

А.А. Алабужев, Т.С. Белозерова, В.К. Хеннер

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Часть II

КРИВОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

$$\Delta U(\mathbf{r}, \vartheta) = 0,$$

$$U_1 - U_2 \Big|_{r=a} = 0,$$

$$\varepsilon_1 U_{1r} - \varepsilon_2 U_{2r} \Big|_{r=a} = 0.$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**А. А. Алабужев, Т. С. Белозерова, В. К. Хеннер**

# **МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

## **УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА**

Часть II  
**КРИВОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ**

*Допущено методическим советом  
Пермского государственного национального  
исследовательского университета в качестве  
учебного пособия для студентов, обучающихся  
по направлениям подготовки бакалавров «Физика»,  
«Прикладная математика и физика», «Нанотехнологии  
и микросистемная техника», «Радиофизика»  
и по направлению подготовки магистров  
«Физика»*



Пермь 2016

УДК 517.58  
ББК 22.311  
А 45

**Алабужев А. А.**

А 45 Методы математической физики. Уравнения эллиптического типа: учеб.-метод. пособие: в 2 ч. / А. А. Алабужев, Т. С. Белозерова, В. К. Хеннер; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2016. – Ч. II: Криволинейная система координат. – 92 с.

ISBN 978-5-7944-2695-3 (Ч. II)

ISBN 978-5-7944-2693-9

В данном пособии подробно рассматриваются важнейшие уравнения эллиптического типа – уравнения Лапласа и Пуассона – в криволинейной (полярной, цилиндрической, сферической) системе координат. Основное внимание уделяется физическим задачам, математическая постановка которых содержит уравнения данного вида.

Цель пособия – помочь студентам физических и математических специальностей в изучении теории дифференциальных уравнений в частных производных, приводящих к уравнениям Лапласа и Пуассона, в определении методов решения таких уравнений в криволинейной системе координат и самостоятельном решении задач по моделированию различных физических явлений и процессов.

Ил. 11. Библиогр. 9 назв.

**УДК 517.58**  
**ББК 22.311**

*Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Пермского государственного национального исследовательского университета*

*Рецензенты:* лаборатория физики и механики мягкого вещества Ин-та механики сплошных сред УрО РАН (рецензент – зав. лабораторией, д. ф.-м. н., проф. **Ю. Л. Райхер**); к. ф.-м. н., доц. кафедры общей физики Перм. нац. исслед. политехн. ун-та **А. В. Перминов**

ISBN 978-5-7944-2695-3 (Ч. II)  
ISBN 978-5-7944-2693-9

© ПГНИУ, 2016

© Алабужев А.А., Белозерова Т.С.,  
Хеннер В. К., 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Метод Фурье для решения уравнения Лапласа в полярных координатах .....	5
2. Внутренняя задача для уравнения Лапласа в круге.....	7
3. Внешняя задача для уравнения Лапласа для круга.....	13
4. Уравнение Лапласа для краевой задачи в кольце.....	14
5. Краевая задача для уравнения Лапласа в круговом секторе.....	18
6. Пример движения жидкости в цилиндре как двумерная задача Неймана.....	19
7. Уравнение Пуассона: общие замечания, простой случай.....	22
8. Уравнение Пуассона: более общий случай.....	27
9. Интеграл Пуассона .....	33
10. Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат.....	38
11. Однородные граничные условия на боковой поверхности.....	40
11.1. Пример однородного граничного условия на внешней поверхности .....	45
12. Однородные граничные условия на торцах цилиндра.....	50
13. Пример однородных граничных условий на торцах цилиндра..	56
14. Применение функций Бесселя для решения уравнений Лапласа и Пуассона в круговой области.....	58
15. Уравнение Пуассона с однородными граничными условиями в полярной системе координат.....	62
16. Уравнение Лапласа и Пуассона в сферической системе координат.....	67
17. Задачи.....	71
Библиографический список.....	92

## Введение

Решения эллиптических уравнений для простых областей, таких как круг, сфера, цилиндр, может быть получено методом разделения переменных (методом Фурье) [1–7]. В первой части [1] рассматривались решения в прямоугольной (декартовой) системе координат. Все эти задачи важны с точки зрения физических приложений. Метод разделения переменных приводит к краевой задаче Штурма-Лиувилля, решения которой представляются различными типами специальных функций [2,6,8–11]. В пособии также рассматриваются несколько плоских задач, обладающих осевой симметрией. Решения этих задач содержит простые тригонометрические функции полярного угла и степенные (логарифмические) функции радиуса.

В качестве дополнительных упражнений выбирайте задачи из различных сборников задач по уравнениям математической физики, например, [12–15].

Авторы выражают свою искреннюю признательность Сергею Викторовичу Шкляеву за его огромный вклад в создание данного пособия.

# 1. Метод Фурье для решения уравнения Лапласа в полярных координатах

В полярных координатах  $(r, \varphi)$  лапласиан  $\Delta$  имеет вид

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \equiv \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2} \nabla_\varphi^2, \quad (1.1)$$

где введены радиальная и угловая части градиента.

Будем искать частные решения уравнения Лапласа

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.2)$$

методом разделения переменных.

Подставляя  $u(r, \varphi)$  в форме

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \quad (1.3)$$

в уравнение Лапласа и разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{r^2 \nabla_r^2 R}{R} = -\frac{\nabla_\varphi^2 \Phi}{\Phi}, \quad \nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \nabla_\varphi^2 = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Ввиду того, что первый член не зависит от  $\varphi$ , а второй не зависит от  $r$ , каждый из членов должен быть равен некоторой константе (постоянная разделения переменных), которую обозначим  $p$ :

$$\frac{r^2 \nabla_r^2 R}{R} = -\frac{\nabla_\varphi^2 \Phi}{\Phi} \equiv p. \quad (1.4)$$

Отсюда получаем уравнения отдельно для функций  $R(r)$  и  $\Phi(\varphi)$ :

$$\Phi'' + p\Phi = 0, \quad (1.5)$$

$$r^2 R'' + rR' - pR = 0. \quad (1.6)$$

Рассмотрим сначала уравнение для функции  $\Phi(\varphi)$ . Будем считать, что переменная  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$  (случай, когда переменная  $\varphi$  изменяется в меньшей области:  $0 \leq \varphi < \alpha < 2\pi$ , соответствует решению уравнения Лапласа в секторе и будет рассмотрен в п.5). Если  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , то однозначное решение должно быть периодически по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Следовательно, для определения функ-

ции  $\Phi(\varphi)$  получаем одномерную задачу Штурма-Лиувилля с условиями периодичности

$$\Phi'' + p\Phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (1.7)$$

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \text{ для любого } \varphi. \quad (1.8)$$

Периодичность имеет место только тогда, когда  $p$  целое и положительное число, т.е. задача для  $\Phi(\varphi)$  обладает дискретным спектром собственных значений

$$p = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

с собственными функциями

$$\Phi = \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi. \end{cases} \quad (1.9)$$

С учетом найденных значений  $\lambda_n$  получаем уравнение для  $R(r)$ :

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0. \quad (1.10)$$

Это уравнение Эйлера, и общее решение его может быть записано в виде

$$\begin{aligned} R = R_n(r) &= C_1 r^n + C_2 r^{-n}, \quad n \neq 0, \\ R_0(r) &= C_1 + C_2 \ln r, \quad n = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

Следовательно, построены следующие серии частных решений уравнения Лапласа (1.2):

а)

$$u_n(r, \varphi) = r^n \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.12)$$

Эти решения ограничены при  $r \rightarrow 0$  и не ограничены на бесконечности. Общее решение уравнения Лапласа в круге  $0 \leq r \leq a$  записывается в виде разложения по этим решениям:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Слагаемое с  $n = 0$  удобнее записать как  $A_0 / 2$ , т.е.

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (1.13)$$

б)

$$u_n(r, \varphi) = \frac{1}{r^n} \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.14)$$

Эти решения ограничены на бесконечности и не ограничены при  $r \rightarrow 0$ . Они используются при решении уравнения Лапласа вне круга. Общее решение уравнения Лапласа вне круга ( $r \geq a$ ), ограниченное на бесконечности, может быть записано в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (1.15)$$

в) третья серия решений

$$1, \ln r, r^n \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \frac{1}{r^n} \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

неограниченна как при  $r \rightarrow 0$ , так и при  $r \rightarrow \infty$ . Она используется при решении уравнения Лапласа в круговом кольце  $a \leq r \leq b$ .

## 2. Внутренняя задача для уравнения Лапласа в круге

Рассмотрим сначала задачу Дирихле (первую краевую задачу) для круга (диска):

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{при } 0 \leq r < a, \quad (2.1)$$

$$u(r, \varphi)|_{r=a} = f(\varphi). \quad (2.2)$$

Используя граничные условия (2.1) для (1.12), получаем

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi). \quad (2.3)$$

Следовательно,  $a^n A_n$  и  $a^n B_n$  – коэффициенты Фурье функции  $f(\varphi)$  по системе тригонометрических функций  $\{\cos n\varphi, \sin n\varphi\}$ , которые вычисляются по формулам

$$A_n a^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad B_n a^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Таким образом, решение задачи Дирихле (первая краевая задача) для уравнения Лапласа имеет вид



$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (2.5)$$

Схожим образом можно получить решения второй и третьей краевых задач для уравнения Лапласа в круге.

**Пример 1.** Найти распределение температуры внутри круга радиуса  $r = a$ , если на его границе поддерживается постоянная температура  $T_0 = C_1 + C_2 \cos \varphi + C_3 \sin 2\varphi$ .

*Решение.* Очевидно, что для этого частного случая, ряд, определяемый уравнением (2.3), содержит три ненулевых слагаемых:  $A_0 = 2C_1$ ,  $aA_1 = C_2$ ,  $a^2B_2 = C_3$ . Следовательно, решение (2.5) имеет вид

$$T = C_1 + C_2 \frac{r}{a} \cos \varphi + C_3 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin 2\varphi.$$

Аналогичным образом можно получить решения второй и третьей краевых задач для уравнения Лапласа в круге. Прodelайте это в качестве самостоятельного упражнения и проверьте, что полученные формулы верны для двух следующих случаев: граничного условия Неймана и Робена (третья краевая задача).

**Задача Неймана (вторая краевая задача)** для уравнения Лапласа с граничным условием

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = f(\varphi) \quad (2.6)$$

имеет решение

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^{n-1}} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + C, \quad (2.7)$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Напомним, что решение внутренней задачи Неймана существует только при условии

$$\int_{C_a} f dl = \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0 \quad (2.8)$$

(это условие необходимое и достаточное) и определяется с точностью до произвольной постоянной.

**Задача Робена (задача Ньютона, смешанная задача, третья краевая задача)** для уравнения Лапласа с граничным условием

$$\left( \frac{\partial u}{\partial r} + hu \right) \Big|_{r=a} = f(\varphi), \quad h = \text{const} \quad (2.9)$$

имеет решение

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+ah)a^{n-1}} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (2.10)$$

Коэффициенты в рядах (2.5), (2.7), (2.10) определяются по формулам (2.4).

Остановимся кратко на вопросе о сходимости рядов (2.5), (2.7), (2.10). Если граничная функция  $f(\varphi)$  абсолютно интегрируема, то ее коэффициенты Фурье, по крайней мере, ограничены, и, как видно из структуры указанных рядов, они будут в любой внутренней точке круга ( $r < a$ ) сходиться не хуже, чем геометрическая прогрессия со знаменателем  $q = r/a$ . При увеличении гладкости функции  $f(\varphi)$  сходимость указанных рядов улучшается. Эти функции могут быть почленно продифференцированы произвольное количество раз; при этом суммы удовлетворяют уравнению Лапласа, т.е. являются гармоническими функциями. Это утверждение верно и для всех задач, обсуждаемых ниже.

Важно подчеркнуть, что в случае кусочно-непрерывных граничных условий  $f(\varphi)$  решение краевой задачи существует и непрерывно приближает значения  $f(\varphi)$  в точках непрерывности этой функции.

**Пример 2.** Пусть  $u(r, \varphi) \Big|_{r=a} = \sin(\varphi/2)$  при  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $a = 10$ . Удерживая шесть первых слагаемых в решении (2.5), найдите температуру в нескольких точках круга:  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(2, \pi/18)$ ,  $P_3(3, \pi/18)$  в

полярных координатах (т.е.  $P_n(r, \varphi)$  – точка  $P_n$  с номером  $n$  и полярными координатами  $r$  и  $\varphi$ ).

*Решение.* Коэффициенты ряда Фурье (2.3) определяются формулами  $A_0 = 4/\pi$ ,  $A_n = 4/\left[\pi(1 - 4n^2)\right]$  (для  $n=1,2,\dots$ ), и  $B_n = 0$ . Следовательно, получаем решение

$$u(r, \varphi) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{4}{\pi(1 - 4n^2)} \cos n\varphi. \quad (2.11)$$

В точке  $P_1(0,0)$  температура  $u(0,0) = 2/\pi$  и ошибка округления из-за отбрасывания членов ряда равна нулю, потому что  $r = 0$ . В точке  $P_2(2, \pi/18)$ , где при сохранении первых шести членов ряда, ошибка округления составляет  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ , получаем  $u(2, \pi/18) = 0.5496$  и

$$\varepsilon \leq \left| \left(\frac{2}{10}\right)^7 \frac{4}{\pi(1 - 4 \cdot 7^2)} \frac{1}{1 - \frac{2}{10}} \right| \approx 0.5 \cdot 10^{-5}.$$

Суммарная погрешность  $\varepsilon + \varepsilon_1 \approx 10^{-4}$ .

Аналогично, в точке  $P_3(3, \pi/18)$ :  $u(3, \pi/18) = 0.5031$ ,  $\varepsilon \approx 10^{-4}$ , и  $\varepsilon + \varepsilon_1 \approx 2 \cdot 10^{-4}$ .

**Пример 3.** Найти температуру в точке  $P_2(2, \pi/18)$  предыдущего примера с точностью  $10^{-5}$ .

*Решение.* Постановка этой задачи противоположна задаче, рассмотренной в предыдущем примере. Сначала необходимо определить, сколько слагаемых необходимо оставить в сумме. Если оставим только два, то ошибка составит

$$\varepsilon \leq \left| \left(\frac{2}{10}\right)^3 \frac{4}{\pi(1 - 4 \cdot 3^2)} \frac{1}{1 - \frac{2}{10}} \right| \approx 10^{-3}.$$

Очевидно, что точность недостаточная. Соответственно, удерживая больше слагаемых, найдем, что при  $N = 6$  ошибка  $\varepsilon \approx 0.5 \cdot 10^{-5}$ . Следовательно, необходимо удерживать не менее шести слагаемых, чтобы достичь требуемой точности  $10^{-5}$ . В результате  $u(2, \pi/18) = 0.54956$ .

**Пример 4.** Рассмотрим следующую краевую задачу: пусть боковая поверхность бесконечно длинного однородного цилиндра радиуса  $r = a$  поддерживается при постоянной температуре

$$u(r, \varphi)|_{r=l} = \begin{cases} T_0, & 0 \leq \varphi < \pi, \\ -T_0, & \pi \leq \varphi < 2\pi, \end{cases} \quad (2.12)$$

при любом значении  $z$ . Найти равновесное распределение температуры внутри цилиндра.

*Решение.* Очевидно, что необходимо решить внутреннюю задачу Дирихле для круга. Решение этой задачи описывается функцией (2.5). Используя граничные условия (2.2), (2.3) и (2.12), легко определить, что

$$A_n = 0, B_{2k} = 0, B_{2k+1} = \frac{4T_0}{\pi(2k+1)}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

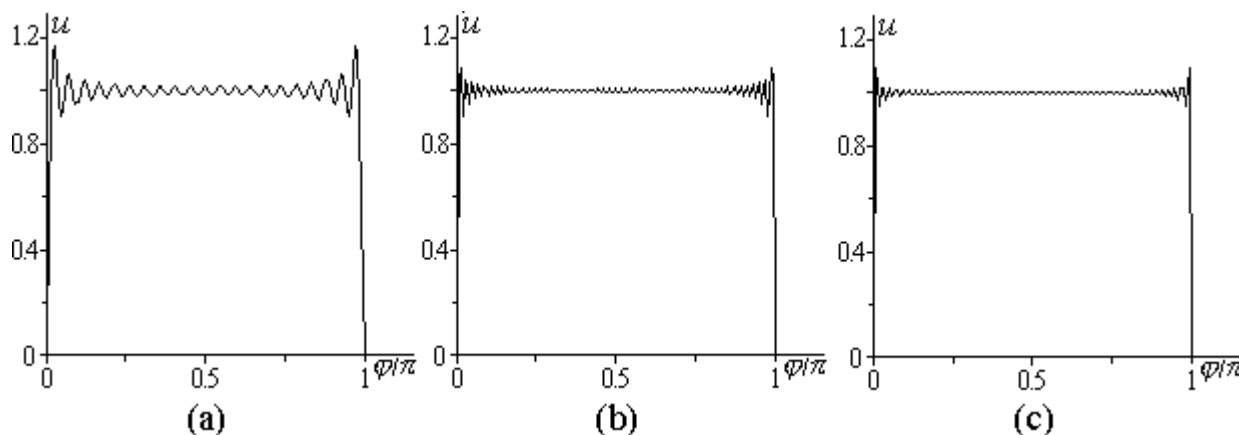


Рис. 1. Распределение температуры на окружности ( $a = 1$ ), полученное из (2.5) для различного количества слагаемых  $N$ ; (a)  $N = 20$ , (b)  $N = 50$ , (c)  $N = 100$

Численное суммирование ряда в уравнении (2.5) с  $N$  слагаемыми представлено на рис. 3.1, 3.2 и 3.3 в безразмерных переменных (длина измеряется в единицах радиуса  $a$ , температура – в единицах  $T_0$  (2.12))

). В силу симметрии задачи  $u(r, \pi - \varphi) = -u(r, \pi + \varphi)$  и можно искать решение только в половине области ( $\varphi \leq \pi$ ).

Рисунок 1 показывает, что температурное распределение на боковой поверхности цилиндра отличается при различных значениях  $N$ . Как видно из графиков, при  $\varphi \neq 0, \pi$  ряд сходится равномерно, но при приближении к этим граничным точкам, необходимо учитывать большее количество слагаемых для достижения такой же точности. Очевидно, что в точках разрыва  $\varphi = 0, \pi$  сумма ряда дает нулевое значение температуры.

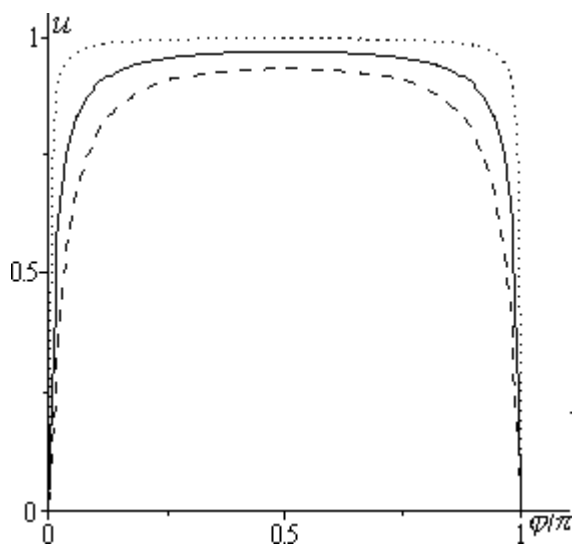


Рис. 2. Температура  $u(\varphi)$  при  $r = 0.9, 0.95, 0.99$  (штриховая, сплошная, пунктирная линии, соответственно),  $a = 1$

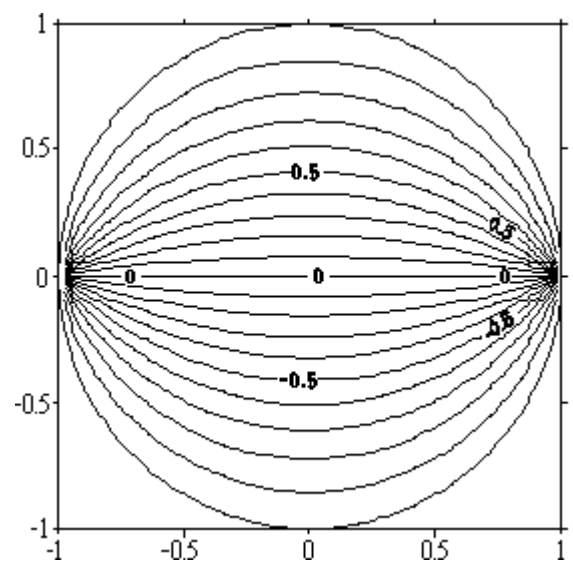


Рис. 3. Распределение температуры  $u$  внутри цилиндра ( $a = 1$ )

Ближе к поверхности ряд (2.5) сходится при любых значениях  $\varphi$ ; как показано на рис. 2, функция  $u(r, \varphi)$  является гладкой, включая  $r \rightarrow 1$ , где эта функция  $u(r, \varphi)$  становится кусочно-непрерывной (определяется условием (2.12)). Распределение температуры внутри тела представлено на рис. 3.

Отметим, что для кусочно-непрерывной граничной функции  $f(\varphi)$  ряд сходится медленнее, чем в случае непрерывной. Это становится очевидным, если учесть, что  $|B_n| \sim n^{-1}$  больших  $n$  для предыдущего примера (см. выражения (2.13)), но при этом  $|B_n| \sim n^{-2}$  в решении

(2.11), когда имеется разрыв первой производной при  $\varphi = 0$ . Очевидно так же, что  $|B_n| \sim n^{-3}$  (или меньший показатель степени  $n$ ) для бесконечно дифференцируемой функции  $f(\varphi)$ . Следовательно, для решения (2.11) необходимо удерживать большее количество слагаемых в случае кусочно-непрерывной функции для достижения заданной точности.

