l}.$$

12. Найти стационарное распределение температуры в тонкой однородной прямоугольной пластине ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$), если стороны $x = 0$ и $x = l_x$ поддерживаются при температуре

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l_y} y, \text{ сторона } y = 0 \text{ при температуре } u = u_1 \text{ и сторона } y = l_y$$

– при температуре $u = u_2$.

Указание. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l_x} = u_1 + (u_2 - u_1)y/l_y, \quad u(x, 0) = u_1, \quad u(x, l_y) = u_2.$$

Ответ. $u(x, y) = w(x, y) = u_1 + (u_2 - u_1)y/l_y$.

13. Найти стационарное распределение температуры в тонкой однородной прямоугольной пластине ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$), если стороны $x = 0$ и $y = 0$ поддерживаются при нулевой температуре, сторона $x = l_x$ теплоизолирована и на стороне $y = l_y$ задана температура

$$u(x, l_y) = \sin \left(\frac{5\pi x}{2l_x} \right).$$

Указание. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l_x, y) = 0, \quad u(x, l_y) = \sin \frac{5\pi x}{2l_x}.$$

Ответ.

$$u(x, y) = w(x, y) + v(x, y) = \frac{y}{l_y} \cdot \sin \frac{5\pi x}{2l_x} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{50l_y^2}{m\pi [25l_y^2 + 4m^2l_x^2]} \sin \frac{5\pi x}{2l_x} \sin \frac{m\pi y}{l_y}.$$

14. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольной области $0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$ с граничными условиями $u(l_x, y) = \sin^2(\pi y / l_y)$ и $u = 0$ на остальных границах.

15. Найти стационарное распределение температуры в тонкой однородной прямоугольной пластине ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$), если на границах $x = 0$, $x = \pi$ заданы тепловые потоки $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \sin y$,

$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = \sin 5y$, а на двух других границах задана температура

$$u(x, 0) = \cos x, \quad u(x, \pi) = \cos 3x.$$

Ответ.

$$u(x, y) = \left(x - \frac{x^2}{2\pi}\right) \sin y + \frac{x^2}{2\pi} \sin 5y + \left(1 - \frac{y}{\pi}\right) \cos x + \frac{y}{\pi} \cos 3x + \sum_{n=0}^{\infty} [C_{n1} \sin y + C_{n5} \sin 5y] \cos nx + \sum_{m=1}^{\infty} [C_{1m} \cos x + C_{3m} \cos 3x] \sin my,$$

$$C_{01} = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1\right), \quad C_{n1} = \frac{2}{\pi n^2 (n^2 + 1)}, \quad C_{05} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{25} - \frac{\pi^2}{6}\right),$$

$$C_{n5} = (-1)^{n+1} \frac{50}{\pi n^2 (n^2 + 25)}, \quad C_{1m} = -\frac{2}{\pi m (m^2 + 1)}, \quad C_{3m} = (-1)^m \frac{18}{\pi m (m^2 + 9)}.$$

16. Найти стационарное распределение температуры в тонкой однородной прямоугольной пластине ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$), если на сторонах $y = l_y$ и $x = 0$ задана нулевая температура, сторона $y = 0$ теплоизолирована и сторона $x = l_x$ поддерживается при температуре

$$u(l_y, x) = \cos \frac{3\pi y}{2l_y}.$$

Ответ.

$$u(x, y) = 1 - \frac{x}{l_x} \left(1 - \cos \frac{3\pi y}{2l_y} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{\cosh \sqrt{\lambda_n} y}{\cosh \sqrt{\lambda_n} l_y} \sin \frac{n\pi x}{l_x} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{18l_x^2}{n\pi [4n^2 l_y^2 + 9l_x^2]} \sin \frac{n\pi x}{l_x} \cos \frac{3\pi y}{2l_y}.$$

17. Решить краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

$$u(0, y) = u(x, 0) = u_1, \quad u(l_x, y) = u(x, l_y) = u_2.$$

Ответ. $u(x, y) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l_x} + 2(u_2 - u_1) \times$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi \cdot \sinh \sqrt{\lambda_n} l_y} \left\{ \sinh \sqrt{\lambda_n} y + (-1)^n \sinh \sqrt{\lambda_n} (l_y - y) \right\} \sin \frac{n\pi x}{l_x}.$$

18. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -Q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad u(l_x, y) = u(x, l_y) = u_0$$

для точечного источника тепла в точке (x_0, y_0) ($0 < x_0 < l_x, 0 < y_0 < l_y$).

Ответ. $u(x, y) = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l_x} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2l_y},$

$$C_{nm} = \frac{16Ql_x l_y}{\pi^2 [(2n+1)^2 l_y^2 + (2m+1)^2 l_x^2]} \cos \frac{(2n+1)\pi x_0}{2l_x} \cos \frac{(2m+1)\pi y_0}{2l_y}.$$

19. Найти стационарное распределение температуры в бесконечном цилиндре прямоугольного сечения ($0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y$), если заданы два одинаковых постоянных тепловых потока: один входящий на стороне $y = 0$, а другой выходящий на $x = 0$. Две остальные поверхности – теплоизолированы.

