ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

В. А. Демин

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. А. Демин

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебно-методического пособия для студентов
физического факультета, изучающих дисциплину
«Электродинамика»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2021

УДК 537.5+530.12(075.8)
ББК 22.313
Д306

Демин В. А.

Д306 Электродинамика и специальная теория относительности [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / В. А. Демин ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2021. – 2,5 Мб ; 104 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/demin-elektrodinamika-i-specialnaya-teoriya-otnositelnosti.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3624-2

Пособие предназначено студентам старших курсов физического факультета всех специальностей, изучающим курс классической электродинамики.

УДК 537.5+530.12(075.8)
ББК 22.313

Издается по решению ученого совета физического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра общей физики Пермского национального исследовательского политехнического университета (зав. кафедрой, д-р физ.-мат. наук, доцент ***А. В. Перминов***);

начальник отдела ПАО «Пермская научно-производственная приборостроительная компания», канд. физ.-мат. наук ***И. С. Азанова***

ISBN 978-5-7944-3624-2

Содержание:

1. ВВЕДЕНИЕ

В 2007 году в ходе реализации приоритетного национального проекта «Образование» издательством Пермского университета были опубликованы два учебных пособия по электродинамике вакуума [8] и электродинамике сплошных [3]. Книги были выпущены в рамках инновационной образовательной программы «Формирование информационно-коммуникативной компетентности выпускников классического университета в соответствии с потребностями информационного общества». Авторами этих пособий были выдающиеся преподаватели – сотрудники Пермского государственного национального исследовательского университета заведующий кафедрой теоретической физики профессор Д.В. Любимов и профессор кафедры общей физики Н.И. Лобов. В Пермском университете традиционно электродинамика всегда читалась на высоком научном и методическом уровне. До Н.И. Лобова и Д.В. Любимова в течение нескольких десятилетий этот курс завораживающе ярко читал профессор кафедры теоретической физики Г.З. Гершуни [11]. В настоящее время пособия [3; 8] активно используются в учебном процессе на физическом факультете при обучении студентов.

Однако учебная программа на физическом факультете Пермского университета построена так, что традиционно базовый курс классической электродинамики у студентов должен сочетаться с изложением основ специальной теории относительности, которая, как известно, позволяет элегантно и компактно заново переписать уравнения Максвелла в терминах 4-тока и тензора электромагнитного поля. К сожалению, эта часть материала была упущена при написании пособий [3; 8]. По этой причине в предлагаемом учебном пособии была сделана попытка восполнить данный пробел так, чтобы излагаемый материал органично дополнял упомянутые выше книги.

Как следует из названия, особое внимание в настоящем издании уделяется общим теорфизическим вопросам, относящимся к электродинамическим явлениям и их связи с теорией относительности. В то же время при формировании содержательной части материала и выборе стиля изложения автор старался избегать дублирования программы большого учебного курса электричества и магнетизма, который читается студентам в рамках цикла дисциплин по общей физике.

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Электрическое поле (ЭП) – это особая форма материи, посредством которой осуществляется взаимодействие заряженных тел. Данное поле порождается электрическими зарядами и обнаруживается только по взаимодействию заряженных частиц или тел. В этом смысле электрическое поле является силовым. Его количественной характеристикой является напряженность электрического поля. По определению напряженность ЭП в некоторой точке – это сила, действующая со стороны поля на пробный единичный заряд.

По этой причине электрическое поле представляет собой в общем случае трехмерное векторное поле. Из законов механики следует, что вдоль каждого из трех направлений силы алгебраически складываются, давая суммарную силу вдоль каждой из осей. В совокупности три составляющие силы образуют результирующий вектор. По причине аддитивности сил напряженность ЭП тоже подчиняется принципу суперпозиции. В трехмерном пространстве принцип суперпозиции выражается векторным равенством

$$\vec{E}_{рез} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N = \sum_i \vec{E}_i \; .$$

Поля, входящие в сумму, существуют независимо друг от друга. Само определение напряженности ЭП указывает на то, что компоненты поля изменяются при преобразованиях координат так же, как истинный вектор. При повороте осей компоненты вектора преобразуются по закону

$$E_i = \alpha_{ik} E_k' \; .$$

Здесь E_i и E_k' – координаты вектора в новой и, соответственно, старой системах координат, α_{ik} – матрица преобразования.

Из теории векторных полей известно, что любое векторное поле определяется однозначно, если известны плотность циркуляции и плотность источников поля как функции координат во всех точках пространства.

Предварительно введем в рассмотрение дельта-функцию, или, как еще часто ее называют, функцию Дирака [1]. Дельта-функция характеризуется следующими на первый взгляд противоречивыми свойствами [2]:

1) $\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = 0$ везде при $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$;

2) в точке $\vec{r} = \vec{r}\,'$ дельта-функция имеет особенность. Эта особенность представляет собой расходимость, так что

$$\int\limits_V \delta(\vec{r}-\vec{r}')dV = 1 . \qquad (2.1)$$

Интегрирование ведется по координатам x, y, z. При этом точка $\vec{r}=\vec{r}'$ должна находиться в области интегрирования.

3) $\int f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}')dV = f(\vec{r}')$.

Здесь $f(\vec{r})$ – произвольная функция, ограниченная во всей области интегрирования. Дельта-функция принадлежит к классу неаналитических функций. Ее следует рассматривать как совокупное выражение вышеперечисленных свойств (1–3).

Пусть $\vec{K}(x,y,z)$ – произвольное искомое векторное поле, определенное в каждой точке. В пространстве заданы скалярная и векторная функции $s(x, y, z)$ и $\vec{c}\left(x,y,z\right)$ – соответственно плотность источников и плотность циркуляции. Пусть по определению они задают дивергенцию и ротор векторного поля [2]:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{K} = s\left(x,y,z\right), \\ \operatorname{rot}\vec{K} = \vec{c}\left(x,y,z\right). \end{cases} \qquad (2.2)$$

Докажем, что если представить искомое векторное поле в виде суммы потенциальной и соленоидальной частей

$$\vec{K} = -\nabla\varphi + \nabla\times\vec{A} , \qquad (2.3)$$

где φ – скалярный, а $\vec{A}$ – векторный потенциалы, значения которых определяются следующими интегралами:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V'} \frac{s\left(\vec{r}\,'\right)dV'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}, \qquad \vec{A}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V'} \frac{\vec{c}\left(\vec{r}\,'\right)dV'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} , \qquad (2.4)$$

то векторное поле $\vec{K}$ удовлетворяет исходным уравнениям (2.2), т. е. (2.3) в совокупности с (2.4) является решением уравнений (2.2). Градиент скалярного потенциала φ определяет потенциальную часть векторного поля. Ротор векторного потенциала дает соленоидальную составляющую этого векторного поля. По сути, выражения (2.3), (2.4) представляют собой решение исходной неоднородной системы уравнений (2.2) по заданным $s(x,y,z)$ и $\vec{c}\left(x,y,z\right)$.

Очевидным ограничением является условие, согласно которому общее количество источников и их плотность должны обращаться в ноль на бесконечности. В дальнейшем математическую задачу (2.2) в сочетании с ее решением (2.3), (2.4) будем условно называть теоремой разложения Гельмгольца [1].

Не углубляясь в детали строгого доказательства, убедимся в справедливости этого утверждения прямой проверкой. Подставим $\vec{K} = -\nabla\varphi + \nabla\times\vec{A}$ с учетом (2.4) в первое уравнение:

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ijk}\nabla_j A_k\right) =$$

$$= -\Delta\varphi = -\frac{1}{4\pi}\Delta\left\{\int\frac{s(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right\} = -\frac{1}{4\pi}\int s(\vec{r}')\Delta\left\{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right\}dV' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int s(\vec{r}')\left\{-4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\right\}dV' = s(\vec{r}).$$

В результате имеем тождество, т. е. исходное утверждение можно считать доказанным.

В ходе выкладок использовалась известная теорема тензорного анализа, согласно которой свертка произвольного симметричного тензора второго ранга с антисимметричным тензором Леви – Чивиты равна нулю:

$$T_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0,$$

где $T_{ij} = T_{ji}$ – произвольный симметричный тензор второго ранга, ε_{ijk} – символ Леви – Чивиты. В результате применительно к нашей ситуации имеем равенство $\varepsilon_{ijk}\nabla_i\nabla_j = 0$.

По аналогии убеждаемся, что второе уравнение тоже тождественно удовлетворяется. Подставляем разложение для $\vec{K}$ во второе уравнение:

$$\nabla\times\vec{K} = -\nabla\times\cancel{\nabla}\varphi + \nabla\times\nabla\times\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\int_{V'}(\vec{c}\nabla)\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' - \int_{V'}\vec{c}\,\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\vec{c}\left(\vec{r}'\right)\left\{-4\pi\,\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\right\}dV' = \vec{c}\left(\vec{r}\right).$$

Здесь тоже использовалась известная формула тензорного анализа, согласно которой $\mathrm{rot}\nabla\varphi = 0$. Плюс векторный потенциал всегда можно представить как чисто соленоидальное поле, а это разрешает положить

$\mathrm{div}\vec{A} = 0$. Таким образом, убеждаемся, что второе уравнение для плотности циркуляции тоже удовлетворяется тождественно.

3. БЛИЗКОДЕЙСТВИЕ И ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕ

Взаимодействие между заряженными телами можно описать двумя способами. Исторически к моменту становления электродинамики в натуральной философии и, в частности, в физике сформировались две принципиально разные концепции, которые назывались теориями близкодействия и дальнодействия.

Дальнодействие подразумевает мгновенное взаимодействие объектов через пустоту на сколь угодно больших расстояниях, т. е. в точности так, как это на первый взгляд имеет место в случае гравитационного притяжения тел, обладающих массой покоя, или электростатического взаимодействия точечных зарядов, когда они описываются с помощью закона всемирного тяготения и закона Кулона соответственно.

Близкодействие возникает только в результате контакта тел. Согласно концепции близкодействия одно тело заставляет перемещаться другое по причине того, что два разных тела не могут одновременно находиться в одной и той же точке. Иными словами, одно тело действует с некоторой силой на другое путем контакта, вытесняя и замещая его собой в некоторой области пространства.

Фарадей первым осознал, что концепция дальнодействия в своей основе нематериалистична: посредством пустоты нельзя что-то «передать», через абсолютно пустое пространство невозможно обменяться информацией. Чтобы понять физические основания электрического взаимодействия, Фарадей ввел понятие электрического поля. Согласно Фарадею, взаимодействие зарядов объясняется таким образом: сначала рассматривается поле, созданное одним из заряженных тел, а затем описывается действие этого поля на второе заряженное тело путем контакта с ним, т. е. посредством близкодействия. В статике подходы оказываются эквивалентными. В случае с движущимися телами появляется разница, так как скорость распространения сигналов в природе всегда конечна, поле можно считать реально существующим, хотя его можно заменить понятием «прямого запаздывающего взаимодействия».