*Упражнение.* Решить пример 3 для случая непрерывных граничных условий  $u(r, \varphi)|_{r=a} = \sin(\varphi / 2)$  при  $0 < \varphi < \pi$  и  $u(r, \varphi)|_{r=a} = \cos(\varphi / 2)$  при  $\pi < \varphi < 2\pi$ . Найти температуру в точке  $P_2(2, \pi / 18)$  с точностью  $10^{-5}$ . Сколько слагаемых надо удерживать в сумме, чтобы достигнуть заданной точности?

*Упражнение.* Рассмотреть примеры разрывных граничных условий, например,  $u(r, \varphi)|_{r=a} = A$  при  $0 < \varphi < \pi$  и  $u(r, \varphi)|_{r=a} = B$  при  $\pi < \varphi < 2\pi$ . Используя различные значения постоянных  $A$  и  $B$ , проверить, сколько слагаемых надо удерживать, чтобы достичь заданной точности в некоторой точке  $P$ , в зависимости от разности  $|A - B|$ .

*Указание.* Используйте решение, полученное в примере 4. Также ниже см. пример 7.

### 3. Внешняя задача для уравнения Лапласа для круга

Задача формулируется как

$$\nabla^2 u = 0 \text{ для } r > a.$$

Используя соответствующее граничное условие, получаем решение (см. (1.14)):

**Задачи Дирихле** с граничным условием  $u|_{r=a} = f(\varphi)$

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (3.1)$$

**Задача Неймана** с граничным условием

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = f(\varphi) \quad (3.2)$$

имеет решение (см. (1.14)):

$$u(r, \varphi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{a^{n+1}}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + C, \quad (3.3)$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Опять напомним, что на плоскости внешняя задача Неймана разрешима лишь при условии

$$\int_{C_a} f dl = \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0,$$

и ее решение определяется с точностью до постоянного слагаемого.

**Задача Робена с граничным условием**

$$\left( \frac{\partial u}{\partial r} - hu \right) \Big|_{r=a} = f(\varphi) \quad (3.4)$$

(знак во втором слагаемом изменен с тем, чтобы этот член представлял собой производную по внешней нормали к границе области) имеет следующее решение (см. (1.14)):

$$u(r, \varphi) = -\frac{A_0}{2h} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+ah)r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (3.5)$$

Коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  в разложениях (3.1), (3.3) и (3.5) являются коэффициентами Фурье функции  $f(\varphi)$  и вычисляются по формулам (2.4).

Доказательство формул (3.1), (3.3) и (3.5) предлагается читателям в качестве *упражнений*.

#### 4. Уравнение Лапласа для краевой задачи в кольце

Разберем теперь решение краевой задачи для уравнения Лапласа внутри кругового кольца.

Рассмотрим сначала задачу Дирихле в кольце  $a < r < b$ :

$$\nabla^2 u = 0, \quad (4.1)$$

$$u|_{r=a} = f_1(\varphi), \quad u|_{r=b} = f_2(\varphi). \quad (4.2)$$

Решение этой задачи можно записать в виде разложения по частным решениям (1.16). Но вычисления значительно упрощаются, если при каждом  $n$  построить систему фундаментальных решений  $\{R_n^{(a)}(r), R_n^{(b)}(r)\}$  уравнения

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0, \quad (4.3)$$

удовлетворяющих однородным граничным условиям

$$R_n^{(a)}(a) = 0, \quad R_n^{(b)}(b) = 0.$$

Поскольку общее решение уравнения (4.3) имеет вид

$$R = C_1 + C_2 \ln r \quad \text{при } n = 0,$$

$$R = C_1 r^n + C_2 r^{-n} \quad \text{при } n \neq 0,$$

то подбирая коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$ , легко построим нужные решения. Они определяются с точностью до числового множителя, и их можно взять, например, в виде

$$R_0^{(a)}(r) = \ln \frac{r}{a}, \quad R_0^{(b)}(r) = \ln \frac{b}{r},$$

$$R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{2n} - a^{2n}}{r^n}, \quad R_n^{(b)}(r) = \frac{b^{2n} - r^{2n}}{r^n}, \quad n \neq 0.$$

Используя эти функции  $R_n^{(a)}$  и  $R_n^{(b)}$ , получаем систему частных решений уравнения Лапласа:

$$u_n^{(a)}(r, \varphi) = R_n^{(a)}(r) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad u_n^{(b)}(r, \varphi) = R_n^{(b)}(r) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad n \neq 0, \quad (4.4)$$

$$u_0^{(a)}(r, \varphi) = \ln \frac{r}{a}, \quad u_0^{(b)}(r, \varphi) = \ln \frac{b}{r}, \quad n = 0,$$

ограниченных внутри кольца и удовлетворяющих граничным условиям

$$u_0^{(a)} \Big|_{r=a} = 0, \quad u_0^{(b)} \Big|_{r=b} = 0. \quad (4.5)$$

Заметим, что

$$u_0^{(a)} \Big|_{r=b} \neq 0, \quad u_0^{(b)} \Big|_{r=a} \neq 0.$$



Теперь решение краевой задачи (4.1), (4.2) можно записать в виде разложения по этим частным решениям:

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{C_0}{2} \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n} - a^{2n} b^n}{(b^{2n} - a^{2n}) r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{2n} - r^{2n} a^n}{(b^{2n} - a^{2n}) r^n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi). \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в граничное условие  $u|_{r=a} = f_1(\varphi)$  при  $r = a$  и учитывая (4.5), получаем

$$\frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) = f_1(\varphi).$$

Отсюда находим  $C_n$  и  $D_n$ :

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad D_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \quad (4.7)$$

Аналогичным образом, подставляя (4.6) в граничное условие  $u|_{r=b} = f_2(\varphi)$  при  $r = b$ , находим коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ :

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \quad (4.8)$$

Таким образом, построив предварительно радиальные функции  $R_n^{(a)}$  и  $R_n^{(b)}$ , удовлетворяющие нужным однородным граничным условиям при  $r = a$  и  $r = b$ , нам удалось “развязать” граничные условия, заданные при  $r = a$  и при  $r = b$ .

Аналогичным образом можно поступать и при решении **других краевых задач** для уравнения Лапласа внутри кольца.

При построении радиальных функций  $R_n(r)$  для граничных условий второго рода следует иметь в виду, что при  $n = 0$  не существует двух линейно независимых решений уравнения (4.3), одно из которых удовлетворяет условию

$$\left. \frac{dR_0^{(a)}}{dr} \right|_{r=a} = 0,$$

а другое –

$$\left. \frac{dR_0^{(b)}}{dr} \right|_{r=b} = 0.$$

Обоим этим условиям удовлетворяет одно и то же решение  $R_0(r) \equiv 1$ . При  $n \neq 0$  нужную пару фундаментальных решений образуют функции

$$R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{2n} + a^{2n}}{r^n}, \quad R_n^{(b)}(r) = \frac{r^{2n} + b^{2n}}{r^n}, \quad n \neq 0.$$

Поэтому решение **задачи Неймана** внутри кольца  $a \leq r \leq b$ :

$$\nabla^2 u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = f_1(\varphi), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=b} = f_2(\varphi)$$

удобно записывать в виде ряда

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) = & \frac{C_0}{2} \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)'}(b)} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)'}(a)} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) + \text{const}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

коэффициенты которого определяются из граничных условий по формулам (4.7), (4.8) при  $n \neq 0$ , коэффициент  $C_0$  равен

$$C_0 = \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi = \frac{b}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi, \quad (4.10)$$

а const – произвольная постоянная. Равенство (4.10) противоречия при произвольных функциях  $f_1(\varphi)$  и  $f_2(\varphi)$  не содержит, поскольку оно соответствует условию разрешимости задачи Неймана:

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} dl = \int_0^{2\pi} \{bf_2(\varphi) - af_1(\varphi)\} d\varphi = 0.$$

Рассмотрим вопрос о сходимости полученных рядов. Рассмотрим, для примера, ряд (4.6). Поскольку при  $a < r < b$

$$\frac{r^{2n} - a^{2n}b^n}{b^{2n} - a^{2n}r^n} = \frac{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{2n}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}} \left(\frac{r}{b}\right)^n \leq \frac{1}{1 - \frac{a}{b}} \left(\frac{r}{b}\right)^n = \frac{b}{b-a} \left(\frac{r}{b}\right)^n$$

и

$$\frac{b^{2n} - r^{2n}a^n}{b^{2n} - a^{2n}r^n} \leq \left(\frac{a}{r}\right)^n,$$

ряды в (4.6) сходятся внутри кольца  $a < r < b$  не хуже, чем геометрические прогрессии. При увеличении гладкости граничных функций  $f_1(\varphi)$  и  $f_2(\varphi)$  скорость сходимости увеличивается.

## 5. Краевая задача для уравнения Лапласа в круговом секторе

Аналогичным образом можно решать краевые задачи внутри кругового сектора ( $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ) и кольцевого сектора ( $a \leq r \leq b$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ), если граничные условия на лучах  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \alpha$  однородные.

Рассмотрим к примеру краевую задачу внутри кругового сектора:

$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 < \varphi < \alpha \quad (5.1)$$

с такими граничными условиями:

$$u|_{r=a} = f(\varphi), \quad (5.2)$$

$$\left( \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \beta_1 u \right) \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \left( \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \beta_2 u \right) \Big|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.3)$$

Сначала найдем частные решения вида

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получаем для определения функции  $\Phi(\varphi)$  задачу Штурма-Лиувилля на отрезке  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ :

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0, \quad (\alpha_1 \Phi' - \beta_1 \Phi) \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad (\alpha_2 \Phi' - \beta_2 \Phi) \Big|_{\varphi=\alpha} = 0 \quad (5.5)$$

и задачу для определения  $R(r)$ :

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0, \quad 0 < r < a, \quad |R(0)| < \infty. \quad (5.6)$$

Задача (5.5) является стандартной задачей Штурма-Лиувилля на ограниченном интервале  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ , решение которой несколько раз обсуждалось ранее.

Ограниченное при  $r = 0$  решение уравнения (5.6) имеет вид

$$R(r) = Cr^{\sqrt{\lambda}}, \quad C = \text{const}.$$

Таким образом, построено семейство частных решений уравнения Лапласа, ограниченное при  $r = 0$ :

$$u_n(r, \varphi) = r^{\sqrt{\lambda_n}} \Phi_n(\varphi), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.7)$$

где  $\Phi_n(\varphi)$  и  $\lambda_n \geq 0$  – собственные функции и собственные значения задачи (5.5) для отрезка  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ . Поэтому общее решение уравнения Лапласа внутри кругового сектора можно записать в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{a}\right)^{\sqrt{\lambda_n}} \Phi_n(\varphi), \quad (5.8)$$

а коэффициенты  $C_n$  определяются из граничного условия (5.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(\varphi) = f(\varphi),$$

откуда

$$C_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_0^{\alpha} f(\varphi) \Phi_n(\varphi) d\varphi. \quad (5.9)$$

## 6. Пример движения жидкости в цилиндре как двумерная задача Неймана

Изучим безвихревое стационарное течение несжимаемой жидкости внутри цилиндра радиуса  $a$  с осью, параллельной  $Oz$ . В этом

случае скорость  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \equiv \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2} \nabla_\varphi^2$  является гра-

диентом скалярного потенциала  $u$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 u = 0.$$

Граничное условие для функции  $u$  на поверхности цилиндра  $S$  имеет вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f,$$

где функция  $f$ , определенная во всех точках  $S$ , является проекцией

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \equiv \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2} \nabla_\varphi^2$$

на  $\vec{n}$  – вектор внешней нормали к поверхности цилиндра.

Рассмотрим только двумерное течение, предполагая, что  $f$  не зависит от координаты  $z$ . В этом случае  $u$  и

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \equiv \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2} \nabla_\varphi^2$$

также не зависят от  $z$ , и уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (6.1)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r=a} = f(\varphi), \quad (6.2)$$

где  $f(\varphi)$  – заданная кусочно-непрерывная ограниченная функция при  $-\pi \leq \varphi < \pi$ . Как известно, эта задача имеет решение, только если  $f(\varphi)$  удовлетворяет условию

$$\int_l f(\varphi) dl = 0,$$

где интегрирование производится вдоль окружности длиной  $l$ , которая является сечением цилиндра плоскостью  $xu$ . Длина дуги  $dl$  связана с раствором  $d\varphi$  как

$$dl = a d\varphi,$$

т.е. последнее условие может быть переписано в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi = 0. \quad (6.3)$$

Функция  $u$  является ограниченной и периодической по  $\varphi$ :

$$u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi),$$

т.е. функция  $u(r, \varphi)$ , очевидно, может быть записана в виде бесконечного ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (6.4)$$

Для применения граничного условия (6.2), замечаем, что  $\vec{n} = (1, 0, 0)$  и  $\partial u / \partial n = \partial u / \partial r$ .

Затем, дифференцируя по  $r$  обе стороны уравнения (6.4) и полагая  $r = a$ , получаем

$$f(\varphi) = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n n a^{n-1} \cos n\varphi + B_n n a^{n-1} \sin n\varphi). \quad (6.5)$$

Это разложение функции  $f(\varphi)$  в ряд Фурье на интервале  $[-\pi, \pi]$ .

Это разложение не содержит свободного члена  $a_0/2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi$ , потому что в силу уравнения (6.3) этот интеграл равен нулю. Для других коэффициентов получаем

$$A_n = \frac{1}{n\pi a^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad (6.6)$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi a^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi. \quad (6.7)$$

Тот факт, что коэффициент  $A_0$  не определен (остается произвольным) согласуется со смыслом задачи: потенциал  $u(r, \varphi)$  может быть определен только с точностью до постоянной. Ряд (6.4) с коэффициентами (6.6) и (6.7) дает решение плоской задачи Неймана для круга (плоскопараллельное течение в цилиндре). Вычисляя градиент  $u(r, \varphi)$ , получим  $\vec{v}$  – скорость жидкости в любой точке цилиндра.

**Пример 5.** Определить движение жидкости при малоамплитудных поперечных колебаниях цилиндра радиуса  $r = a$  вдоль оси  $x$ :

$$x = x_0 + \varepsilon \cos(\omega t), \quad (6.8)$$

где  $\varepsilon$  и  $\omega$  – амплитуда и частота колебаний, соответственно.

*Решение.* При колебаниях, задаваемых условием Equation (6.8), скорость движения боковой поверхности цилиндра, т.е. поверхности раздела, будет

$$\vec{v}|_S = -\varepsilon\omega \sin \omega t \vec{e}_x. \quad (6.9)$$

Для малоамплитудных колебаний граничные условия можно снести на осредненное по времени положение поверхности цилиндра,  $r = a$ , так, что  $u_r = -\varepsilon\omega \sin \omega t \vec{n} \cdot \vec{e}_x = -\varepsilon\omega \sin \omega t \cos \varphi = f(\varphi, t)$ .

Очевидно, что ряд (6.5) будет содержать только слагаемое вида  $aA_1 = -\varepsilon\omega \sin \omega t$ , т.е. решение задачи можно представить как

$$u = -\varepsilon\omega r \cos \varphi \sin \omega t = -\varepsilon\omega x \sin \omega t.$$

Вычисляя градиент этого потенциала скорости, легко заметить, что получившаяся скорость жидкости совпадает со скоростью движения поверхности цилиндра (6.9). Физически это означает, что жидкость движется как твердое тело.

## 7. Уравнение Пуассона: общие замечания, простой случай

Обсудим вкратце способ отыскания решения уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 u = -f, \quad (7.1)$$

с неоднородным граничным условием

$$r = l: u = g(\varphi). \quad (7.2)$$

Далее рассматривается как внутренняя, так и внешняя задачи.

В данном разделе не строится общий формализм (см. п. 8 ниже), рассматривается лишь частный случай, встречающийся во многих практических приложениях.

Главная идея состоит в том, чтобы найти частное решение неоднородного уравнения (уравнения Пуассона) без учета граничных условий, добавив к нему затем решение уравнения Лапласа с тем, чтобы

удовлетворить требуемым граничным условиям, т.е. получить решение краевой задачи. Другими словами, функция  $u$  представляется в виде суммы двух функций,  $u = u_p + u_0$ , где  $u_p$  – частное решение уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 u_p = -f, \quad (7.3)$$

а  $u_0$  – решение уравнения Лапласа:

$$\nabla^2 u_0 = 0, \quad (7.4)$$

причем функция  $u$  должна удовлетворять необходимым граничным условиям, откуда следуют граничные условия для  $u_0$ :

$$r = l: \quad u_0 = g(\varphi) - u_p. \quad (7.5)$$

Краевая задача (7.4), (7.5) была подробно рассмотрена в п. 2–4, поэтому уделим основное внимание решению уравнения (7.3). Таким образом, вопрос состоит в том, чтобы найти частное решение уравнения Пуассона, которое ограничено в центре (внутренняя задача) или на бесконечности (внешняя задача) без учета каких бы то ни было граничных условий при  $r = l$ . Необходимо подчеркнуть, что изменение типа граничных условий для уравнения Пуассона (7.1) приводит лишь к изменению граничного условия для уравнения Лапласа (7.4) – см. п. 2–4.

Наиболее общий метод состоит в использовании метода потенциала. В [2, 16] обсуждаются как физическая (электростатические и гравитационные поля), так и математическая стороны этого метода. Потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона внутри тела:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho(\vec{r}) \quad (7.6)$$

и уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (7.7)$$

вне его.

Решение уравнения (7.6) имеет вид

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d\vec{r}' \quad (7.8)$$



(используются трехмерные обозначения, но сходные формулы могут быть записаны в двумерном и одномерном случаях) Таким образом, частное решение уравнения (7.1) может быть представлено как

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d\vec{r}'. \quad (7.9)$$

Решение (7.9) пригодно в любой системе координат для произвольной (физически осмысленной) функции  $f(\vec{r})$ . Для некоторых интересных случаев интеграл (7.9) может быть вычислен относительно просто с использованием симметрии задачи. Такие примеры дают стандартные задачи электростатики.

Однако в общих случаях интегралы типа (7.9) достаточно сложно вычислить, однако, для некоторых важных случаев возможны более простые методы решения уравнения Пуассона, обсуждаемые ниже.

Начнем с простого частного случая. Достаточно часто неоднородный член  $f$  имеет вид

$$f(r, \varphi) = r^m \cos n\varphi \quad (7.10)$$

(или  $r^m \sin n\varphi$ ). Здесь  $m$  – произвольное целое число,  $n$  – целое в силу периодичности функции  $f$  по аргументу  $\varphi$ :  $f(r, \varphi + 2\pi) = f(r, \varphi)$ . В этом случае частное решение уравнения Пуассона может быть получено методом неопределенных коэффициентов. Заметим, что  $m > -2$  отвечает внутренней задаче, тогда как  $m < -2$  – внешней. Действительно, сама функция  $f(r, \varphi)$  может не быть ограниченной при  $r = 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ) для внутренней (внешней) задачи, достаточно потребовать лишь сходимости интеграла

$$\int_S |f(r, \varphi)| dS$$

(например, в задачах электростатики это требование означает, что полный заряд области конечен). Очевидно, что при  $m > -2$  получаем ограниченное значение интеграла

$$\int_0^a f(r, \varphi) r dr,$$

а при  $m < -2$  остается конечным

$$\int_a^{\infty} f(r, \varphi) r dr,$$

$m = -2$  может встречаться лишь для задачи в кольце.

В полярных координатах (7.1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r, \varphi), \quad (7.11)$$

и потому

$$\nabla^2 r^{m+2} \cos n\varphi = \left[ (m+2)^2 - n^2 \right] r^m \cos n\varphi, \quad (7.12)$$

т.е. частное решение уравнения

$$\nabla^2 u = -r^m \cos n\varphi \quad (7.13)$$

выглядит следующим образом:

$$u_p = -\frac{r^{m+2} \cos n\varphi}{(m+2)^2 - n^2}. \quad (7.14)$$

Очевидно, что при  $m+2 = \pm n$  данное решение обращается в бесконечность. В этом случае пользоваться формулой (7.14) нельзя и мы ищем решение в виде

$$u_p = R(r) \cos n\varphi, \quad (7.15)$$

в результате получая для  $R(r)$ :

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{n^2}{r^2} R = -r^{\pm n-2}, \quad (7.16)$$

где производные по  $r$  обозначаются штрихами.

Частным решением данного уравнения является

$$\mp \frac{r^{\pm n} \ln r}{2n} \text{ при } n \neq 0 \quad (7.17)$$

и

$$-\frac{\ln^2 r}{2} \text{ при } n = 0. \quad (7.18)$$

Напомним, что  $m > -2$  соответствует внутренней задаче. С другой стороны, в силу того, что  $n$  является аргументом  $\cos n\varphi$ , рассматривать отрицательные значения  $n$  не имеет смысла. Таким обра-

зом, решение (7.17) с верхним знаком может быть использовано для внутренней задачи (диск  $r \leq a$ ), с нижним – для внешней,  $r \geq a$ . Решение (7.18) ( $n = 0$ ) является частным решением для задачи в кольце.

**Пример 6.** Решить краевую задачу для диска

$$\nabla^2 u = -Axy, \quad (7.19)$$

$$r \leq a: u|_{r=a} = 0. \quad (7.20)$$

Функция  $f$  в правой части уравнения Пуассона имеет вид  $f = Axy = \frac{A}{2} r^2 \sin 2\varphi$ , т.е. в формуле (7.10) получаем  $m = n = 2$ . Используя результат (7.14), получим частное решение уравнения (7.19):

$$u_p(r, \varphi) = -\frac{A}{2 \cdot 12} r^4 \sin 2\varphi. \quad (7.21)$$

Учитывая решение (7.21), получим краевую задачу (7.4), (7.5) в следующем виде:

$$\nabla^2 u_0 = 0, \quad (7.22)$$

$$r = a: u_0 = -u_p = \frac{A}{24} a^4 \sin 2\varphi. \quad (7.23)$$

Среди множества решений уравнения Лапласа (7.22) необходимо выбрать решение, конечно при  $r = 0$ , т.е.  $r^n \sin n\varphi$  (или  $r^n \cos n\varphi$ ). Ввиду условия (7.23), полагаем  $u_0(r, \varphi) = Cr^2 \sin 2\varphi$ , где  $C = -Aa^2/24$ . Таким образом, функция  $u = u_p + u_0$ , удовлетворяющая граничным уравнениям, есть:

$$u(r, \varphi) = \frac{A}{24} r^2 (a^2 - r^2) \sin 2\varphi. \quad (7.24)$$

*Упражнение.* Разработать метод неопределенных коэффициентов для уравнения Пуассона в случае  $f = AJ_m(\gamma r) \cos m\varphi + BJ_m(\gamma r) \sin m\varphi$ , где постоянная  $\gamma$  принимает произвольное значение (в общем случае, комплексное).