Указание. Краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = -\frac{Q}{\kappa l_y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l_x, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{Q}{\kappa l_x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, l_y) = 0.$$

Условие существования решения

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_0^{l_x} [g_3(x) + g_4(x)] dx + \int_0^{l_y} [g_1(x) + g_2(x)] dx = 0.$$

Ответ. $u(x, y) = \frac{Q}{2\kappa l_x l_y} [-x(2l_x - x) + y(2l_y - y)].$

20. Найти стационарное распределение температуры в тонкой однородной прямоугольной пластине ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$), если на одной из сторон задан тепловой поток Q , а остальные стороны поддерживаются при постоянной температуре u_0 .

Указание. Краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

$$u(0, y) = u(l_x, y) = u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, l_y) = \frac{Q}{\kappa}.$$

Ответ.

$$u(x, y) = u_0 + \frac{4Ql_x}{\kappa\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{\sinh\left(\frac{(2k+1)l_x^{-1}\pi y}{l_x}\right)}{\cosh\left(\frac{(2k+1)l_x^{-1}\pi l_y}{l_x}\right)} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{l_x}\right).$$

21. Найти установившееся распределение температуры в тонкой однородной прямоугольной пластине ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$), если на границах задано условие теплообмена с окружающей средой температуры $u_{md} = \text{const}$, а в пластине находится постоянный однородный источник тепла Q .

Указание. Краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -Q, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_{md}) \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_{md}) \right|_{x=l_x} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} - h(u - u_{md}) \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} + h(u - u_{md}) \right|_{y=l_y} = 0.$$

Ответ. $u(x, y) = u_{md} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} X_n(x) Y_m(y),$

$$C_{nm} = - \frac{Q \left[\sqrt{\lambda_{xn}} \sin \sqrt{\lambda_{xn}} l_x + h \left(1 - \cos \sqrt{\lambda_{xn}} l_x \right) \right]}{\|V_{nm}\|^2 \lambda_{nm} \sqrt{\lambda_{xn} \lambda_{ym}} \left(\lambda_{xn} + h^2 \right) \left(\lambda_{ym} + h^2 \right)} \times$$

$$\times \left[\sqrt{\lambda_{ym}} \sin \sqrt{\lambda_{ym}} l_y + h \left(1 - \sin \sqrt{\lambda_{ym}} l_y \right) \right].$$

22. Найти установившееся распределение температуры в тонкой однородной прямоугольной пластине ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$), если задано условие теплообмена с окружающей средой температуры $u_{md} = \text{const}$ на границах $x = 0$ и $x = l_x$. Две других стороны, $y = 0$ и $y = l_y$, теплоизолированы. В пластине есть источник тепла

$$Q(x, y) = A \cos(\pi l_x^{-1} x) \cos(\pi l_y^{-1} y).$$

Указание. Краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -A \cos(\pi l_x^{-1} x) \cos(\pi l_y^{-1} y), \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_{md}) \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_{md}) \right|_{x=l_x} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=l_y} = 0.$$

Ответ.

$$u(x, y) = u_{md} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{xn} + h^2}} \left[\sqrt{\lambda_{xn}} \cos \sqrt{\lambda_{xn}} x + h \sin \sqrt{\lambda_{xn}} x \right] \cos(\pi l_y^{-1} y),$$

$$C_{n1} = \frac{2A l_y^2 l_x \sqrt{\lambda_{xn}} \left(\lambda_{xn} + h^2 \right)}{\left[l_x \left(\lambda_{xn} + h^2 \right) + 2h \right] \left(\pi^2 + \lambda_{xn} l_y^2 \right) \left(\pi^2 - \lambda_{xn} l_x^2 \right)} \times$$

$$\times \left[\sin \sqrt{\lambda_{xn}} l_x - h l_x \left(1 + \cos \sqrt{\lambda_{xn}} l_x \right) \right].$$

23. Найти установившееся распределение температуры в тонкой однородной прямоугольной пластине ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$), если задано условие теплообмена с окружающей средой температуры $u_{md} = \text{const}$ на границе $x = 0$, граница $x = l_x$ теплоизолирована и на сторонах $y = 0$ и $y = l_y$ задана температура

$$u(x, 0) = u_1, \quad u(x, l_y) = \sin \frac{5\pi x}{2l_x}.$$

В пластине расположен источник тепла $Q(x, y) = Ax \sin(2\pi y/l_y)$.