В предлагаемом учебном пособии влияние материальной среды на электрические и магнитные поля рассматриваться не будет. Для ознакомления с этим вопросом порекомендуем учебное пособие [3]. Как уже отмечалось выше, в общем случае электрическое поле – это трехмерное векторное поле. В декартовой системе координат оно задается следующим образом:

$$\vec{E}(E_x, E_y, E_z), \quad E_i(x, y, z, t)\,.$$

Индекс i определяет текущую компоненту векторного поля. Каждая компонента поля в общем случае зависит от всех пространственных координат x, y, z и времени t. По определению напряженность ЭП как сила, действующая со стороны поля на единичный заряд, выражается формулой

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \left[\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}\right], \quad \vec{F} \parallel \vec{E}\,.$$

Здесь q – произвольный пробный заряд. Электрическое поле является линейным полем, т. е. подчиняется принципу суперпозиции. Положительные точечные заряды считаются источниками линий электрического поля (рис. 1), а отрицательные находятся в точках, куда стекаются линии электрического поля.

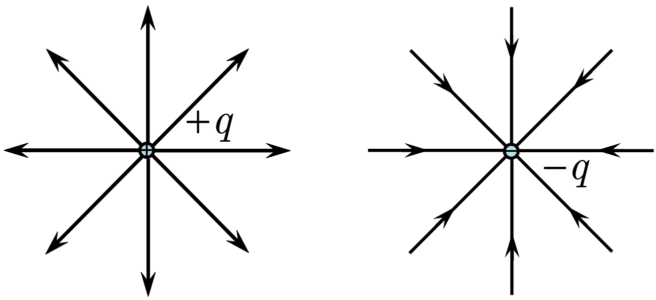

Рис. 1. Линии напряженности электрического поля для положительного и отрицательного зарядов

Помимо электрического, в природе существует еще одно взаимодействие, связанное с наличием у тела электрического заряда. Оно называется магнитным. Изначально оно было обнаружено и описано применительно к постоянным магнитам, но позднее стало понятно, что первичным здесь является взаимодействие токов (опыты Ампера и Эрстеда). Эксперименты показывают, что со стороны магнитного поля на движущийся заряд действует так называемая сила Лоренца, которая прямо пропорциональна скорости его движения $\vec{v}$, величине заряда q и силовой векторной характеристике – индукции магнитного поля $\vec{B}$:

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]\,. \tag{3.1}$$

Именно из опыта следует, что $\vec{F} \perp \vec{v}$ и $\vec{F} \perp \vec{B}$, а доопределяется направление силы так называемым правилом правой руки. В совокупности для двух векторов $\vec{v}$ и $\vec{B}$ это дает операцию, которая называется в математике векторным произведением векторов [4]. Из (3.1) видно, что магнитное поле действует только на движущийся заряд, т. е. в общем-то, принципиально иначе, нежели электрическое поле. Как следует из определения, единица измерения индукции магнитного поля в системе СИ такова:

$$\vec{B}\left[\frac{\text{Н}}{\text{Кл}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}}\right].$$

Таким образом, нельзя сравнивать количественно $\vec{E}$ и $\vec{B}$, потому что они имеют разные размерности. Если магнитное и электрическое поля обладают хоть каким-то физическим единством, то нужно найти некий «общий знаменатель» для этих величин, т. е. необходимо попытаться сконструировать характеристики для этих полей с одинаковой размерностью. Имеется возможность ввести в рассмотрение новую характеристику для магнитного поля, по размерности такую же, как напряженность электрического поля, вынеся из $\vec{B}$ множитель $1/c$, где константа c имеет размерность скорости

$$\vec{F} = \frac{q}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]. \tag{3.2}$$

В результате наряду с $\vec{E}$ теперь имеем векторное поле $\vec{H}$, которое тоже можно назвать напряженностью. На самом деле появление в знаменателе размерной константы c имеет гораздо более глубокий смысл, нежели просто нахождение характеристики с той же размерностью, что и напряженность ЭП. Как выяснится в дальнейшем, эта константа представляет собой скорость света в вакууме. В результате получается, что в формуле для силы Лоренца скорость заряда можно теперь будет измерять в долях от скорости света. В дальнейшем всегда будем называть вектор $\vec{H}$ напряженностью магнитного поля:

$$\vec{H}(H_x, H_y, H_z), \quad H_i(x, y, z, t).$$

Каждая i-я компонента напряженности магнитного поля в общем случае зависит от всех координат x, y, z и времени t. В заключение этого параграфа отметим, что для напряженности магнитного поля как силовой характеристики справедлив принцип суперпозиции:

$$\vec{H}_{рез} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \ldots + \vec{H}_N = \sum_i \vec{H}_i \ .$$

Как уже было показано выше, электродинамика фактически представляет собой науку об электрическом и магнитном полях, потому что именно посредством этих полей осуществляется взаимодействие неподвижных и движущихся зарядов. Данные поля описываются векторными величинами, поэтому в соответствии с доказанной выше теоремой Гельмгольца возникает естественное желание построить общую теорию этих полей в терминах их дивергенций и роторов. Ведь нахождение фундаментальных законов для ротора и дивергенции некоторого векторного поля позволяет в общем виде решить поставленную задачу и однозначно найти данное поле, по крайней мере в квадратурах. Исторически задача построения системы дифференциальных уравнений для электрического и магнитного полей в терминах роторов и дивергенций была впервые поставлена и решена Максвеллом во второй половине XIX в. Правда, она оказалась значительно сложнее и глубже, чем изначально предполагалось, что было продемонстрировано позднее в трудах Пуанкаре, Лоренца и Эйнштейна.

4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЗАРЯДА

Как уже было указано выше, оба поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в конечном счете создаются электрическими зарядами. Заряд макроскопического тела связывают с избытком или недостатком электронов у этого тела, а именно при дроблении заряда выясняется, что он обладает свойством дискретности. Измельчение заряда можно осуществлять только до уровня таких элементарных частиц, как лептоны и простейшие адроны. К классу адронов относятся мезоны и барионы. По современным представлениям оба типа частиц состоят из кварков [5]. Вопрос о том, почему кварки не регистрируются в свободном состоянии, хотя они должны обладать дробным электрическим зарядом, в данной книге обсуждаться не будет. В рамках квантовой теории заряд является неотъемлемым свойством элементарных частиц. Величина макроскопического заряда кратна элементарному заряду электрона. Чтобы отразить картину распределения зарядов на макроскопическом уровне, перейдем от дискретного распределения к непрерывному:

$$\rho(x, y, z, t) = \frac{dq}{dV} \ .$$

Здесь ρ – объемная плотность заряда, т. е. количество заряда, приходящееся на единицу объема. Объемная плотность заряда в общем случае тоже является функцией координат и времени. Если объемная плотность заряда задана, то формально путем интегрирования этой функции по объему можно найти полный заряд в любом рассматриваемом объеме:

$$q = \int\limits_V \rho(x, y, z) dV \ .$$

Объемная плотность заряда ρ предназначена для математического описания произвольного сколь угодно сложного распределения заряда в пространстве (рис. 2).

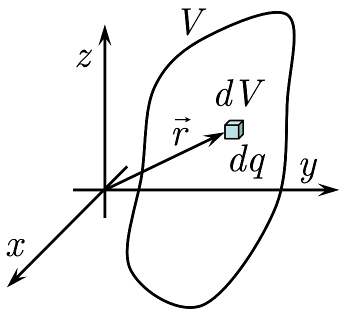

Рис. 2. Объемное распределение заряда

Используя континуальный подход, можно описать в том числе дискретное распределение зарядов. В случае дискретных точечных зарядов, когда расположение каждого из них задается радиус-вектором $\vec{r}_i$ (рис. 3), имеем следующее выражение для объемной плотности:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \ . \tag{4.1}$$

Здесь опять вполне органично можно использовать дельта-функцию $\delta(\vec{r})$, которая была введена ранее еще в первом параграфе. Проверим прямым интегрированием валидность формулы (4.1):

$$q = \int\limits_V \rho(\vec{r}) dV = \int\limits_V \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = \sum_i \int\limits_V q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = \sum_i q_i \ .$$

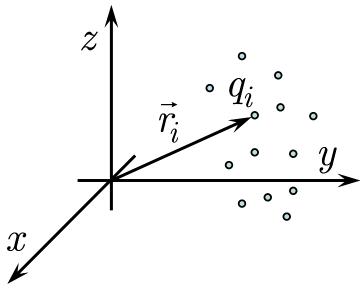

Рис. 3. Распределение точечных зарядов

Действительно, исходное положение можно считать доказанным. Таким образом, в дополнение всех перечисленных положительных свойств функция Дирака позволяет оперировать объемной плотностью заряда, несмотря на его возможное дискретное распределение.

При изучении электродинамических явлений возникает необходимость количественного описания движущихся зарядов. Для этого введем понятие объемной плотности тока:

$$\vec{j} = \frac{d\vec{I}}{dS}.$$

Здесь $\vec{I}$ – сила тока. По определению объемная плотность тока – это количество заряда, протекающее за единицу времени через площадку единичного сечения, ортогональную направлению тока (рис. 4).

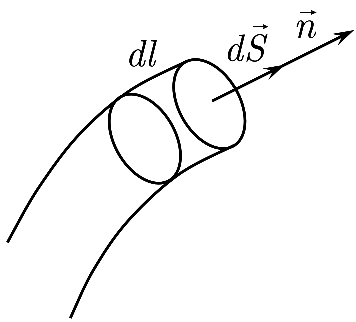

Рис. 4. Объемное движение зарядов

Представим объемную плотность тока в более наглядной и удобной для расчетов форме:

$$\vec{j} = \frac{dq}{dt \cdot dS}\vec{n} = \frac{dq}{dt} \cdot \frac{dl}{dl \cdot dS}\vec{n} = \frac{dq}{dV} \cdot \upsilon\,\vec{n} = \rho\vec{\upsilon}.$$

Здесь $\vec{n}$ – единичный вектор, указывающий локально в каждой точке пространства направление движения заряда. В итоге имеем компактную формулу $\vec{j} = \rho\vec{v}$.

Современная форма записи закона сохранения заряда в стандартной форме предполагает его локальность. Пусть рассматривается некий произвольный объем (рис. 5), ограниченный поверхностью S, полный заряд в котором равен

$$q = \int_V \rho dV .$$

На рис. 5 представлен единичный вектор $\vec{n}$, направленный перпендикулярно поверхности в каждой точке.

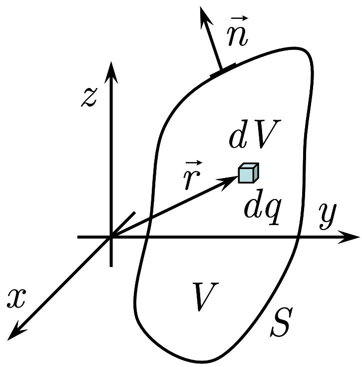

Рис. 5. Изменение заряда в объеме за счет его вытекания через поверхность

Вычислим убыль заряда, заключенного внутри поверхности S за единицу времени:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV . \tag{4.2}$$

В связи с тем, что заряд сохраняется, убыль заряда из объема V равна потоку заряда, выходящего за единицу времени через поверхность, охватывающую весь объем:

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S \rho\vec{v} d\vec{S} .$$

Согласно теореме Гаусса – Остроградского имеем

$$\oint_S \rho\vec{v}\,d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\right)dV . \qquad (4.3)$$

Приравняем выражения для убыли заряда из рассматриваемого объема, вычисляемые разными способами – (4.2) и (4.3):

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = \int_V \operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\right)dV .$$

Слева и справа имеем одну и ту же меру интегрирования. Равенство всегда имеет место только в том случае, если подынтегральные функции равны, т. е.