## 8. Уравнение Пуассона: более общий случай

Если неоднородность  $f$  является более сложной, чем предполагает формула (7.10), необходимо разложить функцию  $f(r, \varphi)$  в ряд Фурье по полярному углу  $\varphi$ :

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( f_n^{(1)}(r) \cos n\varphi + f_n^{(2)}(r) \sin n\varphi \right), \quad (8.1)$$

где

$$f_n^{(1)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \alpha) \cos(n\alpha) d\alpha, \quad (8.2)$$

$$f_n^{(2)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \alpha) \sin(n\alpha) d\alpha, \quad n \neq 0$$

$$f_0^{(1)}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \alpha) d\alpha, \quad f_0^{(2)}(r) = 0. \quad (8.3)$$

Представляя решение  $u_p$  в сходной форме

$$u_p(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( u_n^{(1)}(r) \cos n\varphi + u_n^{(2)}(r) \sin n\varphi \right), \quad (8.4)$$

получаем

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_p(r, \varphi) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{d^2 u_n^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n^{(1)}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} u_n^{(1)} \right) \cos n\varphi + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 u_n^{(2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n^{(2)}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} u_n^{(2)} \right) \sin n\varphi = -f(r, \varphi). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Учитывая уравнение (8.1) и собирая члены, содержащие одинаковые тригонометрические функции, получаем неоднородные уравнения Эйлера для фурье-гармоник  $u_n^{(1,2)}$ , зависящих от  $r$ :

$$\frac{d^2 u_n^{(1,2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n^{(1,2)}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} u_n^{(1,2)} = -f_n^{(1,2)}. \quad (8.6)$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (8.6) (с  $f_n^{(1,2)} = 0$ ), было рассмотрено в п. 3:

$$u_{n0}^{(1,2)} = A_n^{(1,2)} r^n + B_n^{(1,2)} r^{-n} \quad (n \neq 0), \quad (8.7)$$

$$u_{00}^{(1,2)} = A_0^{(1,2)} + B_0^{(1,2)} \ln r, \quad (8.8)$$

индекс “0” показывает, что уравнения (8.7) и (8.8) определяют лишь решения однородных уравнений для (8.6).

Будем искать частное решение неоднородных уравнений методом вариации произвольных постоянных, т.е. в виде (8.7), (8.8), но с зависящими от  $r$  коэффициентами  $A_n^{(1,2)}$  и  $B_n^{(1,2)}$ .

Напомним схему решения дифференциальных уравнений этим методом. Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  составляют систему фундаментальных решений однородного уравнения второго порядка и  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  – его общее решение, то частное решение неоднородного уравнения с правой частью  $f(x)$  может быть найдено в виде  $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ , где производные функций  $c_1(x)$  и  $c_2(x)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Применяя этот метод к рассматриваемому уравнению, получаем

$$u_n^{(1,2)} = A_n^{(1,2)}(r)r^n + B_n^{(1,2)}(r)r^{-n} \quad (n \neq 0), \quad (8.9)$$

$$u_0^{(1,2)} = A_0^{(1,2)}(r) + B_0^{(1,2)}(r)\ln r, \quad (8.10)$$

предполагая, что

$$\dot{A}_n^{(1,2)}(r)r^n + \dot{B}_n^{(1,2)}(r)r^{-n} = 0 \quad \text{при } n \neq 0, \quad (8.11)$$

$$\dot{A}_0^{(1,2)}(r) + \dot{B}_0^{(1,2)}(r)\ln r = 0. \quad (8.12)$$

Здесь производные по  $r$  обозначаются точками.

Для первой и второй производных от  $u_n^{(1,2)}$  получим:

$$n \neq 0: \quad \dot{u}_n^{(1,2)} = n \left( A_n^{(1,2)}(r)r^{n-1} - B_n^{(1,2)}(r)r^{-n-1} \right), \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n^{(1,2)} &= n \left( \dot{A}_n^{(1,2)}(r)r^{n-1} - \dot{B}_n^{(1,2)}(r)r^{-n-1} \right) + \\ &+ n \left( (n-1)A_n^{(1,2)}(r)r^{n-2} + (n+1)B_n^{(1,2)}(r)r^{-n-2} \right), \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$n = 0: \quad \dot{u}_0^{(1,2)} = \frac{B_0^{(1,2)}(r)}{r}, \quad (8.15)$$

$$\ddot{u}_0^{(1,2)} = \frac{\dot{B}_0^{(1,2)}(r)}{r} - \frac{B_0^{(1,2)}(r)}{r^2}. \quad (8.16)$$

Ввиду этого, правая часть уравнений (8.6) примет вид

$n \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_n^{(1,2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n^{(1,2)}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} u_n^{(1,2)} &= n \left( \dot{A}_n^{(1,2)}(r) r^{n-1} - \dot{B}_n^{(1,2)}(r) r^{-n-1} \right) + \\ + A_n^{(1,2)}(r) r^{n-2} \left( n(n-1) + n - n^2 \right) + B_n^{(1,2)}(r) r^{-n-2} \left( n(n+1) - n - n^2 \right) &= \\ = n \left( \dot{A}_n^{(1,2)}(r) r^{n-1} - \dot{B}_n^{(1,2)}(r) r^{-n-1} \right), \end{aligned}$$

$$n = 0: \frac{d^2 u_0^{(1,2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_0^{(1,2)}}{dr} = \frac{\dot{B}_0^{(1,2)}(r)}{r} - \frac{B_0^{(1,2)}(r)}{r^2} + \frac{B_0^{(1,2)}(r)}{r^2} = \frac{\dot{B}_0^{(1,2)}(r)}{r}.$$

Подставляя две последние формулы в уравнение (8.6), получим

$$n \left( \dot{A}_n^{(1,2)}(r) r^{n-1} - \dot{B}_n^{(1,2)}(r) r^{-n-1} \right) = -f_n^{(1,2)} \quad (n \neq 0), \quad (8.17)$$

$$\dot{B}_0^{(1,2)}(r) r^{-1} = -f_0^{(1,2)}. \quad (8.18)$$

Решение системы алгебраических уравнений (8.11), (8.17) имеет вид

$$\dot{A}_n^{(1,2)} = -\frac{r^{1-n}}{2n} f_n^{(1,2)}, \quad \dot{B}_n^{(1,2)} = \frac{r^{n+1}}{2n} f_n^{(1,2)} \quad (n \neq 0). \quad (8.19)$$

При  $n = 0$  необходимо решить уравнения (8.12), (8.18), что дает

$$\dot{A}_0^{(1,2)}(r) = r \ln r f_0^{(1,2)}, \quad \dot{B}_0^{(1,2)}(r) = -r f_0^{(1,2)}. \quad (8.20)$$

Рассмотрим далее решение внутренней задачи. В этом случае первые части выражений (8.19) и (8.20) должны интегрироваться от  $r$  до  $l$  (отметим, что верхний предел интеграла  $l$  является переменным), вторые части от нуля до  $r$ , что обеспечивает ограниченность всех решений в начале координат. Действительно, в силу того, что  $f(r=0)$  остается конечным, все функции  $f_n^{(1,2)}(r)$  стремятся к конечному значению при  $r \rightarrow 0$ . Это означает, что следующие соотношения верны при малых  $r$ :

$$A_n^{(1,2)} = -\frac{1}{2n} \int_r^l \rho^{1-n} f_n^{(1,2)}(\rho) d\rho \sim r^{2-n}, \quad (8.21)$$

$$B_n^{(1,2)} = \frac{1}{2n} \int_0^r \rho^{n+1} f_n^{(1,2)}(\rho) d\rho \sim r^{n+2},$$

$$A_0^{(1,2)} = \int_r^l \rho \ln \rho f_0^{(1,2)}(\rho) d\rho \sim r^2 \ln r, \quad (8.22)$$

$$B_0^{(1,2)} = -\int_0^r \rho f_0^{(1,2)}(\rho) d\rho \sim r^2.$$

Эти оценки, в силу (8.9), (8.10), обеспечивают ограниченность функции  $u_p$  при  $r = 0$ . Ясно, что для внешней задачи удобнее выбрать в качестве пределов интегрирования  $r$  и бесконечность.

Таким образом, решение неоднородного уравнения (7.3) можно представить в виде

$$u_p = -\frac{1}{2} \int_0^r \left\{ f_0^{(1)}(\rho) \ln r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\rho}{r} \right)^n \left[ \cos n\varphi f_n^{(1)}(\rho) + \sin n\varphi f_n^{(2)}(\rho) \right] \right\} \rho d\rho -$$

$$-\frac{1}{2} \int_r^l \left\{ f_0^{(1)}(\rho) \ln \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n \left[ \cos n\varphi f_n^{(1)}(\rho) + \sin n\varphi f_n^{(2)}(\rho) \right] \right\} \rho d\rho.$$

Или, учитывая явный вид коэффициентов  $f_n^{(1,2)}(r)$ , задаваемых уравнениями (8.2) и (8.3), получим

$$u_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\rho}{r} \right)^n \cos n(\varphi - \alpha) - \ln r \right] f(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_r^l \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n \cos n(\varphi - \alpha) - \ln \rho \right] f(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha. \quad (8.23)$$

Таким образом, построено частное решение  $u_p$  уравнения Пуассона с произвольной правой частью.

При оценке ряда в (8.23) отметим, что при любых  $|t| < 1$  справедливо выражение

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n \cos n\theta &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (te^{i\theta})^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (te^{-i\theta})^n = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1 - te^{i\theta}) - \frac{1}{2} \ln(1 - te^{-i\theta}) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2t \cos \theta + t^2). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Следовательно, решение (8.23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u_p &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{\rho^2}{r^2} - 2 \frac{\rho}{r} \cos(\varphi - \alpha) \right) + \ln r \right] f(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_r^l \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{r^2}{\rho^2} - 2 \frac{r}{\rho} \cos(\varphi - \alpha) \right) + \ln \rho \right] f(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha, \end{aligned}$$

или

$$u_p = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \int_0^{2\pi} \ln \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \alpha)} f(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha. \quad (8.25)$$

Формула (3.81) – хорошо известный частный случай решения уравнения Пуассона в электростатике (или в теории гравитационного поля). В самом деле, очевидно, что потенциал, который удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho(\vec{r}),$$

внутри тела описывается выражением

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dV'.$$

Физический смысл такого решения вполне очевиден: представляем потенциал  $\varphi(\vec{r})$  как сумму потенциалов «точечных зарядов»  $\rho(\vec{r}')dV$ , расположенных в элементарном объеме  $dV$  тела в точке  $\vec{r}'$ . Таким образом, частное решение уравнения (7.1) может быть записано как

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{f(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dV'. \quad (8.26)$$

В двухмерном случае ситуация аналогичная. Решение уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -2\pi\tau(\vec{r}) \quad (8.27)$$



можно представить как суперпозицию потенциалов каждой элементарной нити, расположенной в точке  $\vec{r}'$ :

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{S'} \tau(\vec{r}') \ln|\vec{r}' - \vec{r}| dS'. \quad (8.28)$$

Следовательно, частное решение уравнения Пуассона (7.1) в двумерном случае будет иметь вид

$$u(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S'} f(\vec{r}') \ln|\vec{r}' - \vec{r}| dS'. \quad (8.29)$$

Выражения (8.26) и (8.29) являются частными решениями уравнения Пуассона в трех- и двумерном случае, соответственно. Они справедливы в любой системе координат для любых физически «разумных» функций  $f(\vec{r})$ . Следует подчеркнуть, что обычный способ получения этих формул основан на методе Грина, однако здесь мы отдаем предпочтение применению метода Фурье, который подходит только для круговых областей.

Для ряда интересных случаев интегралы в решении (8.26) или (8.29) относительно легко оценить по симметрии задачи. Подобные примеры можно найти во многих стандартных электростатических и гравитационных задачах. Обратите внимание, что иногда удобнее использовать разложение в ряд для логарифма, интегрируя уравнение (8.23) вместо уравнения (8.25).

*Упражнение.* Исходя из уравнений (8.19), (8.20), выпишите решение внешней задачи для круга.

*Замечание.* При решении краевой задачи в кольце можно использовать частное решение уравнения Пуассона как для внутренней, так и для внешней задачи.

## 9. Интеграл Пуассона

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа возможно представить в виде интегральной формулы. Для примера рассмотрим первую внутреннюю задачу для круга.

Подставляя формулы для коэффициентов Фурье (2.4) в формулу (2.5) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n (\cos n\phi \cos n\varphi + \sin n\phi \sin n\varphi) \right\} d\phi = \quad (9.1)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \cos n(\phi - \varphi) \right\} d\phi.$$

Выражение в скобках может быть преобразовано следующим образом (где  $t \equiv r / a < 1$ ):

$$Z \equiv \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\phi - \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} t^n [e^{in(\phi - \varphi)} + e^{-in(\phi - \varphi)}] =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(te^{i(\phi - \varphi)})^n + (te^{-i(\phi - \varphi)})^n] \right\}.$$

Учитывая

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{x}{1-x},$$

окончательно получаем

$$Z = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{te^{i(\phi - \varphi)}}{1 - te^{i(\phi - \varphi)}} + \frac{te^{-i(\phi - \varphi)}}{1 - te^{-i(\phi - \varphi)}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos(\phi - \varphi) + t^2}.$$

Следовательно, (9.1) можно переписать в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \frac{a^2 - r^2}{r^2 - 2ar \cos(\phi - \varphi) + a^2} d\phi. \quad (9.2)$$

Эта формула описывает решение первой внутренней краевой задачи для круга и называется *интегралом Пуассона*. Подынтегральное выражение

$$u(r, \varphi, a, \phi) = \frac{a^2 - r^2}{r^2 - 2ar \cos(\phi - \varphi) + a^2} \quad (9.3)$$

называется ядром Пуассона.

Выражение (9.2) получено в предположении  $r < a$  и теряет смысл при  $r = a$ , однако предел при  $r \rightarrow a$  при любом фиксированном значении  $\varphi$  равен  $f(\varphi)$ , потому что ряды, которые использова-

лись при описании (9.2), являются непрерывными в замкнутой области  $r \leq a$ . Следовательно, решение, определенное функцией

$$u(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \frac{a^2 - r^2}{r^2 - 2ar \cos(\varphi - \phi) + a^2} d\phi & \text{при } r < a, \\ f(\varphi) & \text{при } r = a, \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 u = 0$  при  $r < a$  и непрерывно в замкнутой области, включая окружность,  $r \leq a$ .

Решение внешней первой краевой задачи для круга, очевидно, имеет вид

$$u(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \frac{r^2 - a^2}{r^2 - 2ar \cos(\varphi - \phi) + a^2} d\phi & \text{при } r > a, \\ f(\varphi) & \text{при } r = a. \end{cases} \quad (9.4)$$

Отметим, что интеграл Пуассона не может быть аналитически получен в большинстве случаев, однако, он может быть полезен в некоторых приложениях. Например, он лучше подходит для численных расчетов, чем суммирование бесконечных рядов.

**Пример 7.** Рассмотрим бесконечный однородный круглый цилиндр радиуса  $l$ , боковая поверхность которого поддерживается при постоянной температуре:

$$u(r, \varphi)|_{r=l} = \begin{cases} T_0, & 0 \leq \varphi < \pi, \\ -T_0, & \pi \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра.

*Решение.* Во-первых, преобразуем граничные условия в однородные, введя новую функцию  $w(r, \varphi)$

$$u(r, \varphi) = -T_0 + w(r, \varphi)$$

так, что

$$w(r, \varphi)|_{r=l} = \begin{cases} 2T_0, & 0 \leq \varphi < \pi, \\ 0, & \pi \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Решение находится с помощью интеграла Пуассона с функцией

$$f(\phi) = \begin{cases} 2T_0, & 0 \leq \phi < \pi, \\ 0, & \pi \leq \phi < 2\pi \end{cases}$$

и

$$w(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2T_0 \frac{l^2 - r^2}{r^2 - 2lr \cos(\phi - \varphi) + l^2} d\phi. \quad (9.5)$$

Оценим этот интеграл для положительных значений  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \pi$ ). Для упрощения вычислений сделаем замену  $\tan[(\phi - \varphi)/2] = \zeta$ . Если  $\phi$  принимает значения от 0 до  $\pi$ , то  $(\phi - \varphi)/2$  изменяется от  $-\varphi/2$  до  $(\pi - \varphi)/2$ . На этом интервале тангенс является монотонной и непрерывной функцией (напомним, что в решении (9.5)  $\varphi$  является фиксированным параметром между 0 и  $\pi$ , поэтому такая замена возможна).

После замены выражение (9.5) примет вид

$$w(r, \varphi) = \frac{T_0}{\pi} \int_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\pi - \varphi}{2}} \frac{2(l^2 - r^2)}{(l - r)^2 + \zeta^2(l + r)^2} d\zeta.$$

Вычисляя данный интеграл, получим следующий результат:

$$u(r, \varphi) = -T_0 + \frac{2T_0}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{(l + r) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{l - r} + \operatorname{arctg} \frac{(l + r) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{l - r} \right]. \quad (9.6)$$

Эта функция определяет стационарное распределение температуры внутри цилиндра при  $0 < \varphi < \pi$ . Например, в точке  $r = l/2$ ,  $\varphi = \pi/2$  значение (9.6):

$$u\left(\frac{l}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -T_0 + \frac{2T_0}{\pi} \cdot 2 \cdot \operatorname{arctg}(3) \approx -T_0 + \frac{2T_0}{\pi} \cdot 2 \cdot 1,25 \approx 0,6T_0.$$

*Упражнение.* Проверить, что при  $r \rightarrow l$ , формула (9.6) дает в результате температуру  $\pm T_0$ :

$$\lim_{r \rightarrow l-0} u(r, \varphi) = \begin{cases} T_0, & 0 \leq \varphi < \pi, \\ -T_0, & \pi \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

*Упражнение.* Вычислить интеграл (9.5) для  $0 < \varphi < 2\pi$ , найти и выразить  $u(r, \varphi)$  на этом интервале  $\varphi$ .

**Пример 8.** Рассмотрим стационарное отклонение мембраны от положения равновесия. В этом случае поверхность мембраны описывается функцией  $u = u(x, y)$ , которая удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Если проекция контура (границы) мембраны на плоскость  $xy$  является кругом радиуса  $l$ , то можно рассматривать эту задачу как внутреннюю задачу Дирихле для круга.

Пусть уравнение контура задается функцией  $u = f(\varphi)$ , где  $f$  —  $z$ -координата контура при значении угла  $\varphi$ . Функция  $u(r, \varphi)$  определяется с помощью интеграла Пуассона:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \frac{l^2 - r^2}{r^2 - 2lr \cos(\phi - \varphi) + l^2} d\phi.$$

В качестве примера рассмотрим пленку (тонкую мембрану), закрепленную на прочной раме, которая имеет круговую проекцию на плоскость  $xy$  радиуса  $l$  и центром в точке  $O$ . Уравнение контура пленки в цилиндрической системе координат  $u = C \cos 2\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ),  $r = l$ . Найдем форму пленки  $u(r, \varphi)$ .

*Решение.* Решение находится с помощью интеграла Пуассона:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C \cos 2\phi \cdot \frac{l^2 - r^2}{r^2 - 2lr \cos(\phi - \varphi) + l^2} d\phi.$$

Введем замену  $\phi - \varphi = \zeta$  для простоты вычисления интеграла. Пределы интегрирования не изменятся, т.к. подынтегральная функция периодичная с периодом  $2\pi$  (интеграл с пределами интегрирования от  $-\varphi$  до  $2\pi - \varphi$  эквивалентна in the limits from 0 to  $2\pi$ ). В результате получаем

$$u(r, \varphi) = \frac{C(l^2 - r^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\zeta + 2\varphi)}{r^2 - 2lr \cos \zeta + l^2} d\zeta =$$

$$= \frac{C(l^2 - r^2)}{2\pi} \left[ \cos 2\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\zeta d\zeta}{r^2 - 2lr \cos \zeta + l^2} - \sin 2\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\zeta d\zeta}{r^2 - 2lr \cos \zeta + l^2} \right].$$

Значение второго интеграла равно нулю, т.к. подынтегральная функция нечетная на интервале  $(0, 2\pi)$ . Следовательно,

$$u(r, \varphi) = \frac{C(l^2 - r^2)}{2\pi} \cos 2\varphi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\zeta}{r^2 - 2lr \cos \zeta + l^2} d\zeta.$$

Делая замену  $\operatorname{tg}(\zeta/2) = v$ , окончательно получаем

$$u(r, \varphi) = \frac{C(l^2 - r^2)}{2\pi} \cos 2\varphi \frac{2\pi r^2}{l^2(l^2 - r^2)} = \frac{Cr^2}{l^2} \cos 2\varphi.$$

Таким образом, найдено отклонение в каждой точке мембраны  $(r, \varphi)$  в плоскости  $xy$ .