Указание. Краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -Ax \sin \frac{2\pi y}{l_y}, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_{md}) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_x} = 0, \quad u \Big|_{y=0} = u_1, \quad u \Big|_{y=l_y} = \sin \frac{5\pi x}{2l_x}.$$

Ответ.

$$u(x, y) = \left[u_1 - h(u_1 - u_{md}) \left(1 - \frac{x}{l_x} \right) \right] \left(1 - \frac{y}{l_y} \right) +$$

$$+ \left[Ax \sin \frac{2\pi y}{l_y} - \left(hu_{md} + \frac{5\pi}{2l_x} \right) \left(1 - \frac{x}{l_x} \right) \right] \frac{y}{l_y} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sinh \sqrt{\lambda_n} y + B_n \text{sh} \sqrt{\lambda_n} (l_y - y)}{\sinh \sqrt{\lambda_n} l_y} \cos \sqrt{\lambda_{xn}} (l_x - x) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \cos \sqrt{\lambda_{xn}} (l_x - x) \sin \frac{m\pi y}{l_y},$$

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \left(hu_{md} + \frac{5\pi}{2l_x} \right) \int_0^{l_x} \left(1 - \frac{x}{l_x} \right) \cos \sqrt{\lambda_n} (l - x) dx,$$

$$B_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} h(u_1 - u_{md}) \int_0^{l_x} \left(1 - \frac{x}{l_x} \right) \cos \sqrt{\lambda_n} (l - x) dx,$$

$$C_{nm} = \frac{1}{\lambda_{nm} \|V_{nm}\|^2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} Ax \sin \frac{2\pi y}{l_y} \cdot \cos \sqrt{\lambda_{xn}} (l_x - x) \sin \frac{m\pi y}{l_y} dx dy,$$

$$\|X_n\|^2 = \frac{1}{2} \left(l_x + \frac{h}{\lambda_{xn} + h^2} \right), \quad \|V_{nm}\|^2 = \frac{l_y}{4} \left(l_x + \frac{h}{\lambda_{xn} + h^2} \right).$$

24. Найти установившееся распределение температуры в тонкой однородной прямоугольной пластине ($0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$), если задано условие теплообмена с окружающей средой температуры $u_{md} = \text{const}$ на стороне $x = l_x$, сторона $y = 0$ – теплоизолирована, сторона $y = l_y$ поддерживается при постоянной температуре $u(0, x) = u_1$, а сторона $y = 0$ – при нулевой. Источник тепла в пластине – $Q(x, y) = Axy$.

Указание. Краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -Axy, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y,$$

$$u|_{x=0} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_{md}) \Big|_{x=l_x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=l_y} = 0.$$

Ответ.

$$u(x, y) = u_1 - (u_1 - hu_{md}) \frac{x}{l_x} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\cosh \sqrt{\lambda_n} y}{\cosh \sqrt{\lambda_n} l_y} \sin \sqrt{\lambda_n} x +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin \sqrt{\lambda_n} x \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2l_y},$$

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{l_x} \left[-u_1 + (u_1 - hu_{md}) \frac{x}{l_x} \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x dx, \quad \|V_{nm}\|^2 = \frac{l_y}{4} \left(l_x + \frac{h}{\lambda_{xn} + h^2} \right),$$

$$C_{nm} = \frac{1}{\lambda_{nm} \|V_{nm}\|^2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} Axy \sin \sqrt{\lambda_n} x \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2l_y} dx dy,$$

$$\|X_n\|^2 = \frac{1}{2} \left(l_x + \frac{h}{\lambda_{xn} + h^2} \right).$$

Библиографический список

1. Тамм И. Е. Основы теории электричества. Изд. 10-е, испр. М.: Наука, 1989. 504 с.
2. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. Ч. 1. Микроскопическая теория. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 736 с.
3. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. Ч. 2. Теория электромагнитных явлений в веществе. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 848 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. Изд. 8-е, стереотипное. М.: Физматлит, 2012. 536 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. V. Статистическая физика. Ч. 1. Изд. 5-е. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. Изд. 5-е. М.: Физматлит, 2006. 736 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798с.
8. Очан Ю.С. Методы математической физики М.: Высшая школа, 1965. 384 с.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Изд. 5-е, испр. М.: Наука, 1988. 512 с.
10. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001. 400 с.
11. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.
12. Henner V., Belozerova T., Forinash K. Mathematical Methods in Physics. Wellesley: A K Peters Ltd., 2009. 848 p.
13. Henner V., Belozerova T., Khenner M. Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 2013. 623 p.

14. Будаk Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 2003. 683 с.
15. Сборник задач по уравнениям математической физики / ред. В.С. Владимирова. Изд. 4-е. М.: Физматлит, 2003. 288 с.
16. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1973. 128 с.
17. Очан Ю.С. Сборник задач по методам математической физики. М.: Высшая школа, 1973. 196 с.
18. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 640 с.

Учебное издание

**Алабужев Алексей Анатольевич
Белозерова Татьяна Сергеевна
Хеннер Виктор Карлович**

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА**

**ЧАСТЬ I
ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ**

Учебно-методическое пособие

Редактор *Л. Л. Савенкова*
Корректор *Л. И. Иванова*
Компьютерная верстка *А. А. Алабужева*

Подписано в печать 24.03.2016. Формат 60×84/16
Усл. печ. л. 5,93. Тираж 100 экз. Заказ ____

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета.
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография ПГНИУ.
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