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\right).$$

Группируя слагаемые в одной части равенства, получаем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\right) = 0 . \qquad (4.4)$$

Полученное уравнение представляет собой закон сохранения заряда в дифференциальной форме. Для стационарных процессов, когда

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 ,$$

приходим к более простой формулировке закона сохранения:

$$\operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\right) = 0 .$$

В этом случае вектор поля объемной плотности тока $\rho\vec{v}$ имеет соленоидальный характер. Траектории движущихся зарядов являются замкнутыми линиями. В дополнение заметим, что полный ток через некоторое сечение равен

$$I = \int_S \vec{j}d\vec{S} .$$

Это количество заряда, проходящее через некоторое сечение площадью S за единицу времени. Отметим, что формула (4.4) выражает собой фундаментальный закон, для которого в рамках электродинамики нет исключений.

5. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ

Любую самую сложную заряженную систему можно представить как совокупность конечных или бесконечно малых точечных зарядов. Это могут быть как дискретное, так и непрерывное распределения. Формула для поля точечного заряда вытекает из закона Кулона. Далее при описании электродинамических явлений будем пользоваться системой СГС. Относительно произвольной системы координат (рис. 6) поле точечного заряда q в этих единицах определяется выражением [6]:

$$\vec{E} = q \cdot \frac{\vec{R}'}{R'^3} = q \cdot \frac{(\vec{R} - \vec{r})}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|^3}.$$

Здесь $\vec{R}$ – вектор, характеризующий положение точки, в которой вычисляется поле, $\vec{R}'$ – радиус-вектор от заряда до точки и $\vec{r}$ – вектор, определяющий положение заряда.

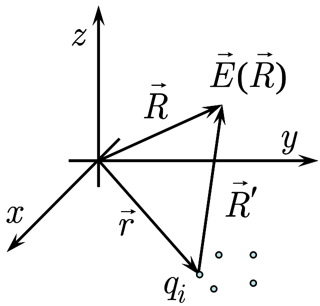

Рис. 6. Напряженность электрического поля системы точечных зарядов

Как видно из рис. 6, эти векторы связаны формулой $\vec{R} = \vec{R}' + \vec{r}$. Имея на руках формулу для одного точечного заряда и используя принцип суперпозиции, легко найти результирующее поле произвольной системы точечных зарядов:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \sum_a q_a \cdot \frac{\vec{R} - \vec{r}_a}{\left|\vec{R} - \vec{r}_a\right|^3}.$$

Эта формула объединяет закон Кулона, из которого вытекает формула для поля точечного заряда, и принцип суперпозиции. Она легко обобщается на случай непрерывного распределения зарядов. Для этого необходимо проделать следующие стандартные замены:

$$q_a \to dq = \rho dV\,, \quad \sum_a \langle\rangle \to \int_V \langle\rangle\,,$$

где $\rho(\vec{r})$ – объемная плотность зарядов. Иными словами, от суммирования по дискретным зарядам имеется возможность перейти к интегрированию по бесконечно малым непрерывно распределенным в объеме V зарядам. В результате для континуального распределения заряда имеем

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \int_V \frac{\rho\cdot(\vec{R}-\vec{r})}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|^3} dV\,. \tag{5.1}$$

Это выражение называется кулоновским интегралом напряженности. Заметим, что интегрирование ведется по источникам поля.

Выпишем несколько вспомогательных формул из тензорного и векторного анализа, которыми в дальнейшем будем активно пользоваться:

$$\mathrm{grad}R = \frac{\vec{R}}{R}, \quad \nabla_i \frac{1}{R} = \frac{\partial}{\partial X_i}\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial X_i} = -\frac{1}{R^2}\frac{X_i}{R};$$

$$\nabla\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}, \quad \mathrm{div}\frac{\vec{R}}{R^3} = \nabla\frac{\vec{R}}{R^3} = -\Delta\frac{1}{R}\,.$$

Еще одна важнейшая формула определяет значение лапласиана от функции $1/R$. Прямой подстановкой можно убедиться в том, что если $R \neq 0$, то $\Delta(1/R) = 0$. Однако с учетом особенности в точке $R = 0$ нахождение ответа на поставленный вопрос опять требует привлечения понятия дельта-функции:

$$\Delta\frac{1}{R} = -4\pi\cdot\delta(\vec{R})\,. \tag{5.2}$$

Докажем справедливость этой формулы прямой проверкой. Сначала домножим левую и правую части этого равенства на dV и проинтегрируем по произвольному объему, включая особенность в точке $R = 0$. Затем для левой части применяем теорему Гаусса – Остроградского

$$\int_V \mathrm{div}\left(\nabla\frac{1}{R}\right)dV = -4\pi\int_V \delta\left(\vec{R}\right)dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_S \nabla\frac{1}{R}\,d\vec{S} = -\int_S \frac{\vec{R}}{R^3}d\vec{S} = -\int_S \frac{\vec{e}_r}{R^2}\,d\vec{S}\,.$$

Здесь $\vec{e}_r$ – единичный радиальный вектор в сферической системе координат ($\vec{R} = R\vec{e}_r$). Заметим, что скалярное произведение

$$\frac{\vec{e}_r}{R^2} d\vec{S}$$

представляет собой элементарный бесконечно малый телесный угол $d\Omega$. Интегрирование по всем углам, очевидно, дает полный телесный угол, равный 4π:

$$\int_{\Omega} d\Omega = 4\pi \ .$$

Вспоминая значение интеграла от дельта-функции (2.1), получаем тождество

$$-4\pi \int_V \delta(\vec{R}) dV = -4\pi \ .$$

Действительно, проверить справедливость (5.2) можно было только «интегрально», так как количественно дельта-функция определена через интеграл.

Теперь вернемся к анализу кулоновского интеграла напряженности. Вычислим дивергенцию от левой и правой части равенства (5.1) по координатам точки наблюдения и используем формулу (5.2):

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{R}) = -\operatorname{div}\left(\nabla\varphi\right) = -\operatorname{div}\int_V \rho(\vec{r}) \operatorname{grad} \frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|} dV =$$

$$= -\int_V \rho(\vec{r}) \Delta \frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|} dxdydz = \int_V 4\pi \cdot \rho(r) \delta(\vec{R}-\vec{r}) dV = 4\pi\rho(\vec{R}) \ .$$

В результате получаем следующее компактное дифференциальное уравнение в частных производных для компонент электрического поля, которое относит нас к теореме Гельмгольца:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \ . \tag{5.3}$$

Иными словами, это уравнение получено в соответствии со стратегической задачей, поставленной в самом начале рассуждений о природе электрического и магнитного полей, и задает дивергенцию искомого поля по заданной плотности источников. Уравнение (5.3) было выведено для статического распределения зарядов, однако, как будет видно далее, оно может быть распространено и на случай, когда объемная плотность меняется с течением времени.

6. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Исторически сложилось так, что большое количество понятий в электродинамике имеют гидродинамический образ. Это объясняется тем, что электродинамика создавалась в то время, когда гидромеханика была в своих основаниях уже сформировавшейся и вполне зрелой наукой. По сути, одной из таких заимствованных в гидродинамике величин является понятие *магнитного потока*. По определению это интеграл по некоторой поверхности от напряженности магнитного поля

$$\Phi = \int_S \vec{H} d\vec{S} .$$

Видно, что по конструкции это скалярная величина. В гидромеханике аналогом для данной электродинамической характеристики является расход жидкости, который определяется формулой

$$Q = \int_S \vec{v} d\vec{S} .$$

Расход Q представляет собой объем жидкости, протекающий через некоторое сечение за единицу времени.

Закон электромагнитной индукции был открыт Фарадеем экспериментально и связывает ЭДС вдоль некоторого контура со скоростью изменения магнитного потока через него

$$-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = \varepsilon .$$

Здесь c – скорость света, а в правой части стоит электродвижущая сила ε, которая представляет собой работу по перемещению единичного заряда вдоль замкнутого контура. По определению это интеграл вдоль траектории

$$\varepsilon = \oint \vec{E} d\vec{l} . \tag{6.1}$$

Подставим определение магнитного потока и выражение для ЭДС (6.1) в закон электромагнитной индукции:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{dt}\int \vec{H} d\vec{S} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{H}}{dt} d\vec{S} = \oint \vec{E} d\vec{l} = \int \mathrm{rot} \vec{E} d\vec{S} .$$

В этом равенстве в правой части использована теорема Стокса, позволяющая преобразовать интеграл от векторного поля по замкнутой траектории в интеграл по поверхности, натянутой на этот контур, от ротора этого поля. Данное равенство справедливо для произвольного контура, поэтому подынтегральные функции должны быть равны в каждой точке пространства. В результате имеем еще одно дифференциальное уравнение:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{dt}\,. \tag{6.2}$$

Знак «минус» в уравнении показывает, что за поддержание ЭДС в контуре приходится расплачиваться уменьшением магнитного потока через него.

На первый взгляд может показаться, что полученная система уравнений для дивергенции (5.3) и ротора (6.2) электрического поля позволяет решить задачу о его нахождении в общем виде в соответствии с подходом (2.2) – (2.4). Однако оказалось, что природа приготовила нам сюрприз. В закон электромагнитной индукции, как видно, входит напряженность магнитного поля, которая сама подлежит определению. В результате система уравнений (5.3), (6.2) не является замкнутой и требует нахождения дополнительных уравнений для напряженности МП. На этом пути у нас нет никакой другой альтернативы, кроме как продолжить анализ дополнительных экспериментальных данных.

7. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

Возьмем в качестве исходного закон Био – Савара [7; 8] для магнитного поля элементарного тока, как еще один результат обобщения опытных данных (рис. 7):

$$d\vec{H} = \frac{d\vec{l}\times\vec{R}'}{cR'^3}I\,. \tag{7.1}$$

В этой формуле имеем три перпендикулярных друг другу вектора: $d\vec{l}$ – длина элемента с током, $\vec{R}'$ – радиус-вектор от элемента с током до точки наблюдения и $d\vec{H}$ – напряженность магнитного поля; I – сила тока, c – скорость света. Для дальнейших рассуждений воспользуемся введенными ранее формулами

$$\vec{j} = \rho\vec{\upsilon}\,, \quad \vec{R}' = \vec{R} - \vec{r}\,, \quad \vec{j} = \frac{d\vec{I}}{dS}\,.$$

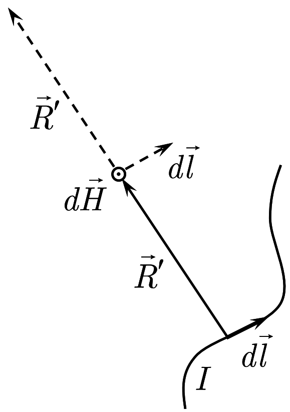

Рис. 7. Магнитное поле элементарного проводника с током

Заметим, что

$$I d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = \rho \vec{v} dV = \vec{j} dV \ .$$

В результате закон Био – Савара (7.1) принимает удобный для интегрирования вид:

$$d\vec{H} = \frac{\vec{j} \times \vec{R}'}{cR'^3} dV \ .$$

Это вклад отдельного элементарного объема с током в общее магнитное поле, которое можно вычислить путем интегрирования по всему объему, занимаемому токами. Иными словами, полное поле определяется согласно принципу суперпозиции, т. е. путем интегрирования по токам:

$$\vec{H}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{R}'}{R'^3} dV \ . \tag{7.2}$$

В определенном смысле формула (7.2) подобна кулоновскому интегралу напряженности (5.1). Эти выражения в очередной раз подчеркивают возможное родство электрического и магнитного полей, так как характеризуются одинаковыми функциональными зависимостями от расстояния, как $1/R^2$, в подынтегральных выражениях. Вычислим для начала дивергенцию напряженности магнитного поля. Из (7.2) получаем

$$\operatorname{div}\vec{H} = \frac{1}{c}\operatorname{div}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{R}'}{R'^3} dV = -\frac{1}{c}\int\limits_V \nabla_i \varepsilon_{ijk} j_j \nabla_k \frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|} dV =$$

$$= -\frac{1}{c}\int\limits_V \varepsilon_{ijk} j_j \nabla_i \nabla_k \frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|} dV = 0\,.$$

Как уже было отмечено ранее, свертка антисимметричного тензора с симметричным тензором по двум повторяющимся индексам равна нулю. В результате приходим к уравнению

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0\,. \tag{7.3}$$

В качестве следующего шага вычислим ротор от (7.2). При этом предварительно заметим одно важное математическое свойство:

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}\,, \qquad \nabla\frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|} = -\tilde{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}\,.$$

Знак «тильда» над оператором набла означает дифференцирование по координатам радиус-вектора $\vec{r}$. Согласно этому математическому равенству, имеется возможность перейти при дифференцировании функции $1/|\vec{R}-\vec{r}\,|$ от производных по координатам X_i к производным по координатам x_i. Это важно уметь делать, так как интегрирование у нас, как правило, производится по координатам зарядов (т. е. по переменным x, y, z). В то время как производные берутся по координатам точки наблюдения (X, Y, Z). Однако теорему Гаусса – Остроградского можно использовать только в том случае, если в операторе дивергенции дифференцирование производится по тем же переменным, по которым производится интегрирование.

Итак, попытаемся получить еще одно дифференциальное уравнение для напряженности магнитного поля

$$\operatorname{rot}_i\vec{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}_i\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{R}'}{R'^3} dV = \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\nabla_j \int\limits_V \varepsilon_{klm} j_l \frac{X'_m}{R'^3} dV =$$

$$= -\frac{1}{c}\int\limits_V \nabla_j \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) j_l \nabla_m \frac{1}{(\vec{R}-\vec{r})} dV =$$

$$= -\frac{1}{c}\int\limits_V \nabla_j j_i \nabla_j \frac{1}{R'} dV + \frac{1}{c}\int\limits_V \nabla_j j_j \nabla_i \frac{1}{R'} dV\,. \tag{7.4}$$

Последний интеграл в этой сумме требует отдельного анализа:

$$\frac{1}{c}\int\limits_V \nabla_i j_j \nabla_j \frac{1}{R'} dV = -\frac{1}{c}\int\limits_V \nabla_i j_j \tilde{\nabla}_j \frac{1}{R'} dV =$$

$$= -\frac{1}{c}\int\limits_V j_j \tilde{\nabla}_j \nabla_i \frac{1}{R'} dV = -\frac{1}{c}\int\limits_V \tilde{\nabla}_j \left(j_j \nabla_i \frac{1}{R'} \right) dV +$$

$$+\frac{1}{c}\int\limits_V \tilde{\nabla}_j \left(j_j \right) \nabla_i \frac{1}{R'} dV = 0 .$$

В этом выражении первый интеграл преобразуется по теореме Гаусса – Остроградского и равен нулю, если унести поверхность интегрирования на бесконечность:

$$\frac{1}{c}\int\limits_V \tilde{\nabla}_j \left(j_j \nabla_i \frac{1}{R'} \right) dV = \frac{1}{c}\oint\limits_S \left(\nabla \frac{1}{R'} \right) \vec{j} d\vec{S} = 0 .$$

Последний интеграл тоже равен нулю, так как в случае стационарных токов $\partial\rho/\partial t$ = 0, поэтому $\mathrm{div}\vec{j} = 0$. В (7.4) остается вычислить еще один интеграл:

$$\frac{1}{c}\int\limits_V \nabla_j j_i \nabla_j \frac{1}{R'} dV = \frac{1}{c}\int\limits_V j_i \Delta \frac{1}{R'} dV = -\frac{4\pi}{c}\int\limits_V j_i \delta(\vec{R} - \vec{r}) dV = -\frac{4\pi}{c} j_i .$$

В итоге с учетом знака в (7.4) получаем еще одно дифференциальное уравнение

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} . \qquad (7.5)$$

Согласно этому уравнению в частных производных завихренность МП локальна, т. е. в каждой точке пространства, с точностью до множителя определяется объемной плотностью тока.

8. ПРОМЕЖУТОЧНОЕ ПОДВЕДЕНИЕ ИТОГОВ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Выпишем все уравнения, полученные ранее в отношении свойств электромагнитного поля, – (5.3), (6.2), (7.3) и (7.5). Для начала будем группировать уравнения, активно используя идеологию теоремы Гельмгольца, которая указывает на возможность однозначного определения векторного поля по заданным плотности источников и плотности циркуляции. Имеем в результате две пары уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div}\vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}. \end{cases}$$

Единственное, что несколько портит общую стройную картину, – это закон электромагнитной индукции. Уравнение для завихренности электрического поля связывает $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в каждый момент времени и не позволяет разделить общую систему уравнений на две отдельные задачи для $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Однако это можно сделать в двух предельных ситуациях.

Рассмотрим первый частный случай: пусть токи отсутствуют и магнитное поле равно нулю, а заряды статичны. Отсюда получаем значительно упрощенную систему уравнений только для электростатического поля:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

В этой системе уравнений плотность источников равна $4\pi\rho$, а плотность циркуляции равна нулю. Поэтому электростатическое поле должно иметь градиентный характер. Согласно теореме Гельмгольца, решение этой системы может быть представлено в виде

$$\vec{E} = -\nabla\varphi\,. \tag{8.2}$$

Здесь φ – электрический потенциал. Как было показано ранее, распределение электрического потенциала определяется интегралом по источникам поля:

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \int\limits_V \frac{\rho(x,y,z)\,dV}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}\,. \tag{8.3}$$

Так как плотность циркуляции равна нулю, векторный потенциал тоже равен нулю. Интеграл по источникам поля (8.3) и последующая процедура вычисления градиента скалярной функции (8.2) дают полное решение поставленной задачи:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial X}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial Y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial Z}\,. \tag{8.4}$$

Иными словами, одна скалярная функция φ генерирует все три компоненты искомого векторного поля.

9. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Систему уравнений для электростатического поля можно переформулировать в терминах ДУ для электрического потенциала. Для этого подставим (8.2) в исходную систему уравнений (8.1):

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\nabla\varphi\right) = -4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\left(\nabla\varphi\right) = 0. \end{cases}$$

В этой системе второе уравнение удовлетворяется тождественно для любого φ. Первое дает для электрического потенциала известное в математической физике уравнение Пуассона [2]

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho\ . \tag{9.1}$$

Несмотря на то, что общим решением этого уравнения по-прежнему является интеграл вида

$$\varphi\left(X,Y,Z\right) = \int\limits_V \frac{\rho(x,y,z)dV}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|},$$

уравнение Пуассона может решаться методами математической физики как уравнение в частных производных второго порядка. Оно представляет собой уравнение эллиптического типа [2]. Однако основная задача электростатики может быть сформулирована и решена напрямую в терминах уравнений Максвелла (8.1), откуда сразу путем интегрирования четырех уравнений в частных производных по заданному распределению заряда покомпонентно находится напряженность электрического поля.

Для корректности формулировки стандартной краевой задачи в рамках математической физики требуется вывести граничные условия. Пусть пространство делится на две области некоторой поверхностью. Для определенности будем обозначать их индексами 1 и 2 (рис. 8).

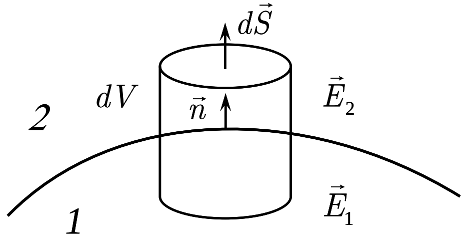

Рис. 8. Выделенный объем для нахождения граничного условия на нормальную составляющую напряженности электрического поля

Пусть граница раздела является гладкой поверхностью, которая сшивается из отдельных бесконечно малых элементов площадью dS. Ориентация каждого такого элемента поверхности в пространстве характеризуется единичным вектором $\vec{n}$. Для определенности пусть он будет всегда ориентирован из области с меньшим индексом в область с большим индексом. Далее выделим небольшой объем в виде цилиндра, часть которого лежит в области 1, а другая – в области 2, как это показано на рис. 8. А именно торцы должны быть локально параллельны элементу площади поверхности dS внутри цилиндра. Проинтегрируем первое уравнение в системе (8.1) по данному объему:

$$\int_V \mathrm{div}\vec{E}\, dV = \int_V 4\pi\rho dV \; . \tag{9.2}$$

Далее учтем специфическую возможность, с которой часто приходится сталкиваться в электростатических задачах. Эта особенность проявляется в том, что на границе раздела могут находиться поверхностные заряды. Указанное распределение зарядов характеризуется величиной, которая называется поверхностной плотностью зарядов

$$\sigma(x,y,z) = \frac{dq}{dS} \qquad \left(dq = \sigma dS\right).$$

По определению это количество заряда, приходящееся на единицу площади поверхности. Левая часть равенства (9.2) преобразуется по теореме Гаусса – Остроградского в интеграл по поверхности, а справа имеем интеграл по всем зарядам в рассматриваемом объеме:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi \int_q dq \; .$$

В силу аддитивности интеграл по поверхности разбивается на отдельные части. Также рассмотрим предел, когда площадь боковой поверхности цилиндра стремится к нулю. Выполним этот предельный переход так, чтобы торцы цилиндра стремились слиться друг с другом, но не пересекали бы границы раздела. В этом случае интеграл по боковой поверхности будет равен нулю. А все, что остается, дает искомое граничное условие:

$$\int_{K_1} \vec{E}_1 d\vec{S} + \int_{K_2} \vec{E}_2 d\vec{S} + \int_{Б} \vec{E}_Б d\vec{S} = \int_K \vec{E}_2 \vec{n} dS - \int_K \vec{E}_1 \vec{n} dS =$$

$$= \int_S (E_{2n} - E_{1n}) dS = 4\pi \int_S \sigma dS .$$

Равенство должно выполняться для произвольного участка поверхности, поэтому подынтегральные функции должны удовлетворять равенству:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma , \qquad [E_n] = 4\pi\sigma . \tag{9.3}$$

Таким образом, в общем случае нормальная компонента электрического поля согласно (9.3) должна испытывать скачок на границе раздела, равный $4\pi\sigma$.