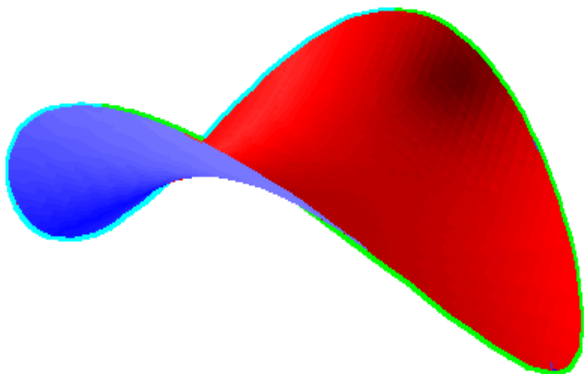


Рис. 3. Форма поверхности пленки для примера 8

Функция  $C(r/l)^2 \cos 2\varphi$  гармоническая и принимает значение  $C \cos 2\varphi$  на контуре пленки. Поверхность  $u = C(r/l)^2 \cos 2\varphi$  является гиперболическим параболоидом, следовательно, пленка, которая закреплена на таком контуре, будет иметь форму гиперболического параболоида (седло), которая показана на рис. 3.

## 10. Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат

В этом параграфе расширим изложенный выше материал на случай цилиндрических областей и цилиндрической симметрии. Для начала рассмотрим решение уравнения Лапласа внутри круглого цилиндра радиуса  $l$  и высоты  $H$ . Запишем уравнение Лапласа этой задачи

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (10.1)$$

$$0 \leq r < l, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < z < H$$

со следующими граничными условиями на боковой поверхности:

$$\alpha u_r(r, \varphi, z) + \beta u(r, \varphi, z) \Big|_{r=l} = g(\varphi, z) \quad (10.2)$$

и на торцах

$$\alpha_0 u_z(r, \varphi, z) + \beta_0 u(r, \varphi, z) \Big|_{z=0} = f_0(r, \varphi), \quad (10.3)$$

$$\alpha_H u_z(r, \varphi, z) + \beta_H u(r, \varphi, z) \Big|_{z=H} = f_H(r, \varphi). \quad (10.4)$$

Функции  $g(\varphi, z)$  и  $f_{0,H}(r, \varphi)$  определены на интервале  $0 \leq z \leq H$  и  $0 \leq r \leq l$ , соответственно. Эти функции периодичны по азимутальному углу с периодом  $2\pi$ :

$$g(\varphi, z) = g(\varphi + 2\pi, z), \quad f_{0,H}(r, \varphi) = f_{0,H}(r, \varphi + 2\pi).$$

Следовательно, необходимо искать решение краевой задачи (10.1)–(10.4) с периодом  $2\pi$  по углу  $\varphi$ :

$$u(r, \varphi, z) = u(r, \varphi + 2\pi, z).$$

Три пары действительных коэффициентов  $\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0, \alpha_H, \beta_H$  ( $|\alpha| + |\beta| \neq 0$  и  $|\alpha_{0,H}| + |\beta_{0,H}| \neq 0$ ) характеризуют соответствующий тип граничных условий и знаки отношений каждой пары  $\beta / \alpha > 0$ ,  $\beta_0 / \alpha_0 < 0$  и  $\beta_H / \alpha_H > 0$ . Сначала рассмотрим три основных типа граничных условий на боковой поверхности (10.2):

*i)* граничное условие 1-го рода, или условие Дирихле:  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ , т.е.  $u(r, \varphi, z) \Big|_{r=l} = g(\varphi, z)$ ;

*ii)* граничное условие 2-го рода, или условие Неймана:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ , т.е.  $u_r(r, \varphi, z) \Big|_{r=l} = g(\varphi, z)$ ;

*iii)* граничное условие 3-го рода, или смешанное условие:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = h = \text{const}$ , т.е.  $u_r(r, \varphi, z) + hu(r, \varphi, z) \Big|_{r=l} = g(\varphi, z)$ .

Аналогичные условия могут быть поставлены и на торцах цилиндра.

В соответствии с общим подходом к решению уравнения Лапласа с неоднородными граничными условиями, представим решение  $u$  как суперпозицию двух функций:

$$u = u_1 + u_2,$$

каждая из которых является решением соответствующей краевой задачи:

$$\nabla^2 u_1 = 0, \quad (10.5)$$

$$u_1(r, \varphi, z) = u_1(r, \varphi + 2\pi, z), \quad (10.6)$$

$$\alpha u_{1r}(r, \varphi, z) + \beta u_1(r, \varphi, z) \Big|_{r=l} = 0, \quad (10.7)$$

$$\alpha_0 u_{1z}(r, \varphi, z) + \beta_0 u_1(r, \varphi, z) \Big|_{z=0} = f_0(r, \varphi), \quad (10.8)$$

$$\alpha_H u_{1z}(r, \varphi, z) + \beta_H u_1(r, \varphi, z) \Big|_{z=H} = f_H(r, \varphi), \quad (10.9)$$

и

$$\nabla^2 u_2 = 0, \quad (10.10)$$

$$u_2(r, \varphi, z) = u_2(r, \varphi + 2\pi, z), \quad (10.11)$$

$$\alpha u_{2r}(r, \varphi, z) + \beta u_2(r, \varphi, z) \Big|_{r=l} = g(\varphi, z), \quad (10.12)$$

$$\alpha_0 u_{2z}(r, \varphi, z) + \beta_0 u_2(r, \varphi, z) \Big|_{z=0} = 0, \quad (10.13)$$

$$\alpha_H u_{2z}(r, \varphi, z) + \beta_H u_2(r, \varphi, z) \Big|_{z=H} = 0. \quad (10.14)$$

Очевидно, что  $u_1$  является решением краевой задачи с *однородными граничными условиями на боковой поверхности*, тогда как  $u_2$  — задачи с *однородными граничными условиями на торцах*. Отметим, что в каждой краевой задаче имеются неоднородные граничные условия. Сначала рассмотрим решение краевой задачи (10.5)–(10.9), а затем перейдем к решению задачи (10.10)–(10.14).

## 11. Однородные граничные условия на боковой поверхности

При решении краевой задачи (10.5)–(10.9) будем использовать метод разделения переменных

$$u_1(r, \varphi, z) = R(r) \Phi(\varphi) Z(z). \quad (11.1)$$



Подставив это разложение в уравнение (10.5) и поделив на  $u_1$ , получим уравнение

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Последнее слагаемое не зависит от  $r$  и  $\varphi$ , поэтому можно разделить переменные, введя константу разделения, которую обозначим как  $\lambda$ :

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda Z = 0 \quad (11.2)$$

и

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \lambda r^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0. \quad (11.3)$$

Аналогичным образом в последнем уравнении последнее слагаемое, которое зависит только от  $\varphi$ , тоже должно быть равно постоянной величине, обозначим ее как  $-p$ :

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + p\Phi = 0 \quad (11.4)$$

и

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \lambda - \frac{p}{r^2} \right) R = 0. \quad (11.5)$$

Таким образом, получаем три обыкновенных дифференциальных уравнения, одно для каждой функции  $Z(z)$ ,  $\Phi(\varphi)$  и  $R(r)$ . Однородные граничные условия (10.6) и (10.7) дают необходимые граничные условия для уравнения (11.4):

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \quad (11.6)$$

и для (11.5):

$$\left( \alpha R'(r) + \beta R(r) \right) \Big|_{r=l} = 0 \quad (11.7)$$

соответственно. Граничные условия (10.8) и (10.9) будут использованы на завершающей стадии решения задачи.

Отметим, что функция  $V(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$  является собственной функцией двумерного оператора Лапласа в уравнении (10.1) с однородными граничными условиями, подобными (10.6) и (10.7). Другими словами,

$$\nabla^2 V + \lambda V = 0, \quad (11.8)$$

$$V(r, \varphi) = V(r, \varphi + 2\pi), \quad (11.9)$$

$$(\alpha V_r(r, \varphi) + \beta V(r, \varphi))\Big|_{r=l} = 0. \quad (11.10)$$

Следует подчеркнуть, что  $V(r, \varphi)$  не является решением уравнения Лапласа, за исключением случая  $\lambda = 0$  (легко показать, используя принцип максимума, что нетривиального решения не существует, за исключением частного случая  $V = \text{const}$  при  $\beta = 0$ ).

Перед тем как продолжить, сначала найдем функции  $R$  и  $\Phi$ . Из уравнения (11.4) и граничного условия (11.6) следует, что  $p = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Общее решение такой краевой задачи будет

$$\Phi_n(\varphi) = C \cos n\varphi + D \sin n\varphi, \quad (11.11)$$

где  $C, D$  – неопределенные константы интегрирования.

С учетом всего вышеперечисленного, уравнение (11.3) перепишем следующим образом:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0.$$

Если ввести новую независимую переменную  $x = kr$ ,  $k = \sqrt{\lambda}$ , то последнее уравнение становится уравнением Бесселя:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) R = 0,$$

общим решением которого является линейная комбинация функций Бесселя и Неймана:

$$R_n(r) = EJ_n(kr) + FN_n(kr).$$

Функция Бесселя (или функция Бесселя I-го рода)  $n$ -го порядка,  $J_n(kr)$ , принимает конечные значения при  $r = 0$ , функция Неймана

(или функция Бесселя II-го рода)  $n$ -го порядка,  $N_n(kr)$ , принимает неограниченные значения при  $r \rightarrow 0$ . Следовательно, при решении внутренней задачи, коэффициент  $F$  должен быть равен нулю. Нахождение решения задачи в случае цилиндрического слоя  $a \leq r \leq b$ ,  $0 \leq z \leq H$  мы оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения.

Подставим полученное решение для функции  $R_n(r)$  в граничное условие (11.7):

$$\alpha k J'_n(kl) + \beta J_n(kl) = 0.$$

Таким образом, решение внутренней краевой задачи Штурма-Лиувилля определяет собственные функции и собственные значения для радиальной функции  $R(r)$ :

$$\lambda_{nm} = k_{nm}^2 = \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{l} \right)^2, \quad R_{nm}(r) = J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r), \quad n, m = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\mu_m^{(n)}$  –  $m$ -й корень уравнения

$$\alpha \mu J'_n(\mu) + \beta l J_n(\mu) = 0. \quad (11.12)$$

Корни уравнения (11.12) могут быть найдены численно, например, с помощью математического пакета Maple.

В результате решение уравнения (11.8) с граничными условиями (11.9)–(11.10) имеет вид

$$V_{nm}^{(1)} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l} r\right) \cos n\varphi, \quad V_{nm}^{(2)} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l} r\right) \sin n\varphi. \quad (11.13)$$

Функции  $V_{nm}^{(1)}(r, \varphi)$  и  $V_{nm}^{(2)}(r, \varphi)$  ортогональны в области  $D$ :  $\{0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq r \leq l\}$ :

$$\begin{aligned} \int_D V_{nm}^{(p)}(r, \varphi) V_{n'm'}^{(q)}(r, \varphi) dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^l V_{nm}^{(p)}(r, \varphi) V_{n'm'}^{(q)}(r, \varphi) r dr d\varphi = \\ &= \|V_{nm}^{(p)}\|^2 \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{pq}, \quad p, q = 1, 2, \end{aligned} \quad (11.14)$$

где квадрат нормы собственной функции

$$\|V_{nm}^{(p)}\|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^l r V_{nm}^{(p)2}(r, \varphi) dr d\varphi = \begin{cases} 2\pi \|R_n(r)\|^2 & \text{при } n = 0, \\ \pi \|R_n(r)\|^2 & \text{при } n \neq 0. \end{cases} \quad (11.15)$$

Выражение (11.15) зависит от коэффициентов граничного условия. Рассмотрим следующие четыре общих случая:

1. Если  $\alpha = 0$ , то

$$\|R_{nm}\|^2 = \frac{l^2}{2} \left[ J'_n(\mu_m^{(n)}) \right]^2. \quad (11.16)$$

2. Если  $\beta = 0$ , то

$$\|R_{nm}\|^2 = \frac{l^2}{2(\mu_m^{(n)})^2} \left[ (\mu_m^{(n)})^2 - n^2 \right] J_n^2(\mu_m^{(n)}). \quad (11.17)$$

3. Если  $\alpha < \beta$ , то

$$\|R_{nm}\|^2 = \frac{l^2}{2} \left[ 1 + \frac{(\mu_m^{(n)})^2 - n^2}{l^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right] \left[ J'_n(\mu_m^{(n)}) \right]^2. \quad (11.18)$$

4. Если  $\alpha > \beta$ , то

$$\|R_{nm}\|^2 = \frac{l^2}{2(\mu_m^{(n)})^2} \left[ l^2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} + (\mu_m^{(n)})^2 - n^2 \right] J_n^2(\mu_m^{(n)}). \quad (11.19)$$

Далее, зная решение для функции  $V(r, \varphi)$ , можно найти функцию  $Z(z)$ . Общее решение уравнения (11.2):

$$Z_{nm}(z) = A \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} z + B \sinh \sqrt{\lambda_{nm}} z. \quad (11.20)$$

Таким образом, решение краевой задачи (10.5)–(10.9) можно представить в следующем виде:

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) \left[ A_{nm}^{(1)} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} z + B_{nm}^{(1)} \sinh \sqrt{\lambda_{nm}} z \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) \left[ A_{nm}^{(2)} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} z + B_{nm}^{(2)} \sinh \sqrt{\lambda_{nm}} z \right]. \quad (11.21)$$

Заметим, что для условий Дирихле или Неймана лучше выбрать общее решение в другой форме (см. следующий раздел). Ряды (11.21) удовлетворяют уравнению Лапласа (10.5) и граничному условию на боковой поверхности (10.7). Действительно,

$$u_{1z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) \sqrt{\lambda_{nm}} \left[ A_{nm}^{(1)} \sinh \sqrt{\lambda_{nm}} z + B_{nm}^{(1)} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} z \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) \sqrt{\lambda_{nm}} \left[ A_{nm}^{(2)} \sinh \sqrt{\lambda_{nm}} z + B_{nm}^{(2)} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} z \right],$$

и для нашего частного случая

$$u_1|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_{nm}^{(1)} V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) + A_{nm}^{(2)} V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) \right], \\ u_{1z}|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nm}} \left[ B_{nm}^{(1)} V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) + B_{nm}^{(2)} V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) \right].$$

Далее мы должны удовлетворить граничным условиям, которые вытекают из уравнений (10.8) и (10.9). В результате мы получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) \left( \alpha_0 \sqrt{\lambda_{nm}} B_{nm}^{(1)} + \beta_0 A_{nm}^{(1)} \right) + \right. \\ \left. + V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) \left( \alpha_0 \sqrt{\lambda_{nm}} B_{nm}^{(2)} + \beta_0 B_{nm}^{(2)} \right) \right] = f_0(r, \varphi), \quad (11.22)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) \left[ \alpha_H \sqrt{\lambda_{nm}} \left( A_{nm}^{(1)} \sinh \sqrt{\lambda_{nm}} H + B_{nm}^{(1)} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} H \right) + \right. \\ \left. + \beta_H \left( A_{nm}^{(1)} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} H + B_{nm}^{(1)} \sinh \sqrt{\lambda_{nm}} H \right) \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) \left[ \alpha_H \sqrt{\lambda_{nm}} \left( A_{nm}^{(2)} \sinh \sqrt{\lambda_{nm}} H + B_{nm}^{(2)} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} H \right) + \right. \\ \left. + \beta_H \left( A_{nm}^{(2)} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} H + B_{nm}^{(2)} \sinh \sqrt{\lambda_{nm}} H \right) \right] = f_H(r, \varphi). \quad (11.23)$$

Представим функции  $f_{0,H}(r, \varphi)$  в виде ряда Фурье-Бесселя:

$$f_{0,H}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ f_{nm,0,H}^{(1)} V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) + f_{nm,0,H}^{(2)} V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) \right], \quad (11.24)$$

коэффициенты разложения, с учетом выражения (11.14), вычисляются по формулам

$$f_{nm,0}^{(1,2)} = \frac{1}{\|V_{nm}^{(1,2)}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^l f_0(r, \varphi) V_{nm}^{(1,2)} r dr d\varphi, \\ f_{nm,H}^{(1,2)} = \frac{1}{\|V_{nm}^{(1,2)}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^l f_H(r, \varphi) V_{nm}^{(1,2)} r dr d\varphi. \quad (11.25)$$

Сравнивая уравнения (11.22), (11.23) и (11.24), мы получим простую линейную неоднородную алгебраическую систему уравнений

для коэффициентов  $A_{nm}^{(1,2)}$  и  $B_{nm}^{(1,2)}$ . Решение этой системы уравнений позволяет найти решение первой краевой задачи, заданной уравнением (10.5) через условие (10.9). В следующем разделе мы приведем пример, чтобы прояснить детали выше расчетов.

### 11.1. Пример однородного граничного условия на внешней поверхности

Рассмотрим следующую краевую задачу для круглого цилиндра:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (11.26)$$

с граничными условиями

$$T|_{r=l} = T_0, \quad (11.27)$$

$$T|_{z=0} = T_0 + T_1 \frac{l^2 - r^2}{l^2}, \quad (11.28)$$

$$T_z|_{z=H} = 0. \quad (11.29)$$

Физическим примером такой задачи может служить сосуд цилиндрической формы, открытый сверху и подогреваемый снизу. Из уравнения (11.26) следует, что источник нагрева должен быть не очень мощным, чтобы тепло равномерно распределялось по всему сосуду и задача оставалась стационарной (т.е. не зависела от времени). В качестве нагревателя для условия (11.28) можно рассматривать свечу, зажигалку или другой малый источник тепла, помещенный в центр дна сосуда. Боковая цилиндрическая поверхность находится при постоянной температуре, равной температуре окружающей среды. Параметр  $T_1$  характеризует интенсивность источника тепла и зависит от его мощности и эффективности теплопроводности через дно сосуда. Если сосуд наполнен водой, теплопроводность которой гораздо больше воздуха, то поток тепла на поверхности можно, приблизительно, считать равным нулю.

Можно исключить из решения постоянное значение температуры  $T_0$ , которое характеризует температуру окружающей среды:

$$T = T_0 + u, \quad (11.30)$$

где

$$\nabla^2 u = 0, \quad (11.31)$$

$$u|_{r=l} = 0, \quad (11.32)$$

$$u|_{z=0} = G(r) = T_1 \frac{l^2 - r^2}{l^2}, \quad (11.33)$$

$$u_z|_{z=H} = 0. \quad (11.34)$$

В соответствии с общим методом решения, который мы обсуждали выше, решение данной задачи можно представить в виде ряда

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z) = & \sum_{m=1} \sum_{n=0} \left[ A_{nm}^{(1)} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} (H - z) + B_{nm}^{(1)} \sinh \sqrt{\lambda_{nm}} z \right] \times \\ & \times \cos(n\varphi) J_n \left( \sqrt{\lambda_{nm}} r \right) + \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left[ A_{nm}^{(2)} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} (H - z) + \right. \\ & \left. + B_{nm}^{(2)} \sinh \sqrt{\lambda_{nm}} z \right] \sin(n\varphi) J_n \left( \sqrt{\lambda_{nm}} r \right). \end{aligned} \quad (11.35)$$

Здесь  $k_{nm}$  –  $m$ -й корень уравнения  $J_n \left( \sqrt{\lambda_{nm}} l \right) = 0$ , которое гарантирует, что выполняется граничное условие (11.32).

Отметим, что общее решение уравнения (11.2) записано в несколько ином виде, чем решение (11.20). Здесь, в решении (11.35), мы использовали  $\cosh \sqrt{\lambda_{nm}} (H - z)$  вместо  $\cosh \sqrt{\lambda_{nm}} z$ , что позволяет упростить вычисления в данном частном случае, т.к. это решение имеет нулевую производную при  $z = H$  (см. условие (11.34)). Очевидно, что два частных решения  $\sinh \sqrt{\lambda_{nm}} z$  и  $\cosh \sqrt{\lambda_{nm}} (H - z)$  являются линейно независимыми.