Проанализируем второе уравнение Максвелла в системе (8.1) для завихренности электростатического поля. В отличие от предыдущего проинтегрируем указанное уравнение по некоторой поверхности. Поверхность возьмем в виде прямоугольника, часть которого находится в области 1, а другая в области 2, как это продемонстрировано на рис. 9:

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}\, d\vec{S} = 0 .$$

Далее воспользуемся теоремой Стокса и преобразуем интеграл по поверхности от ротора электрического поля в интеграл по контуру, ограничивающему этот прямоугольник. В результате по причине аддитивности интеграла имеем

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{E}_2 d\vec{l} + \int_{Б} \vec{E}_Б d\vec{l} = \int_l \vec{\tau} \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) dl = 0 ,$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к поверхности разрыва и лежащий в плоскости контура. Здесь в ходе выкладок опять находится предел, для которого длина боковых сторон прямоугольника, пересекающих границу раздела, стремится к нулю.

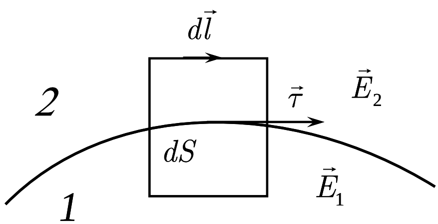

Рис. 9. Выделенный участок поверхности раздела для нахождения граничного условия на касательную составляющую напряженности электрического поля

Выполняется этот предельный переход так, чтобы стороны прямоугольника, частично лежащие в областях 1 и 2, стремились слиться друг с другом, но не пересекали бы поверхность раздела. В этом случае интеграл по боковым сторонам равен нулю. Равенство опять должно выполняться для произвольного участка поверхности, поэтому подынтегральное выражение должно быть равно нулю. Отсюда

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0, \quad \left[E_\tau\right] = 0. \tag{9.4}$$

Итак, второе граничное условие на касательную компоненту ЭП говорит о ее непрерывности на границе раздела.

Для корректного решения уравнения Пуассона (9.1) требуется еще одно граничное условие. Его можно получить для электрического потенциала. Возьмем две произвольные близлежащие точки так, чтобы одна из них лежала в области 1, а вторая – в области 2 (рис. 10). Как известно, разность потенциалов позволяет вычислить работу по перемещению произвольного конечного заряда из точки 1 в точку 2 по известной формуле $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$.

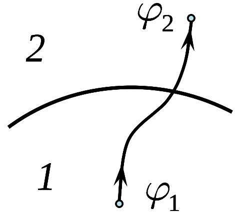

Рис. 10. Граничное условие на электрический потенциал

Будем приближать эти точки друг к другу на сколь угодно малое расстояние так, чтобы каждая из них оставалась в своей области. Если расстояние между точками стремится к нулю, то и работа по перемещению заряда из одной точки в другую тоже будет сколь угодно малой:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{l} \to 0 .$$

Отсюда следует, что разность потенциалов между этими точками в пределе равна нулю. Иными словами, на поверхности раздела электрический потенциал должен быть непрерывным:

$$\varphi_1\big|_\Gamma = \varphi_2\big|_\Gamma .$$

В качестве примера электростатической задачи, важной для дальнейших рассуждений, рассмотрим поле произвольной системы зарядов на больших расстояниях. Данное приближение подразумевает, что $R >> a$, где a – характерный размер системы зарядов. Пусть e_α – величина заряда с индексом α, а $\vec{r}_\alpha$ – радиус-вектор до него.

Результирующий потенциал в точке $\vec{R}$ (здесь в качестве иллюстрации можно ориентироваться на рис. 6) вычисляется согласно принципу суперпозиции

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{\left|\vec{R} - \vec{r}_\alpha\right|}. \tag{9.5}$$

Пусть для простоты все заряды локализованы вблизи начала координат. Тогда в рассматриваемом пределе $r_\alpha \sim a$, и координаты зарядов можно использовать в качестве малого параметра при разложении потенциала в ряд. Формула для разложения некоторой функции в ряд Тейлора по трем переменным имеет вид

$$f\left(X-x, Y-y, Z-z\right) = f\left(X,Y,Z\right) - \frac{\partial f}{\partial X}x - \frac{\partial f}{\partial Y}y - \frac{\partial f}{\partial Z}z +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}z^2\right) +$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Z}xz + \frac{\partial^2 f}{\partial Y \partial Z}yz + \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}xy + \ldots$$

Отметим, что значения производных вычисляются в точке с координатами X, Y, Z. В смешанной индексно-векторной форме этот ряд может быть представлен более компактно:

$$f\left(\vec{R} - \vec{r}\right) = f\left(\vec{R}\right) - \frac{\partial f}{\partial X_i}x_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}x_i x_j + \ldots$$

Как всегда, по повторяющимся индексам i, j предполагается суммирование. В данном случае это координатные индексы, которые принимают значения от одного до трех, и их нельзя путать с индексом α, обозначающим номер заряда.

Разлагая в ряд выражение для потенциала (9.5), получаем с точностью до квадратичных членов

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{R} - \sum_\alpha e_\alpha \vec{r}_\alpha \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2}\sum_\alpha e_\alpha x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}\frac{1}{R} + \ldots \tag{9.6}$$

Положение точки, в которой вычисляется поле, никак не зависит от распределения зарядов. Поэтому все множители, зависящие от R (включая различные производные от $1/R$), имеет смысл отделить от процедуры суммирования по зарядам. Как следствие, в разложении

(9.6) введем некоторые обозначения, описание которых можно найти в таблице ниже. Величины, приведенные в таблице, в электродинамике называются мультипольными моментами.

Таблица мультипольных моментов

Мультипольный момент	Дискретное распределение	Непрерывное распределение
Полный заряд системы	$Q=\sum_{\alpha} e_{\alpha}$	$Q=\int_V \rho dV$
Дипольный момент	$\vec{d}=\sum_{\alpha} e_{\alpha}\vec{r}_{\alpha}$	$\vec{d}=\int_V \rho\vec{r}dV$
Тензор квадрупольного момента	$D_{ij}=\sum_{\alpha} e_{\alpha}x_i x_j$	$D_{ij}=\int_V \rho x_i x_j dV$

Эту таблицу, очевидно, можно продолжить, учитывая следующие слагаемые в разложении (9.6). Идеологически мультипольные моменты полностью отражают информацию о количестве зарядов, их величине и расположении в пространстве.

Представим разложение (9.6) в виде ряда с указанием порядка точности каждого слагаемого. Тем самым в ходе расчетов будет отражаться факт применения математически обоснованной процедуры, основанной на методе последовательных приближений при суммировании членов ряда

$$\varphi=\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\varphi^{(3)}+\ldots$$

Слагаемое нулевого порядка точности представляет собой просто поле точечного заряда

$$\varphi^{(0)}=\frac{Q}{R}.$$

Отметим, что, каким бы сложным ни было распределение зарядов, на больших расстояниях все детали их расположения нивелируются и в главном порядке точности система характеризуется кулоновским потенциалом.

Далее еще раз отметим, что

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{X_i}{R^3}.$$

С учетом этой формулы и определения дипольного момента, которое приведено в таблице, получаем значение потенциала в первом порядке точности:

$$\varphi^{(1)} = \frac{\vec{d}\vec{R}}{R^3}.$$

Опять вся информация о системе целиком заложена в векторе дипольного момента. Радиус-вектор указывает положение точки, в которой ищется потенциал. По сравнению с предыдущим слагаемым в разложении член $\varphi^{(1)}$ имеет более высокий порядок точности, так как убывает с расстоянием как $1/R^2$ и является поправочным по отношению к слагаемому нулевого порядка точности, для которого имеет место асимптотика $\sim 1/R$. Однако дипольный вклад приобретает принципиальное значение, когда полный заряд системы в точности становится равным нулю. В этом случае данное слагаемое принимает наибольшее значение в разложении, и именно оно в главном порядке точности начинает определять свойства поля.

Однако при определенном расположении и величине зарядов дипольный момент, как и полный заряд, тоже может оказаться равным нулю. Тогда определяющим будет слагаемое второго порядка точности

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} e_\alpha x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}\frac{1}{R} + \dots$$

Во-первых, несложные вычисления дают

$$\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{3X_i X_j}{R^5} - \frac{\delta_{ij}}{R^3}.$$

Далее для удобства работы с тензором квадрупольного момента преобразуем его с целью математической оптимизации. Так как в рамках рассматриваемого подхода предполагается, что $R >> a$, т. е. $R \neq 0$, то $\Delta(1/R) = 0$. Это означает, что квадрупольный вклад не изменится, если в тензор квадрупольного момента внести искусственное изменение

$$D_{ij} = \sum_{\alpha} e_\alpha x_i x_j \quad \Rightarrow \quad D'_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{\alpha} e_\alpha \left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right).$$

Свертка второго, т. е. нового внедренного, слагаемого в тензоре квадрупольного момента, содержащего дельта символ Кронекера, с тензорным множителем

$$\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}\left(\frac{1}{R}\right)$$

приводит к лапласиану от $1/R$, что, как уже неоднократно упоминалось, дает ноль. В результате модифицированный тензор квадрупольного момента D'_{ij} обладает еще одним полезным свойством в виде равенства нулю шпура [1]. Таким образом, имеем следующие общие свойства модифицированного тензора квадрупольного момента:

$$D'_{ij} = D'_{ji}, \qquad D'_{ii} = 0 .$$

Иными словами, это симметричный тензор второго ранга, шпур (след) которого равен нулю.

Таким образом, используя формулу (9.6) и определения мультипольных моментов из таблицы, получаем компактное разложение, которое позволяет вычислить электрический потенциал произвольной системы как дискретно, так и непрерывно распределенных зарядов на больших расстояниях:

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \frac{Q}{R} + \frac{\vec{d}\vec{R}}{R} + \frac{D_{ij}'}{6}\left(\frac{3X_i X_j}{R^5} - \frac{\delta_{ij}}{R^3}\right) + \ldots \tag{9.7}$$

Дальнейшее нахождение напряженности электрического поля носит чисто технический характер и представляет собой процедуру почленного вычисления градиента от скалярной функции (9.7), так как

$$\vec{E} = -\nabla\varphi .$$

Более подробное изложение теории мультипольных моментов, исходя из общих теоретических соображений, можно найти в [10].