Теперь необходимо найти коэффициенты  $A_{nm}^{(1,2)}$  и  $B_{nm}^{(1,2)}$ , удовлетворяя граничным условиям на нижнем и верхнем торцах, (11.33) и (11.34), соответственно. Из второго условия получаем

$$\begin{aligned} u_z(r, \varphi, z)|_{z=H} = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nm}} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} H \times \\ & \times \left[ B_{nm}^{(1)} \cos n\varphi + B_{nm}^{(2)} \sin n\varphi \right] J_n \left( \sqrt{\lambda_{nm}} r \right) = 0. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Понятно, что данное условие должно выполняться при любых значения переменных  $r$  и  $\varphi$ , т.е. коэффициенты в условии (11.36) должны быть равны нулю:

$$B_{nm}^{(1,2)} = 0. \quad (11.37)$$

Используя условие (11.33) и учитывая (11.37), получим в результате

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z)|_{z=0} &= \sum_{m=1} \sum_{n=0} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} H \times \\ &\times \left[ A_{nm}^{(1)} \cos n\varphi + A_{nm}^{(2)} \sin n\varphi \right] J_n \left( \sqrt{\lambda_{nm}} r \right) = G(r). \end{aligned} \quad (11.38)$$

Мы можем разложить функцию  $G(r)$  в ряд Фурье-Бесселя как

$$G(r) = \sum_{m=1} \sum_{n=0} \left[ G_{nm}^{(1)} \cos n\varphi + G_{nm}^{(2)} \sin n\varphi \right] J_n \left( \sqrt{\lambda_{nm}} r \right),$$

где

$$\begin{aligned} G_{nm}^{(1)} &= \frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^l G(r) J_n \left( \sqrt{\lambda_{nm}} r \right) \cos n\varphi r dr d\varphi, \\ G_{nm}^{(2)} &= \frac{1}{\|V_{nm}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^l G(r) J_n \left( \sqrt{\lambda_{nm}} r \right) \sin n\varphi r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Благодаря осевой симметрии задачи, решение не должно зависеть от угла  $\varphi$ , т.е.

$$G_{nm}^{(1)} = G_{nm}^{(2)} = 0, \quad n > 0.$$

Так как функция  $G(r)$  является четной, то коэффициенты  $G_{0m}^{(2)} = 0$  и необходимо найти только один набор коэффициентов:

$$G_{0m}^{(1)} = \frac{1}{\|R_{0m}\|^2} \int_0^l G(r) J_0 \left( \sqrt{\lambda_{0m}} r \right) r dr, \quad (11.39)$$

где норма  $\|R_{0m}\|^2$  определяется формулой (11.16). Вычисляя интеграл в (11.39), получим

$$G_{0m}^{(1)} = -\frac{T_1}{J_0' \left( \sqrt{\lambda_{0m}} l \right)} \left( \frac{2}{\sqrt{\lambda_{0m}} l} \right)^3.$$



Возвращаясь к уравнению (11.38), мы получим выражения для коэффициентов разложения:

$$A_{nm}^{(1)} = \frac{G_{nm}^{(1)}}{\cosh \sqrt{\lambda_{nm}} H} = - \frac{T_1}{J_0'(\sqrt{\lambda_{0m}} l) \cosh \sqrt{\lambda_{0m}} H} \left( \frac{2}{\sqrt{\lambda_{0m}} l} \right)^3 \delta_{n0}, \quad (11.40)$$

$$A_{nm}^{(2)} = 0.$$

Подставляя функцию (11.35), с учетом значений коэффициентов (11.37) и (11.40), в (11.30), получим окончательно решение задачи (11.26)–(11.29):

$$T = T_0 - T_1 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\sqrt{\lambda_{0m}} l} \right)^3 \frac{J_0(\sqrt{\lambda_{0m}} r) \cosh \sqrt{\lambda_{0m}} z}{J_0'(\sqrt{\lambda_{0m}} l) \cosh \sqrt{\lambda_{0m}} H}. \quad (11.41)$$

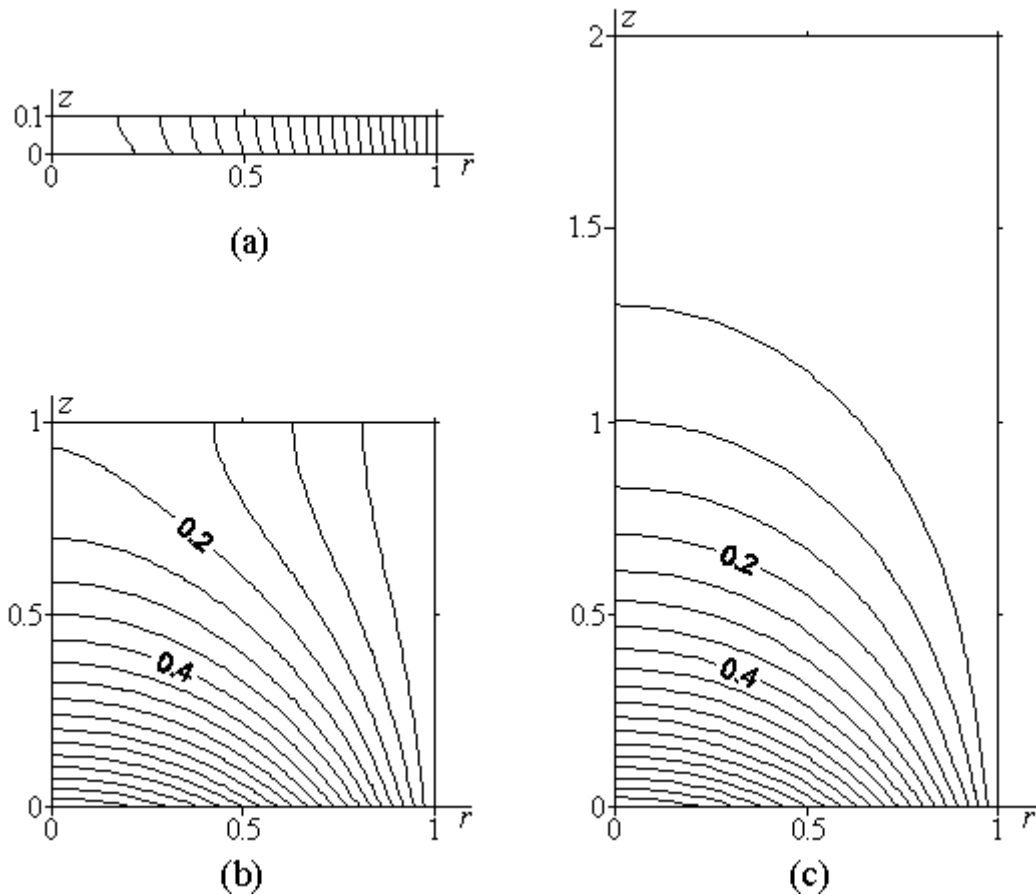


Рис. 4. Изотермы для трех значений высоты цилиндра  $H$ : (a) 0.1; (b) 1.0; (c) 2.0

На рис. 4 построены графики, полученные при табулировании функции (11.41) для трех значений  $H$ : 0.1 (а), 1.0 (б), 2.0 (с). Использовались следующие значения параметров:  $l = T_1 = 1$ ,  $T_0 = 0$ . Заметим, что данные параметры были обезразмерены с использованием единиц температуры  $T_1 - T_0$  и длины  $l$ . При вычислениях в сумме ряда удерживалось 20 слагаемых, что гарантирует точность  $3 \cdot 10^{-4}$  для граничного условия (11.38). Изотермы построены с шагом 0.05.

Как можно увидеть из приведенных графиков на рис. 4, в первом случае температура фактически не зависит от  $z$ , изолинии близки к вертикальным линиям, особенно вблизи боковой поверхности. В третьем случае, начиная примерно с  $z = 1.5$ , температура внутри почти равна температуре окружающей среды и достигает максимума на свободной поверхности около 0.018. Распределение температуры при больших значениях качественно не отличается от показанного на рис. 4(с).

В заключение отметим, что в рассмотренном нами случае слабый источник нагревает воду только вблизи центра нижнего основания. Если высота цилиндра больше, чем  $1.5l$ , то верхняя часть имеет температуру, близкую к температуре окружающей среды.

*Упражнение.* Пусть источник нагрева  $G(r, \varphi) = l^{-4} (r \cos \varphi - x_0)^2 (l^2 - r^2)$  находится в точке  $x = x_0 < l$ . Найдите распределение температуры внутри цилиндра.

*Совет.* В этом случае решение будет зависеть от угла  $\varphi$ , но в решении останутся только коэффициенты  $A_{nm}^{(1)}$ ,  $n = 0, 1, 2$ .

## 12. Однородные граничные условия на торцах цилиндра

Рассмотрим теперь краевую задачу (10.10)–(10.14). Все уравнения (11.1)–(11.5) остаются в силе. Кроме того, периодическое условие для функции  $\Phi(\varphi)$  также выполняется и, следовательно, для нее ре-

шение может быть записано в форме (11.11) с такими же значениями  $p = n^2$ . Однако в этом случае мы должны принять во внимание граничные условия (10.13) и (10.14), что дает

$$\alpha_0 Z'(0) + \beta_0 Z(0) = 0, \quad (12.1)$$

$$\alpha_H Z'(H) + \beta_H Z(H) = 0. \quad (12.2)$$

Так как координата  $z$  является декартовой, то задача Штурма-Лиувилля, состоящая из уравнений (11.2), (12.1) и (12.2), аналогична такой же задаче, которая была рассмотрена подробно при решении уравнения Лапласа в прямоугольной области [1, 2]. Кратко приведем основные результаты:

$$Z_m = -\alpha_0 k_m \cos k_m z - \beta_0 \sin k_m z, \quad (12.3)$$

$$\lambda_m = -k_m^2, \quad (12.4)$$

где  $k_m$  –  $m$ -й корень следующего алгебраического уравнения:

$$\begin{aligned} &\alpha_H k_m (\alpha_0 k_m \sin k_m H + \beta_0 \cos k_m H) - \\ &-\beta_H (\alpha_0 k_m \cos k_m H - \beta_0 \sin k_m H) = 0. \end{aligned}$$

Эти функции ортогональны, их норму можно вычислить самостоятельно или посмотреть в [1, 2]:

$$\int_0^H Z_m(z) Z_j(z) dz = \|Z_m\|^2 \delta_{jm}.$$

Используя (12.4), мы получим следующее уравнение для радиальной части решения:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left( k_m^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (12.5)$$

Вводя новую независимую переменную  $x = k_m r$ , это уравнение приведет к *модифицированному уравнению Бесселя*:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left( 1 + \frac{n^2}{x^2} \right) R = 0. \quad (12.6)$$

Решение уравнения (12.6) принимает конечные значения в центре цилиндра и является модифицированной функцией Бесселя первого рода  $n$ -го порядка:

$$R_{nm} = I_n(k_m r), \quad (12.7)$$

которая пропорциональна функции  $n$ -го порядка чисто мнимого аргумента:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix).$$

Более подробно свойства модифицированных функций Бесселя можно посмотреть в [2-10].

Один особый случай рассмотрим отдельно. Если условия Неймана поставлены на обоих торцах цилиндра, т.е.  $\beta_0 = \beta_H = 0$ ,  $\alpha_0 = \alpha_H = 1$ , то нетривиальное решение задачи Штурма-Лиувилля (11.2), (12.1) и (12.2) дается формулой

$$Z_0(z) = 1,$$

соответствующей  $\lambda_0 = 0$ . Это означает, что соответствующее частное решение не зависит от переменной  $z$ , и мы получаем двумерную внутреннюю задачу для круга, которая была исследована в параграфе 3. В этом случае уравнение (12.5) сводится к уравнению Эйлера:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{n^2}{r^2} R = 0,$$

решением которого, если  $n \neq 0$ , является функция

$$R(r) = Er^n + Fr^{-n}, \quad (12.8)$$

или, если  $n = 0$ ,

$$R(r) = E + F \ln r. \quad (12.9)$$

Точка  $r = 0$  входит в область существования решения, поэтому коэффициент  $F$  должен быть равен нулю в решениях (12.8) и (12.9).

Таким образом, общее решение краевой задачи (10.10)–(10.14) можно представить в виде следующего ряда:

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_n(k_m r) \left[ A_{nm}^{(1)} \cos n\varphi + A_{nm}^{(2)} \sin n\varphi \right] Z_m(z).$$

Отметим, что в приведенном решении не написаны отдельно слагаемые при  $n = 0$  (как это было в параграфах 2-8) для краткости.

Если выделить эти слагаемые, то решение примет вид

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[ A_{n0}^{(1)} \cos n\varphi + A_{n0}^{(2)} \sin n\varphi \right] + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_n(k_m r) \left[ A_{nm}^{(1)} \cos n\varphi + A_{nm}^{(2)} \sin n\varphi \right] Z_m(z)$$

для  $\beta_0 = \beta_H = 0$ ,  $\alpha_0 = \alpha_H = 1$ . Ниже мы рассмотрим только первое слагаемое, а второе оставим в качестве самостоятельного упражнения.

Коэффициенты  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  неизвестны, но их можно найти из граничного условия на боковой поверхности (10.12):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \alpha k_m I'_n(k_m a) + \beta I_n(k_m a) \right] \times \\ \times \left( A_{nm}^{(1)} \cos n\varphi + A_{nm}^{(2)} \sin n\varphi \right) Z_m(z) = g(\varphi, z). \quad (12.10)$$

Разложим функцию  $g(\varphi, z)$  в ряд Фурье по обеим переменным  $z$  и  $\varphi$ :

$$g(\varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( g_{nm}^{(1)} \cos n\varphi + g_{nm}^{(2)} \sin n\varphi \right) Z_m(z),$$

где

$$g_{nm}^{(1)} = \frac{1}{\pi \|Z_m\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^H g(\varphi, z) \cos n\varphi Z_m(z) d\varphi dz, \quad n > 0,$$

$$g_{nm}^{(2)} = \frac{1}{\pi \|Z_m\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^H g(\varphi, z) \sin n\varphi Z_m(z) d\varphi dz, \quad n > 0,$$

$$g_{0m}^{(1)} = \frac{1}{2\pi \|Z_m\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^H g(\varphi, z) Z_m(z) d\varphi dz, \quad g_{0m}^{(2)} = 0.$$

Подставив это разложение в уравнение (12.10), найдем неизвестные коэффициенты разложения

$$A_{nm}^{(1,2)} = \frac{g_{nm}^{(1,2)}}{\alpha k_m I'_n(k_m a) + \beta I_n(k_m a)}.$$

Таким образом, мы нашли решение краевой задачи (10.10) – (10.14). Совместно с решением задачи (10.5) – (10.9), которое было получено раньше, окончательно получаем решение исходной краевой задачи (10.1) – (10.4).

**Пример 9.** Рассмотрим твердый цилиндр радиуса  $l$  и высоты  $H$ . Торцы этого цилиндра поддерживаются при температуре окружающей среды, которая положена равной нулю. На боковой поверхности цилиндра поддерживается стационарное распределение температуры:

$$u(r, \varphi, z)|_{r=l} = \frac{T_0}{H^2}(H - z)z. \quad (12.11)$$

Найти распределение температуры внутри цилиндра.

*Решение.* Граничные условия не зависят от  $\varphi$ , т.е. задача является осесимметричной. Следовательно, распределение температуры внутри цилиндра описывается уравнением Лапласа:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

с граничными условиями

$$u(r, z, \varphi)|_{z=0} = u(r, z, \varphi)|_{z=H} = 0,$$

и (12.11). Для функции  $Z(z)$  получаем решение, которое было рассмотрено выше:

$$Z_m(z) = \sin k_m z, \quad k_m = \frac{\pi m}{H}, \quad n = 1, 2, \dots$$

и для функции  $R(r)$  уравнение

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - k_m^2 R = 0.$$

Это модифицированное уравнение Бесселя (12.5), решением которого являются модифицированные функции Бесселя первого и второго рода:  $I_0(x)$  и  $K_0(x)$ . Следовательно, общим решением для функции  $R(r)$  будет

$$R_m(r) = c_1 I_0(k_m r) + c_2 K_0(k_m r).$$

Постоянная интегрирования  $c_2 = 0$ , т.к.  $K_0(x)$  расходится при  $x = 0$ .

Собирая полученные выше решения, получим окончательно

$$u(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m I_0(k_m r) \sin(k_m z). \quad (12.12)$$

При  $r = a$  ряд (12.12) является тригонометрическим рядом Фурье с базисными функциями  $\sin(k_m z)$  и коэффициентами разложения

$$\begin{aligned} A_m I_0(k_m a) &= \frac{2}{H} \int_0^H u(a, z) \sin(k_m z) dz = \\ &= \frac{2T_0}{H^3} \int_0^H z(H - z) \sin(k_m z) dz = \frac{4T_0}{(\pi m)^3} [1 - (-1)^m] \end{aligned}$$

и

$$A_{2l} = 0, A_{2l+1} = \frac{8T_0}{\pi^3 (2l+1)^3 I_0(k_{2l+1} a)}, l = 0, 1, \dots$$

Окончательно получаем итоговое решение задачи

$$u(r, z) = \frac{8T_0}{\pi^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^3} \frac{I_0(k_{2l+1} r)}{I_0(k_{2l+1} a)} \sin(k_{2l+1} z).$$

Поля безразмерной температуры построены на рис. 5 для трех разных значений  $H$ . В качестве единиц обезразмеривания выбраны для температуры  $T_1 - T_0$  и координаты  $a$ . Из приведенных графиков видно, что при малых значениях  $H$  температура неоднородна только вблизи боковой поверхности.

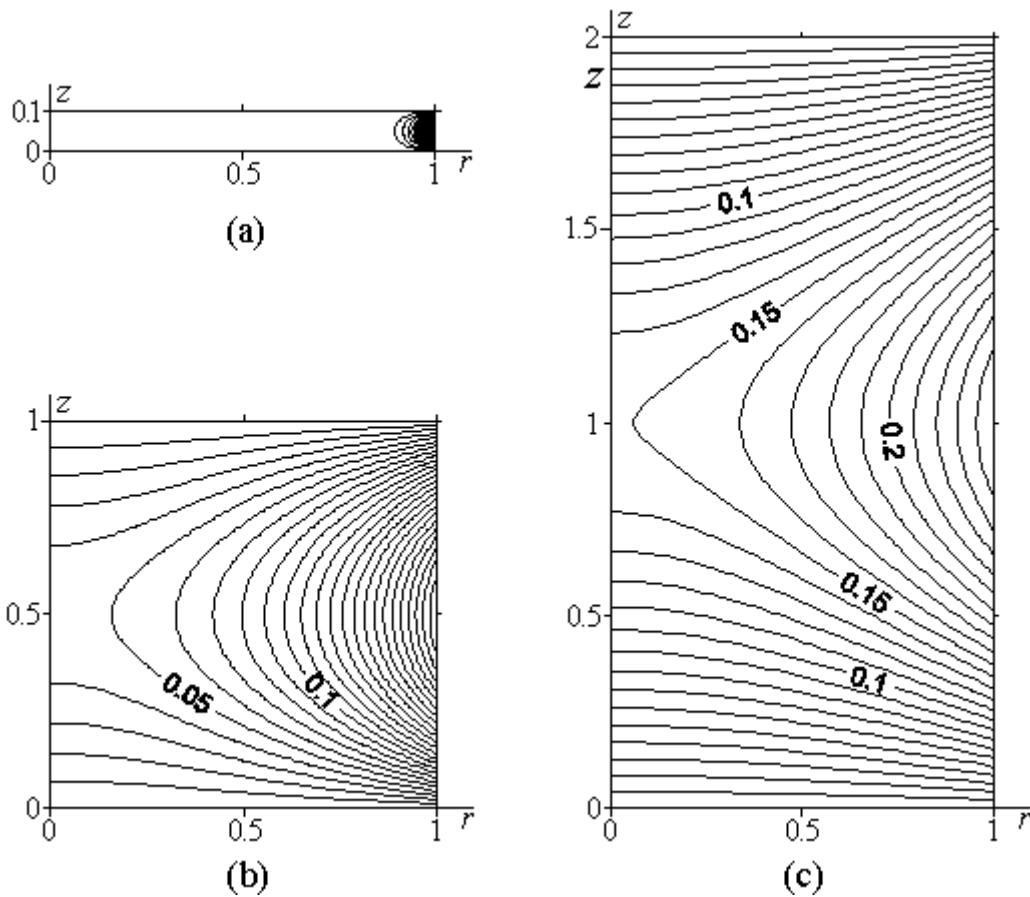


Рис. 5. Распределение температуры для трех значений  $H$ : (a) 0.1; (b) 1.0; (c) 2.0

### 13. Пример однородных граничных условий на торцах цилиндра

В качестве примера однородных граничных условий на торцах цилиндра рассмотрим следующую задачу для кругового цилиндра:

$$\begin{aligned} \nabla^2 T &= 0, \\ T|_{r=a} &= T_0 + T_1 (1 + \cos \varphi), \\ T|_{z=0} &= T_0, \quad T_z|_{z=H} = 0. \end{aligned}$$

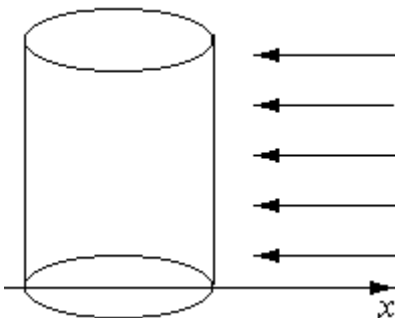


Рис. 6. Нагрев бочки

Эта задача напоминает задачу о нагревании бочки с водой, рассмотренную в параграфе 12, но в данном случае бочка находится на плоскости, которая поддерживается при постоянной температуре  $T_0$ . Кроме того, бочка нагревается солнечным светом. Предполагается, что солнечные лучи параллельны оси  $x$  (см. рис. 6). Следовательно, максимальное



значение температуры  $T_0 + 2T_1$  достигается при  $\varphi = 0$  и равно  $T_0 + T_1$  при  $\varphi = \pi / 2$ . Если  $\varphi = \pi$  (эта часть боковой поверхности находится в тени), то температура стенки бочки равна температуре окружающей среды (воздуха)  $T_0$ . Верх бочки открыт и, благодаря низкой теплопроводности воздуха, тепловой поток равен нулю.

Как и ранее, мы будем измерять температуру относительно  $T_0$ , что соответствует введению функции  $u(r, \varphi, z)$  с помощью решения (11.30). Для этой функции  $u$  мы получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= 0, \\ u|_{r=l} &= T_1 (1 + \cos \varphi), \\ u|_{z=0} &= 0, \quad u_z|_{z=H} = 0.\end{aligned}$$

Разделяя переменные, мы получим уравнения (11.2), (11.4) и (11.5). Уравнение для функции  $Z(z)$  ограничено условиями

$$Z(0) = 0, \quad Z'(H) = 0. \quad (13.1)$$

Решением задачи Штурма-Лиувилля (11.2), (13.1) являются функции

$$Z_m(z) = \sin(k_m z), \quad k_m = \frac{\pi}{2H}(2m+1), \quad m = 0, 1, \dots$$

с квадратом нормы

$$\|Z_m\|^2 = \frac{H}{2}.$$

Таким образом, общее решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям (13.1) на торцах бочки, имеет следующий вид:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} I_n(k_m r) \left[ A_{nm}^{(1)} \cos n\varphi + A_{nm}^{(2)} \sin n\varphi \right] \sin k_m z.$$

Из условия на боковой поверхности получаем уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} I_n(k_m l) \left[ A_{nm}^{(1)} \cos n\varphi + A_{nm}^{(2)} \sin n\varphi \right] \sin k_m z = T_1 (1 + \cos \varphi).$$

Как и при решении предыдущих задач, разложим правую часть полученного уравнения в ряд Фурье:

$$T_1(1 + \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ T_{nm}^{(1)} \cos n\varphi + T_{nm}^{(2)} \sin n\varphi \right] \sin k_m z.$$

При этом

$$T_{nm}^{(1)} = 0 \quad (n > 1, m \geq 0), \quad T_{nm}^{(2)} = 0 \quad (n \geq 0, m \geq 0).$$

Для оставшихся коэффициентов разложения:

$$T_{0m}^{(1)} = T_{1m}^{(1)} = \frac{2T_1}{H} \int_0^H \sin k_m z dz = \frac{2T_1}{k_m H}.$$

Следовательно, распределение температуры жидкости в бочке описывается формулой

$$T = T_0 + 2T_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k_m H} \left[ \frac{I_0(k_m r)}{I_0(k_m l)} + \frac{I_1(k_m r)}{I_1(k_m l)} \cos \varphi \right] \sin k_m z. \quad (13.2)$$

На рисунках 7 и 8 показаны изолинии при сохранении в суммах 20 слагаемых и для значений  $H = l = T_1 = 1$ ,  $T_0 = 0$ . На рисунке 7 показано распределение температуры для трех значений координаты  $z$ : (a) 0.1, (b) 0.5, (c) 1.0. Видно, что вблизи дна температура жидкости близка к температуре окружающей среды. С увеличением  $z$  значение температуры растет и распределение становится почти линейным.