10. УРАВНЕНИЯ МАГНИТОСТАТИКИ

Рассмотрим еще один частный случай. Пусть свободные заряды в пространстве отсутствуют ($\rho = 0$), а токи отвечают условию стационарности ($\partial/\partial t = 0$). Тогда уравнения для магнитостатического поля принимают вид

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}. \end{cases} \tag{10.1}$$

Согласно теореме Гельмгольца, общее решение уравнений, в рамках которых задаются плотность циркуляции и плотность источников, должно иметь вид

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}\,, \tag{10.2}$$

так как плотность источников в этих уравнениях отсутствует. Поэтому скалярный потенциал тривиальным образом равен нулю. Задана лишь плотность циркуляции, которая определяет векторный потенциал

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\vec{j}(x,y,z)dV}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}\,.$$

Переформулируем уравнения Максвелла (10.1) для магнитостатического поля в терминах векторного потенциала:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right) = 0, \\ \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\,\vec{j}. \end{cases}$$

Первое уравнение удовлетворяется тождественно, а для комфортной работы со вторым уравнением требуется воспользоваться известной формулой тензорного анализа [1]

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta\,.$$

В результате приходим к уравнению

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right) = \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{A}\right) - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}\,.$$

Из определения векторного потенциала (10.2) следует, что он вычисляется с точностью до градиента от некоторой функции:

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\left(\vec{A} + \nabla f\right).$$

Поэтому, не теряя общности рассуждений, можно вычесть из векторного потенциала всю градиентную часть и положить

$$\mathrm{div}\vec{A} = 0\,.$$

Тогда векторный потенциал будет удовлетворять стандартному уравнению Пуассона:

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\,\vec{j}\,. \tag{10.3}$$

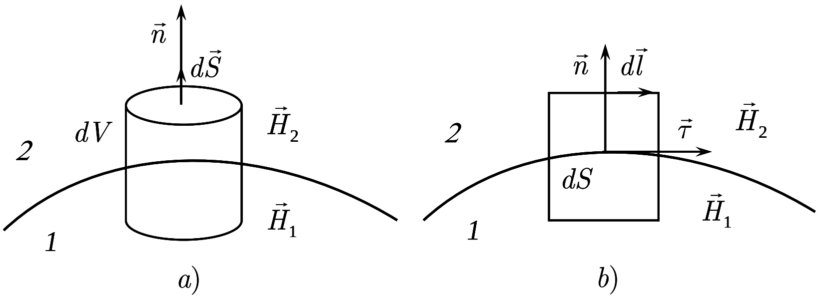

Рис. 11. Выделенный объем (*a*) и участок поверхности (*b*) для нахождения граничных условий на нормальную и касательную составляющие напряженности магнитного поля

Для однозначного решения уравнений в частных производных требуется дополнить их краевыми условиями. Проинтегрируем первое уравнение Максвелла системы (10.1) по объему (см. рис. 11, *a*):

$$\int_V \mathrm{div}\vec{H}\, dV = 0\,.$$

Этот интеграл преобразуется с помощью теоремы Гаусса – Остроградского в интеграл по поверхности, охватывающей рассматриваемый объем:

$$\oint \vec{H}d\vec{S} = \int_{K_1} \vec{H}_1 d\vec{S} + \int_{K_2} \vec{H}_2 d\vec{S} + \int_{Б} \vec{H}_Б d\vec{S} =$$

$$\int_K \left(\vec{H}_{2n} - \vec{H}_{1n}\right)\cdot \vec{n}\, dS = \int_K \left(H_{2n} - H_{1n}\right) dS = 0\,.$$

Чтобы равенство выполнялось для произвольной гладкой поверхности, необходимо, чтобы подынтегральное выражение было равно нулю в каждой точке поверхности. В результате приходим к граничному условию на нормальную компоненту магнитного поля:

$$\left(H_{2n} - H_{1n}\right)\Big|_{\Gamma} = 0\,.$$

Это граничное условие имеет смысл записать в векторной форме

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = 0\,. \qquad (10.4)$$

Второе уравнение системы (10.1) необходимо интегрировать по поверхности контура (см. рис. 11, *b*):

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{H}\,d\vec{S} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}\,d\vec{S} = \frac{4\pi}{c}\int_S \frac{d\vec{I}}{dS}d\vec{S} = \frac{4\pi}{c}\int_I dI_{\parallel}\,, \quad d\vec{S} = \left[\vec{n}\times\vec{\tau}\right]dS\ .$$

Здесь $dI_{\parallel}$ – проекция тока на вектор $d\vec{S}$. По границе раздела могут течь поверхностные токи. Для их количественного описания вводится понятие поверхностной плотности тока:

$$\vec{i} = \frac{d\vec{I}}{dl} \qquad \left(d\vec{I} = \vec{i}dl\right).$$

По определению это количество заряда, протекающее по поверхности за единицу времени поперек элемента дуги единичной длины. По результатам рассуждений, абсолютно идентичных тем, что были приведены выше, запишем окончательно граничное условие в векторной форме:

$$\vec{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{i}\ . \tag{10.5}$$

В результате имеем совокупность граничных условий для нормальной и касательной компонент напряженности магнитного поля (10.4) и (10.5). Из них видно, что в общем случае касательная компонента напряженности МП испытывает скачок на границе раздела.

11. НОРМИРОВКА ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Выясним физический смысл нормировки векторного потенциала. Проведем рассуждения, следуя [9]. Для этого вычислим напрямую дивергенцию векторного потенциала, пользуясь определением:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{c}\mathrm{div}\int_V \frac{\vec{j}(x,y,z)}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}dV = \frac{1}{c}\int_V j_i \nabla_i \frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}dV =$$

$$= -\frac{1}{c}\int_V j_i \tilde{\nabla}_i \frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}dV = -\frac{1}{c}\int_V \tilde{\nabla}_i \frac{j_i}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}dV +$$

$$+\frac{1}{c}\int_V \frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}\left(\tilde{\nabla}_i j_i\right)dV = -\frac{1}{c}\oint \frac{\vec{j}d\vec{S}}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|} = 0\,.$$

В ходе выкладок опять использовалось свойство для операторов набла:

$$\nabla_i \frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|} = -\tilde{\nabla}_i \frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}.$$

Таким образом, калибровка векторного потенциала эквивалентна отсутствию токов через замкнутую поверхность, которая унесена на бесконечность.

Для стационарных токов

$$\mathrm{div}\vec{j} = 0.$$

Все известные на сегодняшний день экспериментальные данные показывают, что уравнения электростатики и магнитостатики хорошо описывают круг явлений, для которого они предназначены. Поэтому попытаемся распространить имеющиеся у нас в распоряжении уравнения на все электромагнитные явления.

12. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим теперь нестационарный случай, т. е. произвольные электродинамические явления при наличии токов и свободных зарядов. По идее они должны описываться уравнениями, которые были получены нами путем обобщения всех известных нам экспериментальных данных:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \mathrm{div}\vec{H} = 0. \end{cases} \tag{12.1}$$

Это восемь скалярных уравнений для семи неизвестных при заданной плотности тока. Дополняет эти уравнения закон сохранения заряда:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0.$$

Совершенно неожиданно чисто математически обнаруживается, что данная система уравнений оказывается противоречивой. Чтобы продемонстрировать это, возьмем дивергенцию от «закона Био – Савара» во второй паре уравнений системы (12.1):

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\,\vec{j}, \qquad \frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\,\vec{j} = 0.$$

Однако из закона сохранения заряда вытекает, что

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Иными словами, уравнения оказались математически несовместимыми. Формально, чтобы устранить противоречие, нужно изменить закон Био – Савара или закон сохранения заряда. Однако понятно, что причина противоречия кроется в том, что мы пытаемся распространить закон, справедливый для статических полей, на нестационарный случай. Поэтому необходимо скорректировать уравнение для ротора напряженности МП в (12.1), чтобы оно выполнялось не только для стационарных токов.

Обобщим это уравнение так, чтобы в стационарном случае оно переходило в (7.5), добавив в правую часть слагаемое, которое является производной от некоторой неизвестной функции по времени:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{\partial\vec{F}}{\partial t}, \tag{12.2}$$

где $\vec{F}$ – векторная функция координат и времени, подлежащая определению. В предельном (стационарном) случае уравнение (12.2), как и полагается, должно переходить в (7.5):

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\vec{F}}{\partial t} = 0.$$

Найдем дивергенцию от уравнения (12.2):

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j} + \operatorname{div}\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}.$$

Опять воспользуемся тождеством

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right) = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j} = -\operatorname{div}\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}.$$

Но из закона сохранения заряда следует, что

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t} = \operatorname{div}\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}.$$

Из уравнения Максвелла для дивергенции ЭП следует, что

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\vec{E}\,.$$

В результате приходим к равенству

$$\frac{1}{c}\operatorname{div}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial t}\right).$$

Отождествляя выражения под операторами дивергенции в левой и правой частях, находим искомый вектор

$$\vec{F} = \frac{\vec{E}}{c}\,.$$

С учетом полученного выражения уравнение Максвелла (12.2) приобретает вид

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,.$$

Окончательно исходная пара уравнений для ротора и дивергенции МП перепишется в форме

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Вынесем за скобку множитель $4\pi/c$ в правой части второго уравнения. В результате правая часть преобразуется к виду

$$\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right).$$

В скобках рядом с объемной плотностью тока стоит слагаемое

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{12.3}$$

которое имеет такую же размерность, как у объемной плотности тока, и прибавляется к ней. Поэтому вполне обоснованно это слагаемое было названо током смещения. Определим физический смысл тока смещения. Чтобы это выяснить, нужно отбросить в уравнениях все лишние эффекты (факторы), которые затрудняют его интерпретацию. А именно исследуем поля в пустом пространстве, когда свободные заряды и токи отсутствуют. Исходная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \mathrm{div}\vec{H} = 0. \end{cases} \tag{12.4}$$

Закон сохранения заряда теперь автоматически включается в эту систему уравнений. И это понятно, так как уравнение для ротора МП изначально выводилось из условия совместимости с законом сохранения заряда.

До Максвелла в многочисленных экспериментах ток смещения не проявлял себя, так как он по величине в подавляющем большинстве ситуаций много меньше токов, текущих по проводникам. Возникает справедливый вопрос, как обнаружить ток смещения (12.3). Как в опыте проявляет себя это специфическое слагаемое? Ответ можно дать из общих соображений. Как уже подчеркивалось ранее, для этого необходимо отбросить в уравнениях все лишние слагаемые и рассмотреть явление в чистом виде. Проанализируем электромагнитное поле в пустом пространстве, где отсутствуют свободные заряды и токи (ρ = 0, j = 0). В результате система уравнений (12.4) упрощается до следующего вида:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{H} = 0, \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\vec{E} = 0, \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases}$$

Выясним, насколько такая постановка задачи имеет смысл. В ходе дальнейших рассуждений вычислим ротор от четвертого уравнения, т. е. найдем ротор ротора ЭП:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\mathrm{rot}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\vec{H}\right).$$

Далее воспользуемся известным тождеством тензорного анализа, согласно которому $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta$. Одновременно исключим напряженность МП из правой части равенства с помощью уравнения для ротора магнитного поля:

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right).$$

Как следует из постановки задачи, дивергенция ЭП в пустом пространстве равна нулю ($\mathrm{div}\vec{E} = 0$). В итоге приходим к уравнению для электрического поля

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \qquad (12.5)$$

Среди уравнений в частных производных второго порядка это уравнение считается эталонным и принадлежит к классу уравнений гиперболического типа [2]. В физике оно известно как волновое уравнение. Константа c в нем имеет смысл фазовой скорости волны.

Проделывая аналогичные преобразования и исключая в ходе выкладок напряженность ЭП, получаем для напряженности МП точно такое же уравнение. А именно вычислим ротор от уравнения, содержащего ток смещения:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\mathrm{rot}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}\right).$$

Далее преобразуем левую часть по формуле rot rot = grad div – Δ. В правой части используем закон электромагнитной индукции для завихренности ЭП:

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{H} - \Delta\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right).$$

Учитывая, что напряженность магнитного поля всегда удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0,$$

приходим окончательно к волновому уравнению для напряженности магнитного поля:

$$\Delta\vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \qquad (12.6)$$

Таким образом, смысл дополнительного слагаемого в виде тока смещения заключается в том, что оно в определенном смысле является индикатором возможности существования в природе электрического и магнитного полей в виде волн. Оба этих векторных поля являются решением волновых уравнений (12.5), (12.6). В настоящее время подобные волны называются электромагнитными. В зависимости от симметрии задачи это могут быть плоские, сферические, цилиндрические или другие типы электромагнитных волн. Г. Герц поставил эксперименты по поиску электромагнитных волн и обнаружил их. Уравнения (12.5), (12.6) описывают распространение волн со скоростью света. Как известно, она равна $3\cdot10^8$ м/с. Таким образом, уравнения Максвелла фактически предсказывают существование электромагнитных волн.

Теоретическое предсказание Максвелла полностью оправдалось в эксперименте. Подтверждение существования электромагнитных волн является одним из ярчайших примеров мощи теоретических методов в физике. В результате выпишем еще раз полную и непротиворечивую систему уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases} \tag{12.7}$$

Однако, как только начинаешь задумываться, что означают эти уравнения и как их решать, сразу выясняется, что они требуют несколько иной интерпретации.

13. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

Ранее уравнения в полной системе зацеплялись друг за друга только за счет закона электромагнитной индукции. Теперь полная система уравнений для ЭМП (12.7) стала еще сложнее. В обоих уравнениях для завихренности полей системы (12.7) присутствуют производные по времени. Иными словами, эту систему уравнений теперь необходимо трактовать не через призму теоремы Гельмгольца, а как-то иначе.

А именно в общем случае задача является динамической, т. е. эволюционной. Согласно ей в первую очередь необходимо определять распределения электрического и магнитного полей в каждый последующий момент времени. С точки зрения методов математической физики ключевыми в этом смысле будут являться слагаемые, представляющие собой производные по t. Выразим в явном виде слагаемые с производными по времени:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c\operatorname{rot}\vec{E}, \\ \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c\operatorname{rot}\vec{H} - 4\pi\vec{j}. \end{cases} \tag{13.1}$$

В каком-то смысле они являются аналогом динамической системы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если задача нестационарная, то токи являются не только функциями координат, но и времени t. Это обязательно должно приводить к изменениям объемной плотности заряда с течением времени. Так что приходится добавить ещё одно уравнение с «нестационарностью»:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{j} \; . \qquad (13.2)$$

Теперь это корректно поставленная задача в виде семи уравнений с семью неизвестными. Но как быть с уравнениями для дивергенций полей? Дело в том, что их учет по идее должен приводить к избыточности системы уравнений.

Возьмем дивергенцию от первого уравнения в системе (13.1):

$$\mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = -c\,\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right) = 0 \; .$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{H} = 0 \; .$$

Интегрирование по времени дает

$$\mathrm{div}\vec{H} = f_1(\vec{r}) \, , \qquad (13.3)$$

где f_1 – произвольная функция координат. Однако очевидно, что в предельном случае стационарных явлений уравнение (13.3) должно переходить в (7.3). Но f_1 может зависеть только от координат, поэтому данная функция должна быть тождественно равна нулю ($f_1 = 0$).

Возьмем теперь дивергенцию от второго уравнения в (13.1):

$$\mathrm{div}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c\,\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{H}\right) - 4\pi\,\mathrm{div}\vec{j} = -4\pi\left(-\frac{\partial \rho}{\partial t}\right).$$

Дивергенция ротора любого векторного поля равна нулю, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}4\pi\rho \; .$$

Опять интегрируем по времени это равенство и приходим к

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho + f_2(\vec{r}) \; .$$

Здесь f_2 – произвольная функция координат. Рассуждая так же, как в предыдущем случае для магнитного поля, при переходе к стационарной задаче полагаем в исходном уравнении $f_2 = 0$. Окончательно приходим к хорошо знакомым нам уравнениям

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{H} = 0, \\ \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho. \end{cases}$$

Они справедливы в каждый момент времени и являются следствием системы уравнений (13.1), (13.2). Иными словами, избыточность системы уравнений (12.7) не приводит к ее противоречивости.

14. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Электромагнитные поля представляют собой физические объекты, т. е. они обладают такими же характеристиками движения, как и любой другой вид материи, – энергией и импульсом. Электромагнитные поля полностью описываются уравнениями Максвелла, поэтому закон сохранения энергии должен из них выводиться.

Пусть в объеме V распределено некоторое произвольное электромагнитное поле (рис. 12). Тогда W – полная энергия ЭМ поля, заключенного в объеме V, а w – объемная плотность энергии (функция координат). По определению

$$w(x,y,z) = \frac{dW}{dV};$$

w – энергия, приходящаяся на единицу объема.

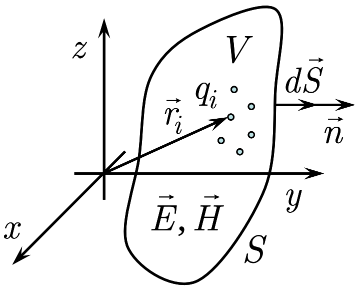

Рис. 12. Энергия электромагнитного поля в выделенном объеме

Иными словами,

$$W = \int\limits_V w dV .$$

Вычислим убыль энергии из рассматриваемого объема за единицу времени:

$$-\frac{\partial}{\partial t}W .$$

Один из возможных механизмов убыли энергии в указанном объеме представляет собой поток энергии через поверхность. Введем вектор плотности потока энергии

$$\vec{U} = \frac{dW}{dSdt}\vec{n} .$$

Здесь $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении плотности потока, а сам вектор по смыслу представляет собой количество энергии, переносимое за единицу времени через элемент поверхности единичной площади. Тогда интеграл по поверхности

$$\oint_S \vec{U}d\vec{S}$$

– это энергия, переносимая через всю поверхность из рассматриваемого объема за единицу времени.

Еще одним механизмом изменения энергии ЭМП является работа, совершаемая над зарядами внутри объема. Полная сила, действующая на i-й заряд в объеме, вычисляется по формуле

$$\vec{F}_i = q_i\vec{E}_i + \frac{q_i}{c}\vec{v}_i \times \vec{H}_i .$$

Искомая работа за единицу времени равна

$$A_t = \sum_i \vec{F}_i\vec{v}_i = \sum_i q_i\vec{E}_i\vec{v}_i + \sum_i \frac{q_i}{c}\left[\vec{v}_i \times \vec{H}_i\right]\cdot\vec{v}_i .$$

Сила Лоренца не может совершать работу по перемещению заряда, потому что она перпендикулярна вектору перемещения. Поэтому при переходе к непрерывному распределению зарядов имеем

$$A_t = \sum_i q_i\vec{E}_i\vec{v}_i = \int \rho\vec{E}\vec{v}dV .$$

Таким образом, количество энергии, убывающее из рассматриваемого объема за единицу времени, определяемое различными по природе способами, дает уравнение

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S \vec{U}\,d\vec{S} + \int_V \rho\vec{E}\vec{v}dV .$$

По смыслу это уравнение выражает собой закон сохранения энергии для ЭМ поля в интегральной форме. Представим W в виде интеграла от объемной плотности энергии:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V w dV = -\int\limits_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = \int\limits_V \mathrm{div}\vec{U}\, dV + \int \rho\vec{E}\vec{v} dV .$$

Исходные рассуждения не предполагали никаких ограничений на рассматриваемый объем, поэтому равенство должно выполняться для подынтегральных функций. Отсюда имеем дифференциальное уравнение, справедливое в каждой точке пространства:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \mathrm{div}\vec{U} + \rho\vec{E}\vec{v} .$$

С учетом определения объемной плотности тока это уравнение записывается окончательно в виде

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \mathrm{div}\vec{U} + \vec{j}\vec{E} . \tag{14.1}$$

Остается определить вид объемной плотности энергии ЭМП w и вектор плотности потока энергии $\vec{U}$. Свободные заряды и токи однозначно связаны с электрическим и магнитным полем посредством уравнений Максвелла. Вычислим последнее слагаемое в (14.1), используя общие уравнения (12.7). Не будем забывать, что объемная плотность тока и напряженность электрического поля меняются в строгом соответствии с этими уравнениями. Выразим объемную плотность тока из второго уравнения (12.7) и домножим левую и правую часть на $\vec{E}$:

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\vec{H} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \Big|\cdot\vec{E} .$$

В ходе выкладок будем придерживаться генеральной линии, пытаясь выразить произведение $\vec{j}\vec{E}$ в виде слагаемых, которые являются либо производной от некоторой скалярной функции по времени, либо дивергенцией некоторого вектора:

$$\vec{j}\vec{E} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\mathrm{rot}\vec{H} - \frac{\vec{E}}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi}E_i\varepsilon_{isk}\nabla_s H_k - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\nabla_s\left(\varepsilon_{isk}E_i H_k\right) - \frac{c}{4\pi}\varepsilon_{isk}H_k\nabla_s E_i - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{c}{4\pi}\mathrm{div}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right] + \frac{c}{4\pi}H_k \mathrm{rot}_k \vec{E} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{c}{4\pi}\mathrm{div}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right] - \frac{1}{4\pi}H_k \frac{\partial H_k}{\partial t} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{c}{4\pi}\mathrm{div}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right). \quad (14.2)$$

Поставленная задача оказалась выполнимой, поэтому, сравнивая почленно выражения (14.1) и (14.2), приходим к выводу, что объемная плотность энергии ЭМП должна определяться выражением

$$w = \frac{E^2+H^2}{8\pi}. \quad (14.3)$$

В то же время вектор плотности потока энергии должен вычисляться как

$$\vec{U} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]. \quad (14.4)$$

В литературе его часто называют вектором Умова – Пойнтинга [6–9]. Согласно (14.4) вектор плотности потока энергии в каждой точке перпендикулярен напряженностям электрического и магнитного полей.

15. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ТЕНЗОР ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ИМПУЛЬСА

Наряду с энергией, электромагнитное поле (ЭМП) должно обладать импульсом. Импульс ЭМП в рассматриваемом объеме может изменяться за счет 2 факторов:

1) он может переноситься через поверхность;

2) ЭМП внутри рассматриваемого объема может передавать часть импульса зарядам, которые тоже могут находиться в этом объеме.

Введем $\vec{p}$ – импульс ЭМП, который приходится на единицу объема. Тогда полный импульс ЭМП в объеме V будет вычисляться интегрированием по этому объему:

$$\int_V \vec{p}\,dV.$$

Чтобы записать закон сохранения, осталось перейти от дискретных зарядов к непрерывному распределению при нахождении силы, действующей на заряды со стороны ЭМП. Заметим, что сила по своему смыслу как раз представляет собой изменение импульса за единицу времени:

$$\begin{cases} q_i\vec{E}_i + \dfrac{q_i}{c}\left[\vec{\upsilon}_i \times \vec{H}_i\right], \\ q_i \to dq = \rho dV. \end{cases}$$

Учитывая оба фактора, за счет которых может происходить убыль импульса из рассматриваемого объема, получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \vec{p}dV = \oint\limits_S \overline{\overline{\varPi}} d\vec{S} + \int\limits_V \rho\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{\upsilon}\times\vec{H}\right]\right)dV\ .$$

Первое слагаемое в правой части равенства описывает поток импульса через поверхность. С математической точки зрения для каждой компоненты импульса требуется соответствующий вектор потока. Поэтому в совокупности для описания переноса вектора требуется тензор второго ранга:

$$\overline{\overline{\varPi}} \to \varPi_{ik}\ .$$

Он называется тензором плотности потока импульса ЭМП. Используя теорему Гаусса – Остроградского и вспоминая определение объемной плотности тока, приходим к форме записи, согласно которой в каждом слагаемом фигурирует единая мера интегрирования.