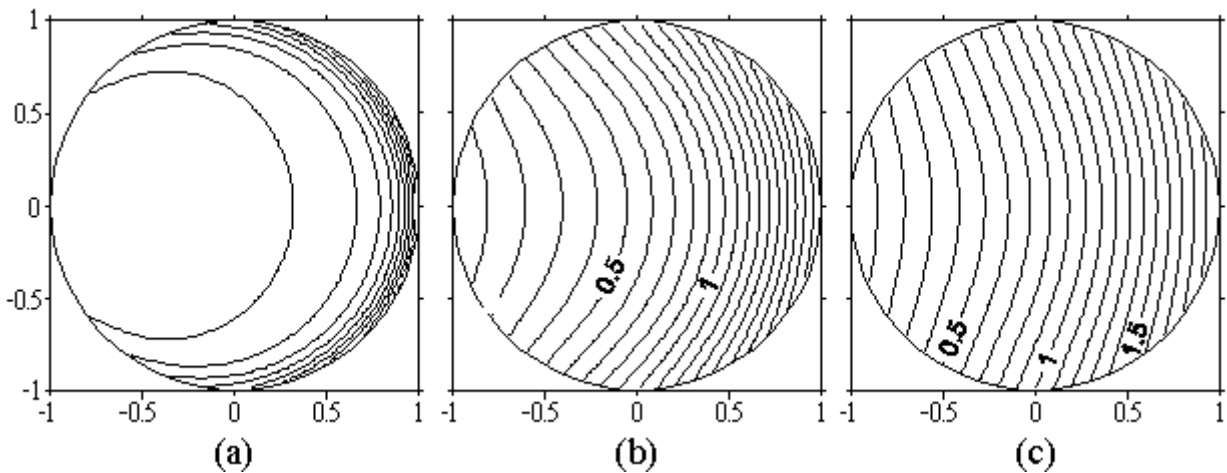


Рис. 7. Изотермы для трех значений  $z$ : (a) 0.1, (b) 0.5, (c) 1.0

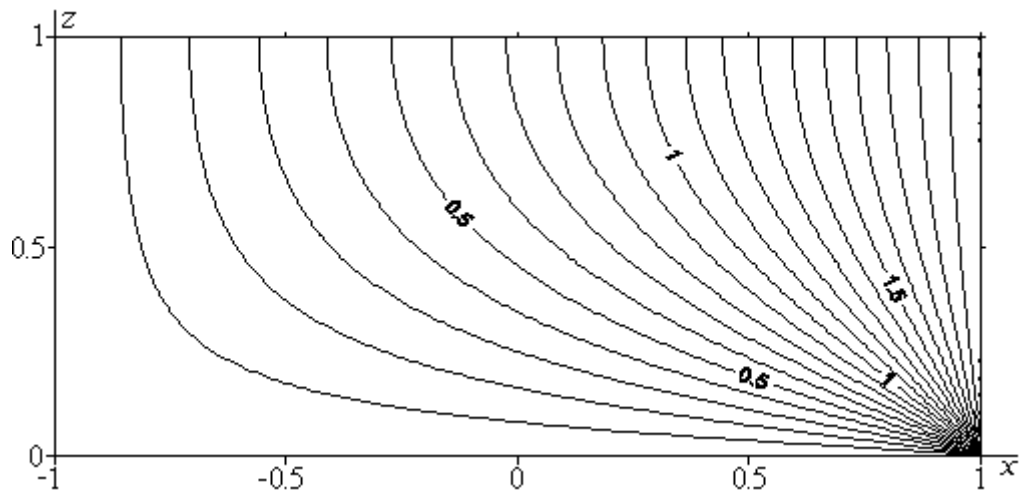


Рис. 8. Изотермы в плоскости  $x - z$

На рисунке 8 показано распределение температуры в плоскости  $x - z$ . Из приведенного рисунка видно, что ряд плохо сходится вблизи точки  $(1, 0)$ , т.к. граничные условия на нижнем торце ( $z = 0$ ) и боковой поверхности ( $r = 1$ ) несогласованные и функция температуры имеет разрыв. В реальности такого разрыва нет из-за существования тонкого переходного слоя, в котором температура плавно меняется от  $T_0$  на торце к  $T_0 + T_1(1 + \cos \varphi)$  на боковой поверхности.

#### 14. Применение функций Бесселя для решения уравнений Лапласа и Пуассона в круговой области

Мы рассматривали решение двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа в параграфах 3–7 и нашли решение двумерного уравнения Лапласа в полярных координатах в виде степенного ряда по  $r$ , с  $\alpha \mu J'_n(\mu) + \beta l J_n(\mu) = 0$  и  $r^{\pm n} \sin n\varphi$  (второе решение для  $m = 0$  будет  $\ln r$ ). Тем не менее, в некоторых случаях такие ряды сходятся слишком медленно, поэтому необходимо использовать другие методы.

Как было показано в разделе 12, собственные функции оператора Лапласа в двумерном случае могут быть выражены через функции Бесселя:

$$V_{nm}^{(1)} = J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{l} r \right) \cos n\varphi, \quad V_{nm}^{(2)} = J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{l} r \right) \sin n\varphi. \quad (14.1)$$

Поэтому мы также можем применить их к решению уравнений Лапласа и Пуассона для областей с круговой симметрией. Этот метод очень похож на используемый при решении гиперболических и параболических уравнений.

Рассмотрим следующую внутреннюю краевую задачу:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r, \varphi), \quad 0 \leq r < l, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (14.2)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) + \beta u(r, \varphi) \Big|_{r=l} = g(\varphi), \quad u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi). \quad (14.3)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  – действительные коэффициенты,  $|\alpha| + |\beta| \neq 0$  и  $l$  – радиус окружности. Мы рассмотрим три типа граничных условий по аналогии с разделом 3.

Трудностью решения задачи с такими неоднородными граничными условиями является то, что невозможно разделить переменные, чтобы получить обыкновенное дифференциальное уравнение относительно независимой переменной  $r$ , как мы это делали в разделе 2. Тем не менее, в силу линейности уравнения Лапласа и Пуассона, мы можем представить решение в виде суммы двух функций:

$$u(r, \varphi) = v(r, \varphi) + w(r, \varphi), \quad (14.4)$$

где введена вспомогательная функция  $w(r, \varphi)$ , которая должна соответствовать неоднородным граничным условиям (т.е. включает в себя зависимость от функции  $g(\varphi)$ , и для функции  $v(r, \varphi)$  получается однородное граничное условие). В этом случае мы можем записать

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial r}(a, \varphi) + \beta w(a, \varphi) = g(\varphi), \quad (14.5)$$

и новая неизвестная функция  $v(r, \varphi)$  является решением уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = -f^*(r, \varphi),$$

где правая часть

$$f^*(r, \varphi) = f(r, \varphi) + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}.$$

Граничное условие для функции  $v(r, \varphi)$  – однородное:

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial r}(a, \varphi) + \beta v(a, \varphi) = 0.$$

Функция  $w(r, \varphi)$  может быть определена различными способами, единственные условия, которым она должна удовлетворять – ограниченность и непрерывность. Далее будет показано, что функцию можно выбрать в виде

$$w(r, \varphi) = (c_0 + c_1 r^2)g(\varphi),$$

который выбирается исходя из вида уравнения (11.5) (легко показать путем прямой подстановки, что данное выражение для  $w(r, \varphi)$  удовлетворяет уравнению (11.5)).

Случай 1. Для  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  получаем:

а) граничное условие  $u(r, \varphi)|_{r=l} = g(\varphi)$  с дополнительной функцией

$$w(r, \varphi) = \frac{r^2}{l^2} g(\varphi), \quad (14.6)$$

б) граничное условие  $u(r, \varphi)|_{r=l} = g_0 = \text{const}$  с дополнительной функцией

$$w(r, \varphi) = g_0. \quad (14.7)$$

Случай 2. Для  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  получаем граничное условие

$\frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi)|_{r=l} = g(\varphi)$  с дополнительной функцией

$$w(r, \varphi) = \frac{r^2}{2l} g(\varphi) + C, \quad (14.8)$$

где  $C$  – произвольная константа.

Случай 3. Для  $\alpha = 1$ ,  $\beta = h > 0$  получаем граничное условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) + hu(r, \varphi) \right|_{r=l} = g(\varphi) \text{ с дополнительной функцией}$$

$$w(r, \varphi) = \frac{r^2}{l(2 + hl)} g(\varphi). \quad (14.9)$$

Таким образом, решение (14.4), в котором функция  $w(r, \varphi)$  может быть представлена одним из выражений (14.6)–(14.9), позволяет решать уравнение Пуассона с однородным граничным условием вместо решения подобного уравнения (или уравнения Лапласа при  $f \equiv 0$ ) с неоднородным граничным условием (14.3). Решение уравнения Пуассона с однородным граничным условием будет обсуждаться ниже.

*Задание.* Решить задачу внутри кольца:  $a \leq r \leq b$ . Граничные условия задаются уравнением (14.3) (с противоположным знаком для  $\beta$ , чтобы убедиться, что вектор нормали должен быть внешним) и

$$\alpha_b u_r(r, \varphi) + \beta_b u(r, \varphi) \Big|_{r=b} = g_b(\varphi).$$

*Совет.* Если  $\alpha \neq 0$  и  $\alpha_b \neq 0$ , то выбрать квадратичную функцию относительно  $r$  для функции  $w$  или линейную функцию в противоположном случае.

*Задание.* Свести решение уравнения Лапласа внутри кругового сектора с неоднородными граничными условиями

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, \\ u(r, \varphi) \Big|_{r=l} &= g(\varphi), \\ u(r, \varphi) \Big|_{\varphi=0, \alpha} &= f_{0, \alpha}(r) \end{aligned}$$

к решению уравнения Пуассона с однородными граничными условиями на границах  $\varphi = 0, \alpha$ .

*Совет.* Определить вспомогательную функцию  $w(r, \varphi)$  как

$$w(r, \varphi) = u(r, \varphi) + \frac{\alpha - \varphi}{\alpha} [f_0(r) - f_\alpha(r)] + f_\alpha(r).$$

## 15. Уравнение Пуассона с однородными граничными условиями в полярной системе координат

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = -f^*(r, \varphi) \quad (15.1)$$

с однородным граничным условием

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial r}(r, \varphi) + \beta v(r, \varphi) \Big|_{r=l} = 0. \quad (15.2)$$

Напомним, что решение уравнения Пуассона будет нетривиальным для случая однородных граничных условий (15.2). Метод решения такой краевой задачи обсуждался в разделах 8 и 9. Однако в большинстве случаев метод, основанный на разложении в ряд по собственным функциям оператора Лапласа, будет более эффективным.

Решение задачи (15.1), (15.2) можно разложить в ряд по собственным функциям оператора Лапласа (которые являются решением задачи Штурма-Лиувилля в той же области):

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [A_{nm} V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) + B_{nm} V_{nm}^{(2)}(r, \varphi)], \quad (15.3)$$

где  $V_{nm}^{(1)}(r, \varphi)$ ,  $V_{nm}^{(2)}(r, \varphi)$  – собственные функции лапласиана, соответствующие граничным условиям краевой задачи. Очевидно, что в силу ортогональности собственных функций, неизвестные коэффициенты в решении (15.3) можно найти через функцию  $v(r, \varphi)$ :

$$A_{nm} = \frac{1}{\|V_{nm}^{(1)}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^l v(r, \varphi) V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) r dr d\varphi, \quad (15.4)$$

$$B_{nm} = \frac{1}{\|V_{nm}^{(2)}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^l v(r, \varphi) V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

Для нахождения окончательного решения умножим уравнение (15.1) на  $V_{nm}^{(1)}(r, \varphi)$  и  $V_{nm}^{(2)}(r, \varphi)$  и проинтегрируем по круговой области радиуса  $l$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \nabla^2 v V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) r dr d\varphi = - \int_0^{2\pi} \int_0^l f^*(r, \varphi) V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) r dr d\varphi, \quad (15.5)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \nabla^2 v V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) r dr d\varphi = - \int_0^{2\pi} \int_0^l f^*(r, \varphi) V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) r dr d\varphi. \quad (15.6)$$

Подставляя решение (15.3) в уравнения (15.5) и (15.6) и учитывая, что  $V_{nm}^{(1)}(r, \varphi)$  и  $V_{nm}^{(2)}(r, \varphi)$  – собственные функции лапласиана, получим

$$\nabla^2 V_{nm}^{(1,2)}(r, \varphi) = -\lambda_{nm} V_{nm}^{(1,2)}(r, \varphi).$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \equiv \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2} \nabla_\varphi^2,$$

представим левые части уравнений (15.5) and (15.6) в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} \int_0^{2\pi} \int_0^l [A_{ij} V_{ij}^{(1)}(r, \varphi) + B_{ij} V_{ij}^{(2)}(r, \varphi)] V_{ij}^{(p)}(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

В силу ортогональности собственных функций (11.14), ненулевые слагаемые имеют вид

$$\lambda_{nm} A_{nm} \|V_{nm}^{(p)}\|^2.$$

Сравнивая это с правыми частями уравнений (15.5) и (15.6), получаем

$$\lambda_{nm} A_{nm} = f_{nm}^{(1)}, \quad \lambda_{nm} B_{nm} = f_{nm}^{(2)}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$f_{nm}^{(1)} = \frac{1}{\|V_{nm}^{(1)}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a f^*(r, \varphi) V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) r dr d\varphi, \quad (15.7)$$

$$f_{nm}^{(2)} = \frac{1}{\|V_{nm}^{(2)}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a f^*(r, \varphi) V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

В случае граничного условия первого или третьего рода (условие Дирихле или смешанное условие – условие Робена) собственные значения  $\lambda_{nm} \neq 0$  для любого  $n, m = 0, 1, 2, \dots$  и решение определяется однозначно:

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nm}} [f_{nm}^{(1)} V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) + f_{nm}^{(2)} V_{nm}^{(2)}(r, \varphi)]. \quad (15.8)$$



Для случая второй краевой задачи, т.е. с граничным условием второго рода (или условием Неймана) собственное значение  $\lambda_{00} = 0$  ( $V_{00}^{(1)} = 1, V_{00}^{(2)} = 0$ ), но все остальные собственные значения  $\lambda_{nm}$  ненулевые.

Если

$$f_{00}^{(1)} = \int_0^{2\pi} \int_0^l f^*(r, \varphi) r dr d\varphi = 0,$$

то коэффициент  $A_{00}$  не определен, но все другие коэффициенты определяются однозначно. Решение задачи существует, но определено с точностью до аддитивной постоянной:

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ A_{nm} V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) + B_{nm} V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) \right] + \text{const.}$$

Если

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l f^*(r, \varphi) r dr d\varphi \neq 0,$$

то решение данной задачи не существует.

В результате *общее решение* уравнения Пуассона с неоднородным граничным условием в круговой области можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= w(r, \varphi) + v(r, \varphi) = \\ &= w(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ A_{nm} V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) + B_{nm} V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) \right], \end{aligned}$$

или

$$u(r, \varphi) = w(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi \right] J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{l} r \right), \quad (15.9)$$

где

$$A_{nm} = \frac{f_{nm}^{(1)}}{\lambda_{nm}} = \frac{1}{\lambda_{nm} \|V_{nm}^{(1)}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^l f^*(r, \varphi) V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) r dr d\varphi, \quad (15.10)$$

$$B_{nm} = \frac{f_{nm}^{(2)}}{\lambda_{nm}} = \frac{1}{\lambda_{nm} \|V_{nm}^{(2)}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^l f^*(r, \varphi) V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) r dr d\varphi, \quad (15.11)$$

$V_{nm}^{(p)}(r, \varphi)$  определяются формулами (14.1), вспомогательная функция  $w(r, \varphi)$  удовлетворяет граничному условию (14.5).

*Упражнение.* Объяснить почему: 1) для граничных условий первого или третьего рода собственные значения  $\lambda_{nm} \neq 0$  для всех  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ ; 2) для граничного условия второго рода собственное значение  $\lambda_{00} = 0$ , а все остальные отличны от нуля.

**Пример 14.** Вернемся к краевой задаче, которая была решена в разделе 8:

$$\nabla^2 u = -Axy = -\frac{A}{2} r^2 \sin(2\varphi), \quad 0 \leq r < l, \quad (15.12)$$

$$u|_{r=l} = 0. \quad (15.13)$$

Убедимся, что решение, полученное ранее, эквивалентно решению, получаемому с помощью метода, изложенного в этом разделе.

*Решение.* Решение краевой задачи (15.12), (15.13) представим в виде ряда (15.8) с коэффициентами  $f_{nm}^{(1,2)}$ , которые определяются формулами (15.7). Очевидно, что

$$f(r, \varphi) = \frac{A}{2} r^2 \sin 2\varphi = \sin 2\varphi \sum_{m=1}^{\infty} f_{2m}^{(2)} J_2(k_{2m} r),$$

где  $k_{2m}$  – решения уравнения  $J_2(k_{2m} l) = 0$ ,

$$f_{2m}^{(2)} = \frac{A}{2 \|V_{2m}\|^2} \int_0^l r^3 J_2(k_{2m} r) dr, \quad \|V_{2m}\|^2 = \frac{l^2}{2} [J_2'(k_{2m} l)]^2. \quad (15.14)$$

Другой коэффициент  $f_{nm}^{(1)} = 0$ . Вычисляя интеграл в (4.92), найдем значения  $f_{2m}^{(2)}$ :

$$f_{2m}^{(2)} = -\frac{Al^2 J_0(k_{2m} l)}{2 [J_2'(k_{2m} l)]^2}.$$

Учитывая, что  $\lambda_{nm} = k_{nm}^2$ , запишем окончательный вид решения рассматриваемой краевой задачи:

$$u(r, \varphi) = -\frac{Al^2}{2} \sin(2\varphi) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(k_{2m}l)J_2(k_{2m}r)}{k_{2m}^2 [J_2'(k_{2m}l)]^2}. \quad (15.15)$$

С другой стороны, это решение должно совпадать с решением (8.24):

$$u(r, \varphi) = \frac{A}{24} r^2 (l^2 - r^2) \sin 2\varphi. \quad (15.16)$$

Раскладывая функцию (4.94) в ряд Фурье-Бесселя, получим

$$u(r, \varphi) = \frac{A}{24} r^2 (l^2 - r^2) \sin(2\varphi) = \sin(2\varphi) \sum_{m=1}^{\infty} u_m J_m(k_{2m}r),$$

где

$$u_m = \frac{A}{12a^2 [J_2'(k_{2m}l)]^2} \int_0^l r^3 (l^2 - r^2) J_2(k_{2m}r) dr. \quad (15.17)$$

Интегрируя формулу (15.17) дважды по частям и используя формулы

$$x^3 J_2(x) = [x^3 J_3(x)]', \quad x^{-2} J_3(x) = -[x^{-2} J_2(x)]',$$

получим выражение

$$u_m = \frac{A}{k_{2m}^2 l^2 [J_2'(k_{2m}l)]^2} \int_0^l r^3 J_2(k_{2m}r) dr.$$

Легко показать, что  $f_{2m}^{(2)} = -k_{2m}^2 u_m$ , т.е. решения (15.15) и (15.16) совпадают.

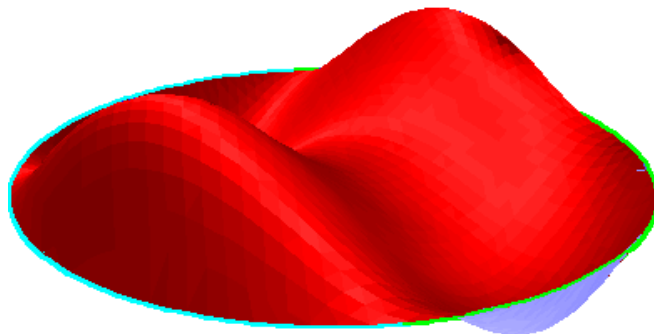


Рис. 9. График поверхности, определяемой функцией  $u(r, \varphi)$  из примера 14

## 16. Уравнение Лапласа и Пуассона в сферической системе координат

Решение уравнений Лапласа и Пуассона в сферической системе координат с помощью методов разделения переменных и разложения по мультиполям подробно изложены в [2,16]. Собственные функции оператора Лапласа в этой системе координат приведены в [2,8,16]. В данном разделе мы приведем несколько примеров решения задач.

**Пример 15.** Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Пусть дана сфера радиуса  $r_0$ . В силу симметрии удобно решать задачу в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ . Поместим начало координат в центр сферы. Рассмотрим две задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

– внутренняя задача –  $\Delta u = 0$  при  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $u|_{r=r_0} = f(\theta, \varphi)$ ;

– внешняя задача –  $\Delta u = 0$  при  $r \geq r_0$ ,  $u|_{r=r_0} = f(\theta, \varphi)$ ,

где  $f = f(\theta, \varphi)$  – заданная функция на поверхности сферы.

*Решение.* Оператор Лапласа в сферических координатах имеет следующий вид:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Решение уравнения Лапласа будем искать с помощью метода разделения переменных:

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi), \quad Y(\varphi, \theta) = \Phi(\varphi) \Theta(\theta).$$

Подставляя первую функцию в уравнение Лапласа, выделим отдельно радиальную часть:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{n}{r^2} R = 0, \quad \Delta_{\theta, \varphi} Y + m Y = 0, \quad (16.1)$$

где  $\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ,  $n$  – константа разделения переменных.

Решение первого дифференциального уравнения (16.1) можно представить в виде

$$R = C_1 r^n + C_2 \frac{1}{r^{n+1}}, \quad (16.2)$$

решением второго (16.1) являются сферические функции:

$$m = 0 \quad Y_n^{(0)} = P_n(\cos \theta);$$

$$m = 1 \quad Y_n^{(-1)} = P_n^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi, \quad Y_n^{(1)} = P_n^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi;$$

.....

$$m = k \quad Y_n^{(-k)} = P_n^{(k)}(\cos \theta) \cos k\varphi, \quad Y_n^{(k)} = P_n^{(k)}(\cos \theta) \sin k\varphi,$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Чтобы решение задачи Дирихле было конечным при любых значениях  $r$ , необходимо для внутренней задачи в решении (16.2) положить  $C_2 = 0$ , а для внешней  $C_1 = 0$ . Таким образом, решение задачи Дирихле для сферы имеет вид:

$$\text{– внутренняя задача – } u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n Y_n(\theta, \varphi), \quad r \leq r_0; \quad (16.3)$$

$$\text{– внешняя задача – } u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi), \quad r \geq r_0, \quad (16.4)$$

где  $Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=-n}^n (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta)$ . Неизвестные коэффициенты  $A_{mn}$  и  $B_{mn}$  находятся из разложения функции  $f(\varphi, \theta)$  в ряд Фурье по сферическим функциям:

$$A_{mn} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\varphi d\theta, \quad (16.5)$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin m\varphi \sin \theta d\varphi d\theta. \quad (16.6)$$

**Пример 16.** Найти напряженность электростатического поля внутри и вне сферы радиуса  $r = r_0$ , верхняя половина которой заряжена до потенциала  $v_1$ , а нижняя – до  $v_2$ .

Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  связана с потенциалом  $v$  известным соотношением

$$\vec{E} = \nabla v. \quad (16.7)$$

Задачу будем решать в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$ , расположив начало в центре отсчета сферы и направив полярную ось перпендикулярно плоскости разделения полусфер. Понятно, что поставленная задача представляет собой задачу Дирихле для уравнения Лапласа (см. пример 1) со следующим граничным условием:

$$v|_{r=r_0} = \begin{cases} v_1, & 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ v_2, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (16.8)$$

где  $v = v(r, \theta, \varphi)$  – потенциал в точке  $(r, \theta, \varphi)$ . Толщиной стенок сферы пренебрегаем.

Решение этой задачи для внутренней и внешней области рассматривалось в примере 1 (разложения (16.3) и (16.4) соответственно):

$$\text{– внутренняя задача – } v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n Y_n(\theta, \varphi), \quad r \leq r_0, \quad (16.9)$$

$$\text{– внешняя задача – } v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi), \quad r \geq r_0. \quad (16.10)$$

Очевидно, что электрическое поле является осесимметричным и не зависит от координаты  $\varphi$ . Таким образом, коэффициенты  $A_{mn}$  и  $B_{mn}$  в формуле  $Y_n(\theta, \varphi)$  будут равны нулю для  $m \neq 0$ . Следовательно, сферические функции  $Y_n(\theta, \varphi)$  будут иметь вид

$$Y_n(\theta, \varphi) = c_n P_n(\cos \theta). \quad (16.11)$$

Решения (16.9) и (16.10) с учетом (16.11) будут иметь вид

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{r}{r_0} \right)^n P_n(\cos \theta), \quad r \leq r_0, \quad (16.12)$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta), \quad r \geq r_0. \quad (16.13)$$

Сравнивая полученные решения (16.12), (16.13) с аналогичными (16.3), (16.4), на основании формул (16.5)–(16.6) найдем коэффициенты разложения  $a_n$ :

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (16.14)$$

где  $f(\theta)$  – значение функции  $v$  на поверхности сферы. Подставив в (16.14) граничное условие (16.8), получим

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2} \left( \int_0^{\pi/2} v_1 P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta + \int_{\pi/2}^\pi v_2 P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right) = \\ &= \frac{2n+1}{2} \left( v_1 \int_0^1 P_n(x) dx + v_2 \int_{-1}^0 P_n(x) dx \right). \end{aligned} \quad (16.15)$$

Напомним, что полиномы Лежандра имеют одинаковую четность с индексом  $n$ , т.е.

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Тогда

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \left( v_1 + (-1)^n v_2 \right) \int_0^1 P_n(x) dx.$$

Из полученной формулы вытекает, что

$$a_0 = \frac{1}{2} (v_1 + v_2), \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k+1} = \frac{v_1 - v_2}{2^{2k+1}} (-1)^k (4k+1) \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}. \quad (16.16)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов  $a_n$  в решения (16.12) и (16.13), найдем искомый потенциал электростатического поля. Подставляя полученные решения в формулу (16.7), найдем напряженность электрического поля.

## 17. Задачи

### *Внутренняя задача Дирихле для круговой области*

1. Найти электростатический потенциал бесконечно длинного цилиндра кругового сечения радиуса  $r = l$ , если потенциал боковой поверхности определяется функцией

$$f(\varphi) = \sin 5\varphi.$$

*Совет.* Краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leq r < l, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$u(r, \varphi)|_{r=l} = \sin 5\varphi.$$

Для бесконечного цилиндра функция  $u$  не зависит от  $z$ .

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = \left(\frac{r}{l}\right)^5 \sin 5\varphi.$

2. Решить предыдущую задачу с граничным условием  $u|_{r=l} = A$ , где  $A = \text{const}$ .

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = A.$

3. Решить предыдущую задачу с граничным условием  $u|_{r=l} = A \cos \varphi$ .

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = \frac{A}{l} r \cos \varphi$  или  $u(x, y) = \frac{A}{l} x.$

4. Найти стационарное распределение температуры в тонкой однородной пластине радиуса  $l$ , если ее край, с одной стороны ( $0 \leq \varphi < \pi/2$ ) поддерживается при температуре  $A = \text{const}$ , а с другой ( $\pi/2 \leq \varphi < 2\pi$ ) – при температуре  $B = \text{const}$ . Теплообменом между поверхностью пластины и окружающей средой пренебречь (т.е. поверхность пластины теплоизолированная).

*Совет.* Стационарное уравнение теплопроводности – уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leq r < l, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

и граничное условие



$$u(l, \varphi) = \begin{cases} A, & 0 \leq \varphi < \pi / 2, \\ B, & \pi / 2 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

*Ответ*

$$u = \frac{A + 3B}{4} + \frac{A - B}{\pi} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{r}{l} \right)^n \frac{\sin n\varphi}{n} - (-1)^n \left( \frac{r}{l} \right)^{2n} \left( \frac{l}{r} \frac{\cos(2n-1)\varphi}{2n-1} + \frac{\sin 2n\varphi}{2n} \right) \right].$$

При решении задач 5-7 нужно рассматривать круг радиуса  $l$  с центром в начале систему координат. Пусть  $(r, \varphi)$  – полярная система координат и  $(x, y)$  – декартовая. Найти решение первой внутренней задачи для уравнения Лапласа со следующими граничными условиями:

5.  $u|_{r=l} = A + By$ .

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = A + Br \sin \varphi$  или  $u(x, y) = A + By$ .

6.  $u|_{r=l} = Axy$ .

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = \frac{A}{2l^2} r^2 \sin 2\varphi$  или  $u(x, y) = Axy$ .

7.  $u|_{r=l} = A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi$ .

*Совет.* При получении решения, необходимо принять во внимание, что  $x, y, xy, x^2 - y^2$  и их линейные комбинации являются гармоническими функциями. Можно также проверить полученное решение, подставляя его уравнение и граничное условие.

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = \frac{A}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{l^2} \cos 2\varphi \right) + \frac{B}{2} \left( 1 + \frac{r^2}{l^2} \cos 2\varphi \right)$  или

$$u(x, y) = \frac{A + B}{2} + \frac{B - A}{2l^2} (x^2 - y^2).$$

*Комментарий.* В представленных решениях только несколько слагаемых ряда Фурье отличны от нуля, т.к. коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  ненулевые только для некоторых значений  $n$ , от которых зависят

функции синуса и косинуса в граничных условиях. Например, в задаче 27 граничное условие зависит только от  $\cos \varphi$ , поэтому в решении только одно слагаемое ряда Фурье отлично от нуля:  $\cos \varphi$  с коэффициентом  $A$ .

В задачах 8-12 тонкая круглая пластина радиуса  $l = 10$  лежит в плоскости  $Oxy$  и центр окружности находится в точке  $O(0,0)$ . Поверхности теплоизолированы, на границе пластины поддерживается определенная температура, значение которой задается функцией полярного угла  $\tilde{u}(\varphi)$ , определенной ниже.

(a) Найти распределение температуры внутри пластины.

(b) Найти температуру с точностью  $10^{-4}$  в точках  $P_1(r = 1, \varphi = \pi / 6)$  и  $P_2(r = 5, \varphi = \pi / 6)$ .

8.  $\tilde{u}(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2}$

9.  $\tilde{u}(\varphi) = 0.5 + \sin \frac{\varphi}{2}$

10.  $\tilde{u}(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{\pi}$

11.  $\tilde{u}(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}$

12.  $\tilde{u}(\varphi) = 0.02\varphi^2 - 0.04\pi\varphi$ .

В задачах 13–14 тонкая круглая пластина радиуса  $l = 10$  лежит в плоскости  $Oxy$  и центр окружности находится в точке  $O(0,0)$ . Поверхности электроизолированы, на границе пластины поддерживается определенный потенциал, значение которого задается функцией полярного угла  $\tilde{u}(\varphi)$ , определенной ниже.

(a) Найти электрический потенциал в пластине.

(b) Найти электрический потенциал в точках  $P_1(r = 1, \varphi = \pi / 6)$  и  $P_2(r = 5, \varphi = \pi / 6)$  с точностью  $10^{-4}$ .

$$13. \tilde{u}(\varphi) = 1 / \pi + 0.1 \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$14. \tilde{u}(\varphi) = 0.2 \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{10\pi}.$$

В задачах 15–16 ось симметрии бесконечно длинной цилиндрической тонкостенной трубы кругового сечения радиуса  $l = 10$  совпадает с осью  $z$ . На боковой поверхности цилиндра поддерживается определенный потенциал, значение которого задается функцией полярного угла  $\tilde{u}(\varphi)$ , определенной ниже.

(а) Найти электрический потенциал внутри цилиндра.

(б) Найти электрический потенциал в точках  $P_1(r = 1, \varphi = \pi / 6)$  и  $P_2(r = 5, \varphi = \pi / 6)$  с точностью  $10^{-4}$ .

$$15. \tilde{u}(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$16. \tilde{u}(\varphi) = \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{\pi^2}.$$

### ***Внутренняя задача Неймана для круговой области***

Напомним, что решение второй краевой задачи определено с точностью до аддитивной постоянной, поэтому все приведенные решения содержат константу  $C$ .

17. Найти стационарное распределение температуры в бесконечно длинном круговом цилиндре радиуса  $l$ , если на боковой поверхности задан тепловой поток:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r}(l, \varphi) \right|_{r=l} = f(\varphi) = A \sin \varphi + B \sin^3 \varphi.$$

*Совет.* Краевая задача состоит из уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leq r < l, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

с граничным условием

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) \right|_{r=l} = A \sin \varphi + B \sin^3 \varphi.$$

Решение задачи существует, т.к.

$$\int_C f_2(l, \varphi) ds = \frac{2}{l} \left[ 3(A + 2B) \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi - 5B \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi \right] = 0.$$

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = \left( A + \frac{3}{4} B \right) r \sin \varphi - \frac{B}{12l^2} r^3 \sin 3\varphi + C$  или

$$u(x, y) = \left( A + \frac{3}{4} B \right) y - \frac{B}{12l^2} \left[ 3(x^2 + y^2)y - 4y^3 \right] + C.$$

В задачах 18–22 решить вторую краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$\nabla^2 u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = f(\varphi),$$

для окружности  $C$  радиуса  $l$  с центром в точке  $r = 0$  для следующих случаев:

**18.**  $f = A$ .

*Ответ.* Решения не существует, т.к.  $\int_C f ds \neq 0$ .

**19.**  $f = Ax$ .

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = Alr \cos \varphi + C$  или  $u(x, y) = A lx + C$ .

**20.**  $f = A(x^2 - y^2)$ .

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = \frac{A}{2} lr^2 \cos 2\varphi + C$  или  $u(x, y) = \frac{A}{2} l(x^2 - y^2) + B$ .

**21.**  $f = A \cos \varphi + B$ .

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = Alr \cos \varphi + C$ , если  $B = 0$ .

Если  $B \neq 0$ , то решения не существует, т.к.  $\int_C f ds \neq 0$ .

**22.**  $f = A \sin \varphi + B \sin^3 \varphi$ .

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = \left( A + \frac{3}{4} B \right) r \sin \varphi - \frac{B}{12l^2} r^3 \sin 3\varphi + C$  или

$$u(x, y) = \left( A + \frac{3}{4} B \right) y - \frac{B}{12l^2} \left[ 3(x^2 + y^2)y - 4y^3 \right] + C.$$

*Совет.* Проверьте, для примера, задачу 19, в которой  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=l} = Ax$ .

Функция  $u(x, y) = Dx$  или  $u(r, \varphi) = Dr \cos \varphi$  является гармонической. Дифференцирование по нормали к окружности совпадает с дифференцированием по  $r$ . Из граничного условия находим  $D = lA$ , следовательно,  $u(x, y) = Alx$  или  $u(r, \varphi) = Alr \cos \varphi$ .

### ***Различные внутренние задачи для круговой области***

**23.** Найти стационарное распределение температуры внутри бесконечно длинного кругового цилиндра радиуса  $l$ , если на боковой поверхности задано условие теплообмена с окружающей средой. Температура окружающей среды

$$u_{md}(\varphi) = \sin \varphi + \cos 4\varphi.$$

*Совет.* Краевая задача состоит из уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leq r < l, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

и граничного условия

$$\frac{\partial u}{\partial r}(l, \varphi) + h[u(l, \varphi) - u_{md}(\varphi)] = 0, \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(l, \varphi) + hu(l, \varphi) = h(\sin \varphi + \cos 4\varphi).$$

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = \frac{hl}{hl+1} \frac{r}{l} \sin \varphi + \left( \frac{r}{l} \right)^4 \frac{hl}{hl+4} \cos 4\varphi.$

В задачах 24–27 найти решение уравнения Лапласа внутри круговой области ( $0 \leq r \leq l$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) со следующим граничным условием:

**24.**  $u|_{r=l} = 2 \sin^2 \varphi + 4 \cos^3 \varphi.$

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = 1 + 3 \frac{r}{l} \cos \varphi - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos 2\varphi + \left(\frac{r}{l}\right)^3 \cos 3\varphi.$

**25.**  $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=l} = 4 \sin^4 \varphi - \frac{3}{2}.$

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = \frac{l}{8} \left(\frac{r}{l}\right)^4 \cos 4\varphi - l \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos 2\varphi + \text{const}.$

**26.**  $u|_{r=l} = 32(\sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi).$

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = 20 + 12 \left(\frac{r}{l}\right)^4 \cos 4\varphi.$

**27.**  $\left. \frac{\partial u}{\partial r} + hu \right|_{r=l} = \sin \varphi + \cos 4\varphi.$

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = \frac{r}{hl+1} \sin \varphi + \frac{1}{l^3} \frac{r^4}{hl+4} \cos 4\varphi.$

### ***Различные внешние задачи для круговой области***

В задачах 28–30 найти решение краевой задачи для уравнения Лапласа в области  $r \geq l$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  со следующим граничным условием:

**28.**  $u|_{r=l} = 8 \cos^4 \varphi.$

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = 3 + 4 \left(\frac{l}{r}\right)^2 \cos 2\varphi + \left(\frac{l}{r}\right)^4 \cos 4\varphi.$

**29.**  $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=l} = \sin \varphi + 4 \sin^3 \varphi.$

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = -4 \frac{l^2}{r} \sin \varphi + \frac{l^4}{3r^3} \sin 3\varphi + \text{const}.$

**30.**  $\left. \frac{\partial u}{\partial r} - hu \right|_{r=l} = 1 + \cos 2\varphi.$

Ответ.  $u(r, \varphi) = -\frac{1}{h} - \frac{l}{hl + 2} \left(\frac{l}{r}\right)^2 \cos 2\varphi.$

### **Различные задачи для кругового сектора**

В задачах 31–34 найти решение краевой задачи для уравнения Лапласа внутри кругового сектора ( $0 \leq r \leq l$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ) со следующим граничным условием:

**31.**  $\alpha = \pi$ ,  $u|_{r=l} = A \sin^2 \varphi + 2B \cos^2 \varphi$ ,  $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0.$

Ответ.  $u(r, \varphi) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n(n^2 - 4)} (Bn^2 - A) \left(\frac{r}{l}\right)^n \sin n\varphi$  или

$$u(r, \varphi) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B(2k+1)^2 - A}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)} \left(\frac{r}{l}\right)^{2k+1} \sin(2k+1)\varphi.$$

Отметим, что граничные условия вдоль границ сектора не согласованы с граничным условием на границе окружности при  $B \neq 0$ . Это приводит к медленной сходимости ряда вблизи точек пересечения этих границ. Такие задачи помечены знаком (\*).

**32\*.**  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $u|_{r=l} = 1$ ,  $u|_{\varphi=0} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = 0.$

Ответ.  $u(r, \varphi) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r}{l}\right)^{4n+2} \sin(4n+2)\varphi.$

**33.**  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $u|_{r=l} = 1 + \cos 4\varphi$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0.$

Ответ.  $u(r, \varphi) = 1 + \left(\frac{r}{l}\right)^4 \cos 4\varphi.$

**34\*.**  $\alpha = \pi$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=l} = \sin \varphi$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0.$

$$\text{Ответ. } u(r, \varphi) = -\frac{16l}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(4n^2-1)} \left(\frac{r}{l}\right)^{n+1/2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi.$$

### Уравнение Лапласа в кольце

В задачах 35–38 решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце ( $a \leq r \leq b$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) со следующим граничным условием:

$$35. u|_{r=a} = 0, u|_{r=b} = \sin \varphi + 2 \cos^2 \varphi.$$

$$\text{Ответ. } u(r, \varphi) = \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \frac{b}{r} \sin \varphi + \frac{r^4 - a^4}{b^4 - a^4} \left(\frac{b}{r}\right)^2 \cos 2\varphi.$$

$$36. \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = 4 \sin^3 \varphi, u|_{r=b} = 0.$$

$$\text{Ответ. } u(r, \varphi) = -3 \frac{b^2 - r^2}{b^2 + a^2} \frac{a^2}{r} \sin \varphi + \frac{1}{3} \frac{b^6 - r^6}{b^6 + a^6} \frac{a^4}{r^3} \sin 3\varphi.$$

$$37. u|_{r=a} = 1, \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=b} = 2 \sin^2 \varphi.$$

$$\text{Ответ. } u(r, \varphi) = 1 - \frac{r^4 - a^4}{2(b^4 + a^4)} \frac{b^3}{r^2} \cos 2\varphi + b \ln \frac{r}{a}.$$

$$38. \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = \sin \varphi, \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=b} = \cos \varphi.$$

$$\text{Ответ. } u(r, \varphi) = \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r} \cos \varphi - \frac{r^2 + b^2}{b^2 - a^2} \frac{a^2}{r} \sin \varphi.$$

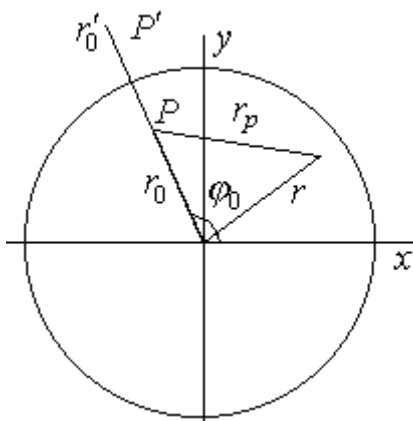


Рис. 10. Геометрия задачи 39

### Двумерное уравнение Пуассона

39. Найти стационарное распределение температуры в тонкой однородной круглой пластине радиуса  $l$ , если край пластины поддерживается при нулевой температуре и



размещен постоянный источник тепла мощностью  $Q$  в т.  $P(r_0, \varphi_0)$  ( $0 \leq r_0 < l$ ,  $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ ). Поверхности пластины теплоизолированные.

*Ответ.* Математическая постановка состоит из уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -Q \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0).$$

С однородным граничным условием  $u(r, \varphi)|_{r=l} = 0$ .

Рассмотрим два пути решения задачи:

**А.** Сначала решим задачу с использованием собственных функций оператора Лапласа. В этом случае собственные значения  $\lambda_{nm} = (\mu_m^{(n)} / l)^2$ , где  $\mu_m^{(n)}$  – положительные корни уравнения  $J_n(\mu) = 0$ , а собственные функции

$$V_{nm}^{(1)}(r, \varphi) = J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{l} r \right) \cos n\varphi, \quad V_{nm}^{(2)}(r, \varphi) = J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{l} r \right) \sin n\varphi.$$

$$\|V_{nm}^{(1)}\|^2 = \|V_{nm}^{(2)}\|^2 = \sigma_n \pi \frac{a^2}{2} [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2, \quad \sigma_n = \begin{cases} 2 & \text{при } n = 0, \\ 1 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты разложения  $f_{nm}^{(1)}$  and  $f_{nm}^{(2)}$ :

$$f_{nm}^{(1)} = \frac{2Q}{\sigma_n \pi l^2 [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2} \cos(n\varphi_0) J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{l} r_0 \right),$$

$$f_{nm}^{(2)} = \frac{2Q}{\sigma_n \pi l^2 [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2} \sin(n\varphi_0) J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{l} r_0 \right).$$

Следовательно, распределение температуры внутри пластины определяется рядом

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{l^2}{(\mu_m^{(n)})^2} [f_{nm}^{(1)} \cos(n\varphi) + f_{nm}^{(2)} \sin(n\varphi)] J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{l} r \right).$$

**В.** Второй способ решения заключается в нахождении частного решения уравнения Пуассона с использованием электростатической аналогии (см. уравнения (9.30)–(9.32)):

$$u_p = Q \ln \frac{l}{r_p} = -\frac{Q}{2} \ln \frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{l^2}.$$

Это решение описывает электростатический потенциал заряженной бесконечной тонкой нити в точке  $(r_0, \varphi_0)$ . Очевидно, что это решение не удовлетворяет граничному условию, поэтому необходимо добавить решение уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} = 0$$

с граничным условием

$$u_0(r, \varphi) \Big|_{r=l} = -u_p(l, \varphi) = \frac{Q}{2} \ln \left[ 1 + t^2 - 2t \cos(\varphi - \varphi_0) \right],$$

где  $t = r_0/l < 1$ . С помощью уравнения (9.27)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n \cos n\theta = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2t \cos \theta + t^2)$$

получим граничное условие для  $u_0$ :

$$u_0(l, \varphi) = -Q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n \cos n(\varphi - \varphi_0).$$

Приводя подобные слагаемые, запишем решение уравнения Лапласа для данного граничного условия как

$$\begin{aligned} u_0(r, \varphi) &= -Q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{rr_0}{l^2} \right)^n \cos n(\varphi - \varphi_0) = \\ &= \frac{Q}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{rr_0}{l^2} \right)^2 - 2 \frac{rr_0}{l^2} \cos(\varphi - \varphi_0) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение задачи

$$u(r, \varphi) = u_0 + u_p = \frac{Q}{2} \ln \frac{l^4 + (rr_0)^2 - 2l^2 rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{l^2 [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]}.$$

**40.** Найти стационарное распределение температуры в тонком однородном круглом диске радиуса  $l$ , который подогревается постоянным распределенным тепловым источником мощностью

$Q(r, \varphi) = r^2 \cos 2\varphi$ , если граница диска поддерживается при нулевой температуре. Поверхности диска теплоизолированные.

*Ответ.*  $u = \frac{1}{12} \left[ 2 \left( \frac{r}{l} \right)^2 - \left( \frac{r}{l} \right)^4 \right] \cos 2\varphi.$

**41.** Найти решение уравнения Пуассона  $\nabla^2 u = -A$  в кольце  $a \leq r \leq b$ , если  $u|_{r=a} = u_1$ ,  $u|_{r=b} = u_2$ , где  $A$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  – постоянные.

*Ответ.*  $u(r, \varphi) = u_2 - \frac{A}{4} (r^2 - b^2) + \frac{u_1 - u_2 - A(b^2 - a^2)/4}{\ln b - \ln a} \ln \frac{b}{r}.$

**42.** Найти решение краевой задачи для круглого тонкого диска

$$\nabla^2 u = 1, \quad r < l, \quad u|_{r=l} = 0.$$

*Ответ.*  $u = \frac{1}{4} (r^2 - l^2).$

**43.** Решить уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 u = A + B(x^2 - y^2)$$

для кольца  $a \leq r \leq b$  со следующими граничными условиями:

$$u|_{r=a} = c, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0.$$

*Ответ*

$$u = c + \frac{A}{4} \left( r^2 - a^2 - 2b^2 \ln \frac{r}{a} \right) + \frac{B}{12} \left[ r^2 (r^2 - a^2) - b^4 \frac{2b^2 - a^2}{a^4 + b^4} \frac{r^4 - a^4}{r^2} \right] \cos 2\varphi.$$

### ***Вычисление конечных рядов с заданной точностью***

В задачах 44–47 боковая поверхность бесконечного круглого цилиндра радиуса  $l = 10$  поддерживается при постоянной температуре. Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра

виде бесконечного ряда и в точках  $P_1(1, \pi / 6)$ ,  $P_2(5, \pi / 6)$ ,  $P_3(8, \pi / 6)$  с точностью  $10^{-5}$  для следующих граничных условий:

$$44. u(r, \varphi)|_{r=l} = \cos(\varphi / 2) - \sin(\varphi / 2).$$

$$45. u(r, \varphi)|_{r=l} = 0.5 \cos(\varphi / 2) + 1 / 2.$$

$$46. u(r, \varphi)|_{r=l} = \varphi / \pi + \cos \varphi.$$

$$47. u(r, \varphi)|_{r=l} = \varphi / \pi^2 - \sin(\varphi / 4).$$

### Уравнения Лапласа и Пуассона для цилиндрического объема

48. Найти распределение тепла внутри однородного цилиндра радиуса  $l$  и высотой  $H$ , если его боковая поверхность и одно из оснований поддерживаются при постоянной температуре  $T_0$ , а на другом основании задан тепловой поток  $T_z|_{z=H} = Q_0 \delta(r)$ .

$$\text{Ответ. } T = T_0 + \frac{2Q_0}{l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(k_m r) \sinh k_m z}{J_1^2(k_m l) k_m \cosh k_m H},$$

где  $J_0(k_m l) = 0$ . Здесь используются соотношения  $J'_0(x) = -J_1(x)$  и  $\delta(r) = \delta(x)\delta(y)$ , где  $\delta(r)$  – дельта-функция.

49. Решить предыдущую задачу для случая  $T_z|_{z=H} = Q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$ , где  $x_0 = r_0 \cos \theta_0$ ,  $y_0 = r_0 \sin \theta_0$ .

Ответ

$$T = T_0 + \frac{Q_0}{\pi a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_n(k_{mn} r_0) J_n(k_{mn} r) \cos n(\varphi - \varphi_0) \sinh k_{mn} z}{[J'_n(k_{mn} a)]^2 k_{mn} \cosh k_{mn} H},$$

где  $J_n(k_{mn} l) = 0$  и  $A_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \neq 0. \end{cases}$

50. Найти решение краевой задачи

$$\nabla^2 T = 0, \quad a < r < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < z < H,$$

$$T|_{r=a} = T_0, \quad T|_{r=b} = T_0 + T_1(1 + \cos \varphi), \quad T|_{z=0} = T_0, \quad T_z|_{z=H} = 0.$$

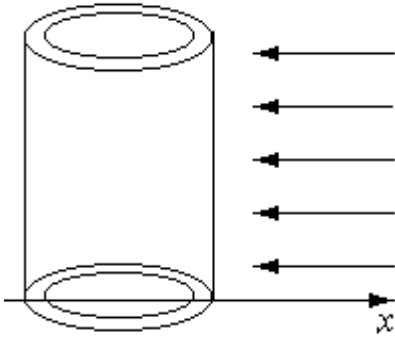


Рис. 11. Геометрия задачи 50

Эта задача напоминает задачу, рассмотренную в разделе 14, но в данном случае нагревается толстостенная труба, а не бочка, которая моделировалась сплошным однородным цилиндром. Трубка стоит на основании (например, на земле), поверхность которого поддерживается при постоянной температуре  $T_0$  и нагревается солнечными лучами, которые параллельны оси  $x$  (см. рис. 18). Очевидно, что

максимальное значение температуры  $T_0 + 2T_1$  достигается при  $\varphi = 0$ , а при  $\varphi = \pi / 2 - T_0 + T_1$ . При  $\varphi = \pi$  температура принимает минимальное значение  $T_0$ . В этом случае боковая поверхность находится в тени, следовательно, в тепловом равновесии с окружающим воздухом с температурой  $T_0$ . Верхний конец трубки открыт, поэтому внутренняя боковая поверхность находится при температуре окружающей среды. Теплопроводность воздуха довольно низкая, поэтому тепловой поток на верхнем конце можно считать нулевым.

$$\text{Ответ. } T = T_0 + \frac{4T_1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}(r) \cos n\varphi}{2m+1} \sin k_m z,$$

где

$$k_m = \frac{(2m+1)\pi}{2H}, \quad A_{mn}(r) = \frac{I_n(k_m r) K_n(k_m a) - I_n(k_m a) K_n(k_m r)}{I_n(k_m b) K_n(k_m a) - I_n(k_m a) K_n(k_m b)},$$

$K_n(r)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода или функция Макдональда [8,9].

**51.** Найти поле температуры внутри цилиндрического сектора с раствором  $\pi/2$ , высотой  $H$  и радиусом  $l$ . На нижнем основании и двух боковых поверхностях (при  $r = l$  и  $\varphi = 0$ ) поддерживается постоянная температура  $T_0$ , на верхнем основании – постоянная температура  $T_1$ , на третьей стенке стоит условие нагрева.

*Ответ*

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{\sinh k_{mn} z}{\sinh k_{mn} H} J_{2m+1}(k_{mn} r) \sin((2m+1)\varphi),$$

где

$$J_{2m+1}(k_{mn} l) = 0, \quad A_{mn} = \frac{8}{\pi l^2 [J'_{2m+1}(k_{mn} l)]^2 (2m+1)^0} \int_0^l J_{2m+1}(k_{mn} r) r dr.$$

**52.** Найти распределение температуры в стержне, если его боковая поверхность теплоизолирована, а концы поддерживаются при постоянной нулевой температуре. Внутри стержня находится источник тепла, мощность которого зависит от осевой координаты  $z$  (ось  $z$  совпадает с осью симметрии стержня):

$$Q = Q_0 \exp[-\gamma^2(z - z_0)^2].$$

*Совет.* Обратите внимание, что задача сводится к одномерной, т.е. уравнение Пуассона обращается в обыкновенное дифференциальное уравнение  $T_{zz} = Q(z)$  с однородными граничными условиями.

$$\begin{aligned} \text{Ответ. } T = & \frac{Q_0}{2\gamma^2} \left[ \left(1 - \frac{z}{H}\right) \exp\{-\gamma^2 z_0^2\} + \right. \\ & \left. + \frac{z}{H} \exp\{-\gamma^2(H - z_0)^2\} - \exp\{-\gamma^2(z - z_0)^2\} \right] - \\ & - \frac{Q_0}{2\gamma} \sqrt{\pi} \left[ (z - z_0) \operatorname{erf}(\gamma(z - z_0)) - \frac{z}{H} (H - z_0) \operatorname{erf}(\gamma(H - z_0)) - \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{z}{H}\right) z_0 \operatorname{erf}(\gamma z_0) \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай точечного теплового источника  $Q = q_0 \delta(z - z_0)$ , локализованного в точке  $z_0$  и сравним со случаем при  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $Q_0 \rightarrow \infty$  (полный тепловой поток постоянен:  $q_0 = \sqrt{\pi} Q_0 / \gamma$ ). Для локального источника тепла, учитывая, что  $\operatorname{erf} \gamma x = \operatorname{sign} x$  for  $\gamma \gg 1$ , получим

$$T = -\frac{q_0}{2} \left[ |z - z_0| - (H - z_0) \frac{z}{H} - z_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right) \right],$$

т.е. кусочно-непрерывное линейное распределение температуры с максимумом  $q_0 z_0 (1 - z_0/H)$  в т.  $z_0$ :

$$T = q_0 \begin{cases} \left(1 - \frac{z_0}{H}\right)z, & z < z_0, \\ \left(1 - \frac{z}{H}\right)z_0, & z > z_0. \end{cases} \quad (17.1)$$

**53.** Для  $\gamma \gg 1$  рассмотреть предыдущую задачу для постоянной нулевой температуры на боковой поверхности круглого стержня радиуса  $l$ .

*Ответ.* 
$$T = T_p - \frac{2q_0 H}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin k_m z_0}{m^2} \frac{I_0(k_m r)}{I_0(k_m l)} \sin k_m z, \quad \text{где}$$

$k_m = \pi m/H$  и  $T_p$  – частное решение уравнения Пуассона, определяемое формулой (17.1).

*Совет.* Представьте решение в виде  $T = T_p + T_0$ , где  $T_0$  – гармоническая функция, которая определяется из граничного условия на боковой поверхности.

### ***Уравнения Лапласа и Пуассона для сферической области***

**54.** Найти решение второй краевой задачи (задачи Неймана) для уравнения Лапласа внутри и снаружи сферы радиуса  $r_0$ .

*Совет.* В сферической системе координат  $(r, \vartheta, \varphi)$  искать решение в виде  $u(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$ :

– внутренняя задача –  $\Delta u = 0$  при  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = f(\vartheta, \varphi)$ ;

– внешняя задача –  $\Delta u = 0$  при  $r \geq r_0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = f(\vartheta, \varphi)$ .

*Ответ.* Чтобы удовлетворить граничному условию, необходимо, выполнить следующее условие (условие разрешимости):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \sin \theta d\varphi d\theta = 0.$$

Отметим, что в случае деформируемой сферы производная по нормали совпадает с производной по радиальной координате. Тогда решение для внутренней задачи можно записать в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{r^n}{nr_0^{n-1}} (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta) + C,$$

где  $C$  – некоторая константа. Для определения этой константы  $C$  необходимо поставить дополнительное условие на значение функции  $u(r, \theta, \varphi)$  на границе сферы. Коэффициенты разложения вычисляются по формулам (16.5) и (16.6).

Решение внешней краевой задачи для сферы имеет вид

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{r_0^{n+2} P_n^{(m)}(\cos \theta)}{(n+1)r^{n+1}} (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) + C.$$

**55.** Решить первую внутреннюю краевую задачу (внутреннюю задачу Дирихле) для уравнения Лапласа для четверти шара:  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

*Совет.* В силу симметрии удобно решать задачу в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ . Поместим начало координат в центр шара. На поверхности шарового сектора должны выполняться следующие граничные условия:

$$u|_{r=r_0} = f(\theta, \varphi), \quad u|_{\varphi=0, \pi} = 0, \quad u|_{\theta=0, \frac{\pi}{2}} = 0.$$

Решение будем искать методом разделения переменных.

*Ответ*

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n A_{mn} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2n+1} P_{2n+1}^{(2m)}(\cos \theta) \sin 2m\varphi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} B_{mn} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2n} P_{2n}^{(2m+1)}(\cos \theta) \sin(2m+1)\varphi.$$



Коэффициенты  $A_{mn}$  и  $B_{mn}$  находятся из разложения в ряд Фурье функции  $f(\theta, \varphi)$ :

$$A_{mn} = \frac{\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi) P_{2n+1}^{(2m)}(\cos \theta) \sin 2m\varphi \sin \theta d\varphi d\theta}{\|P_{2n+1}^{(2m)}(\cos \theta) \sin 2m\varphi\|^2},$$

$$B_{mn} = \frac{\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi) P_{2n}^{(2m+1)}(\cos \theta) \sin(2m+1)\varphi \sin \theta d\varphi d\theta}{\|P_{2n}^{(2m+1)}(\cos \theta) \sin(2m+1)\varphi\|^2}.$$

Число  $m$  должно быть целым, чтобы удовлетворить условию периодичности по азимутальному углу  $\varphi$ . Нулевым граничным условиям для угла  $\varphi$  на границах интервала  $0 \leq \varphi \leq \pi$  при целых  $m$  удовлетворяет функция  $\sin m\varphi$ . Появление двух сумм с функциями  $\sin$  четного  $2m$  и нечетного  $2m+1$  аргумента очевидно: необходимо, чтобы присоединенные полиномы Лежандра  $P_n^{(m)}(\cos \theta)$  были равны нулю на концах интервала  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  при произвольном  $\varphi$ , что возможно только в случае разной четности порядка  $n$  и степени  $m$  присоединенного полинома Лежандра  $P_n^{(m)}(\cos \theta)$ . Напомним, что четность  $P_n^{(m)}(\cos \theta)$  относительно точки  $\cos \theta = 0$  (экваториальная плоскость,  $\theta = \pi/2$ ) зависит от четности суммы  $n+m$ . Таким образом, нулевым граничным условиям для угла  $\theta$  удовлетворяют только нечетные  $P_n^{(m)}(\cos \theta)$ .

**56.** Решить предыдущую задачу для шарового сектора:  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ .

Ответ. 
$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n A_{mn} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n} P_{2n}^{(2m)}(\cos \theta) \sin 2m\varphi.$$

Коэффициенты  $A_{mn}$  находятся из разложения в ряд Фурье функции  $f(\theta, \varphi)$ :

$$A_{mn} = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} f(\varphi, \theta) P_{2n}^{(2m)}(\cos \theta) \sin 2m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi}{\left\| P_{2n}^{(2m)}(\cos \theta) \sin 2m\varphi \right\|^2}.$$

В данном примере для удовлетворения граничным условиям необходимо оставить только функцию  $\sin$  с четным аргументом.

**57.** Найти разложение по сферическим функциям поверхностных зарядов, индуцированных на идеально проводящей заземленной сфере точечным зарядом, находящимся:

- а) внутри сферы,
- б) вне сферы.

*Указание.* Пусть заряд находится в точке  $r = r_0$ ,  $\theta = 0$ , где  $(r, \theta)$  – сферические координаты. Следует воспользоваться разложением по мультиполям (подробнее см. [2,9]):

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos \theta), & r < r_0, \\ \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos \theta), & r > r_0, \end{cases}$$

где  $R$  – расстояние до точки наблюдения  $(r, \theta)$  от заряда  $(r_0, 0)$ . Полный потенциал системы представим в виде суммы потенциалов точечного заряда (первое слагаемое в решении) и сферы (второе слагаемое):

$$u(r, \theta) = \frac{e}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad r < a, \quad (17.2)$$

$$u(r, \theta) = \frac{e}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta), \quad r > a. \quad (17.3)$$

Здесь  $a$  – радиус сферы. Коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  определяются из граничного условия  $u|_{r=a} = 0$ :

$$A_n = -e \frac{a^n}{r_0^{n+1}}, \quad B_n = -e \frac{r_0^n}{a^{n+1}}.$$

Плотность поверхностных зарядов находится по формуле

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a}.$$

При этом в случае а) надо пользоваться формулой (17.3), а в случае б) – формулой (17.2).

*Ответ.* а) если  $r_0 < a$ , то потенциал

$$u(r, \theta) = \begin{cases} e \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r^n}{r_0^{n+1}} - \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}} \right) P_n(\cos \theta), & r < r_0, \\ e \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r_0^n}{r^{n+1}} - \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}} \right) P_n(\cos \theta), & r > r_0, \end{cases}$$

а плотность поверхностных зарядов на сфере

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{r_0^n}{a^{n+2}} P_n(\cos \theta);$$

б) если  $r_0 > a$ , то потенциал

$$u(r, \theta) = \begin{cases} e \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r^n}{r_0^{n+1}} - \frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta), & r < r_0, \\ e \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r_0^n}{r^{n+1}} - \frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta), & r > r_0, \end{cases}$$

а плотность поверхностных зарядов на сфере

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{a^{n-1}}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

**58.** Найти внутри сферы радиуса  $r_0$  решение уравнения Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = 0$ , удовлетворяющее граничному условию  $u|_{r=r_0} = f(\vartheta, \varphi)$ .

*Совет.* В сферической системе координат  $(r, \vartheta, \varphi)$  искать решение в виде  $u(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi)$ .

*Ответ.*  $u(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j_n(kr)}{j_n(kr_0)} Y_n(\vartheta, \varphi)$ , где  $j_n(x) = J_{n+1/2}(x) / \sqrt{x}$

– функции Бесселя первого рода полуцелого порядка,

$Y_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos(m\varphi) + b_{nm} \sin(m\varphi)) P_n^{(m)}(\cos \vartheta)$  – сферические функции,  $P_n^{(m)}(\cos \vartheta)$  – присоединенные полиномы Лежандра,

$$a_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi \int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$b_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) d\varphi \int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$\delta_m = \begin{cases} 2, & m = 0, \\ 1, & m > 0. \end{cases}$$

## Библиографический список

1. Алабужев А.А., Белозерова Т.С., Хеннер В.К. Методы математической физики. Уравнения эллиптического типа. Часть I. Прямоугольная система координат. Пермь: Изд-во ПГНИУ, 2016. 102 с.
2. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798 с.
3. Очан Ю.С. Методы математической физики М.: Высшая школа, 1965. 384 с.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Изд. 5-е, испр. М.: Наука, 1988. 512 с.
5. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001. 400 с.
6. Henner V., Belozeroва T., Forinash K. Mathematical Methods in Physics. Wellesley: A K Peters Ltd., 2009. 848 p.
7. Henner V., Belozeroва T., Khenner M. Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 2013. 623 p.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. Абрамовица М., Стигана И. М.: Наука, 1979. 832 с.
9. Алабужев А.А., Белозерова Т.С., Хеннер В.К. Методы математической физики. Часть I. Специальные функции. Цилиндрические функции. Пермь: Изд-во ПГУ, 2007. 127 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
11. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.
12. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 2003. 683 с.
13. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1973. 128 с.
14. Сборник задач по уравнениям математической физики / ред. В.С. Владимирова. Изд. 4-е. М.: Физматлит, 2003. 288 с.

15. Очан Ю.С. Сборник задач по методам математической физики. М.: Высш. шк., 1973.

16. Алабужев А.А. Белозерова Т.С., Хеннер В.К. Методы математической физики. Часть II. Специальные функции. Полиномы Лежандра. Пермь: Изд-во ПГУ, 2009. 76 с.

*Учебное издание*

**Алабужев Алексей Анатольевич  
Белозерова Татьяна Сергеевна  
Хеннер Виктор Карлович**

***МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ  
УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА***

***ЧАСТЬ II  
КРИВОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ***

Учебно-методическое пособие

Редактор *Л. Л. Савенкова*  
Корректор *Л. И. Иванова*  
Компьютерная верстка *А. А. Алабужева*

---

Подписано в печать 24.03.2016. Формат 60×84/16  
Усл. печ. л. 5,46. Тираж 100 экз. Заказ \_\_\_\_

---

Издательский центр  
Пермского государственного  
национального исследовательского университета.  
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография ПГНИУ.  
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