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \vec{p}dV = \int\limits_V \operatorname{div}\overline{\overline{\varPi}}dV + \int\limits_V \rho\vec{E}dV + \frac{1}{c}\int\limits_V\left[\vec{j}\times\vec{H}\right]dV\ .$$

Равенство справедливо для любого объема *V*. Это означает, что подынтегральные выражения образуют следующее равенство:

$$-\frac{\partial\vec{p}}{\partial t} = \operatorname{div}\overline{\overline{\varPi}} + \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{j}\times\vec{H}\right]. \tag{15.1}$$

Для определения вида вектора объемной плотности импульса $\vec{p}$ и тензора плотности потока импульса $\varPi_{ik}$ воспользуемся уравнениями Максвелла (12.7), из которых выразим объемные плотности заряда и тока:

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\vec{E}\ , \qquad \vec{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ . \tag{15.2}$$

В индексной форме уравнение (15.1) имеет вид

$$-\frac{\partial p_i}{\partial t}-\nabla_j \Pi_{ij}=\rho E_i+\frac{1}{c}\left[\vec{j}\times\vec{H}\right]_i .$$

Вычислим правую часть этого уравнения, пользуясь (15.2):

$$\rho E_i+\frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}j_j H_k=\frac{1}{4\pi}\left(\nabla_j E_j\right)E_i+$$
$$+\frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\frac{c}{4\pi}\varepsilon_{jpq}\left(\nabla_p H_q\right)H_k-\frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial E_j}{\partial t}H_k . \quad (15.3)$$

Первое слагаемое представим в виде полной производной от компонент напряженности ЭП. Во втором слагаемом свернем два символа Леви – Чивиты по повторяющемуся индексу j:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jpq}=-\varepsilon_{jik}\varepsilon_{jpq}=\delta_{iq}\delta_{kp}-\delta_{ip}\delta_{kq} .$$

Также выделим полную производную по времени от компонент электрического и магнитного полей. Продолжая выражение (15.3), получим:

$$\frac{1}{4\pi}\nabla_j\left(E_j E_i\right)-\frac{1}{4\pi}E_j\nabla_j E_i-\frac{1}{4\pi}\left(\delta_{ip}\delta_{kq}-\delta_{iq}\delta_{kp}\right)\left(\nabla_p H_q\right)H_k-$$
$$-\frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial t}\left(E_j H_k\right)+\frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{ijk}E_j\frac{\partial H_k}{\partial t} .$$

Далее сворачиваем дельта-символы и в последнем слагаемом воспользуемся законом электромагнитной индукции, исключая тем самым производную по времени от напряженности МП:

$$\frac{1}{4\pi}\nabla_j\left(E_j E_i\right)-\frac{1}{4\pi}E_j\left(\nabla_j E_i\right)-\frac{1}{4\pi}\left(\nabla_i H_k\right)H_k+$$
$$\frac{1}{4\pi}\left(\nabla_k H_i\right)H_k-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]_i+\frac{1}{4\pi\cancel{c}}\varepsilon_{ijk}(-\cancel{c})\varepsilon_{kpq}\left(\nabla_p E_q\right)E_j .$$

В этом выражении опять сталкиваемся с необходимостью свертки двух символов Леви – Чивиты. В дополнение в этом выражении удается выделить градиент от квадрата магнитного поля:

$$\frac{1}{4\pi}\nabla_j\left(E_j E_i\right)-\frac{1}{4\pi}E_j\left(\nabla_j E_i\right)-\frac{1}{4\pi}\nabla_i\left(\frac{H^2}{2}\right)+\frac{1}{4\pi}\nabla_k\left(H_i H_k\right)-$$
$$-\frac{1}{4\pi}H_i\left(\nabla_k H_k\right)-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]_i-\frac{1}{4\pi}\left(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}\right)\left(\nabla_p E_q\right)E_j .$$

Воспользуемся очередным уравнением Максвелла, согласно которому дивергенция напряженности МП равна нулю. Сворачиваем дельта-символы и упрощаем выражение:

$$\frac{1}{4\pi}\nabla_j\left(E_jE_i\right)-\frac{1}{4\pi}E_j\left(\nabla_jE_i\right)-\frac{1}{4\pi}\nabla_i\left(\frac{H^2}{2}\right)+\frac{1}{4\pi}\nabla_k\left(H_iH_k\right)-$$
$$-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]_i-\frac{1}{4\pi}\left(\nabla_iE_j\right)E_j+\frac{1}{4\pi}\left(\nabla_jE_i\right)E_j.$$

Видно, что второе и последнее слагаемое в этом выражении сокращаются. Плюс предпоследнее слагаемое можно представить как градиент квадрата напряженности ЭП. Далее собираем одинаковые по смыслу слагаемые, объединяя их в соответствующие блоки. Каждое слагаемое необходимо представить либо как производную по времени, либо как дивергенцию некоторого вектора. Очевидно, такая возможность имеется:

$$\frac{1}{4\pi}\nabla_j\left(E_iE_j+H_iH_j\right)-\frac{1}{4\pi}\nabla_i\left(\frac{E^2+H^2}{2}\right)-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]_i=$$
$$=-\nabla_j\left\{\frac{E^2+H^2}{8\pi}\delta_{ij}-\frac{E_iE_j+H_iH_j}{4\pi}\right\}-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]_i. \quad (15.4)$$

Первое слагаемое представляет собой свертку оператора набла с некоторым тензором, т. е. дивергенцию тензора второго ранга, поэтому выражение под оператором набла необходимо отождествить с тензором плотности потока импульса в (15.1):

$$\Pi_{ij}=\frac{E^2+H^2}{8\pi}\delta_{ij}-\frac{E_iE_j+H_iH_j}{4\pi}.$$

Как видно из определения, тензор плотности потока импульса представляет собой симметричный тензор 2-го ранга ($\Pi_{ij}=\Pi_{ji}$). В последнем слагаемом (15.4) под оператором производной по времени стоит вектор объемной плотности импульса

$$\vec{p}=\frac{\vec{E}\times\vec{H}}{4\pi c}.$$

Заметим, что он, как и вектор Умова – Пойнтинга, перпендикулярен как $\vec{E}$, так и $\vec{H}$. Впервые давление электромагнитного излучения было количественно измерено в 1899 г. П.Н. Лебедевым с помощью крутильных весов.

16. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Удивительно, но можно еще указать на некоторые свойства уравнений Максвелла, которые пока оставались за рамками обсуждения, несмотря на довольно большой объем изложенного материала. Проанализируем далее отдельно два уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases}$$

Выбранная пара уравнений замечательна тем, что не зависит от источниковых слагаемых, т. е. не зависит от ρ и $\vec{j}$. Эти два уравнения фактически представляют собой общую связь между полями $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Из данных уравнений можно получить универсальные свойства полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Так, если дивергенция некоторого векторного поля равна нулю в каждой точке пространства, то это поле всегда можно представить как ротор другого векторного поля:

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}, \tag{16.1}$$

где $\vec{A}$ – векторный потенциал. Подставим связь между напряженностью магнитного поля и векторным потенциалом в закон электромагнитной индукции:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} = -\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Теперь левую и правую части можно объединить в общее выражение

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Известно, что если ротор некоторого векторного поля равен нулю в любой точке пространства и в каждый момент времени, то это векторное поле является потенциальным и может быть представлено как градиент некоторого скалярного поля. Отсюда

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi. \tag{16.2}$$

В результате согласно (16.1) и (16.2) имеем

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \end{cases} \qquad (16.3)$$

где φ – соответственно скалярный, $\vec{A}$ – векторный потенциалы. В совокупности φ и $\vec{A}$ образуют так называемый электромагнитный потенциал. Как видно из формул (16.3), эти две величины полностью определяют напряженности электрического и магнитного полей, т. е. $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Эти формулы, действительно, позволяют говорить о единой природе электрического и магнитного полей, так как выражаются через совокупность одних и тех же величин φ и $\vec{A}$.

17. КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Как было показано в предыдущем параграфе, напряженности электрического и магнитного полей могут быть выражены через электромагнитный потенциал в виде совокупности всего четырех скалярных величин (применительно к декартовой системе координат это φ, A_x, A_y и A_z).

Из определения (16.3) для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ видно, что скалярный и векторный потенциалы определены неоднозначно. Выясним степень свободы при определении этих величин:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \end{cases}$$

Очевидно, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ как силовые поля представляют собой измеримые величины, и они должны быть определены однозначно. Отсюда из второго уравнения вытекает, что

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{A}', \quad \operatorname{rot}\left(\vec{A} - \vec{A}'\right) = 0.$$

В теории векторных полей доказывается, что, если ротор какого-то векторного поля равен нулю, это поле может быть представлено как градиент некоторой скалярной функции. Поэтому

$$\vec{A} - \vec{A}' = \nabla f, \quad \vec{A} = \vec{A}' + \nabla f, \qquad (17.1)$$

где f – произвольная скалярная функция. Иными словами, векторный потенциал $\vec{A}$ определен с точностью до градиента от некоторой скалярной функции. Посмотрим теперь, как при этом должен измениться скалярный потенциал φ:

$$-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi'-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}.$$

Перегруппировав слагаемые, получаем:

$$-\nabla\left(\varphi-\varphi'\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}-\vec{A}'\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla f=\nabla\left(\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Слева и справа стоят градиенты от некоторых выражений, поэтому

$$\varphi-\varphi'=-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}+F(t),$$

где $F(t)$ – произвольная функция времени. Не теряя общности рассуждений, эту функцию всегда можно отбросить. В результате получаем

$$\varphi=\varphi'-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{17.2}$$

Таким образом, переход от φ' и $\vec{A}'$ к новым φ и $\vec{A}$ по формулам (17.1) и (17.2) не меняет напряженности электрического и магнитного полей. Вариации φ и $\vec{A}$, при которых $\vec{E}$ и $\vec{H}$ остаются прежними, называются калибровочными преобразованиями, а само свойство неизменности $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при таких преобразованиях называется *калибровочной инвариантностью*. В результате можно сделать вывод, согласно которому φ и $\vec{A}$ определяются с точностью до калибровочных преобразований. Будем иметь в виду, что калибровочные преобразования выражают собой достаточно глубокие математические свойства скалярного и векторного потенциалов.

18. КАЛИБРОВКА ЛОРЕНЦА. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Как было показано ранее, уравнения Максвелла

$$\begin{cases}\operatorname{div}\vec{H}=0,\\ \operatorname{rot}\vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t},\end{cases} \tag{18.1}$$

имеет смысл рассматривать в паре, так как они удовлетворяются тождественно, если напряженности электрического и магнитного полей выражаются через векторный и скалярный потенциалы следующим образом:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \end{cases} \tag{18.2}$$

Соотношения (18.1) отражают общие физические свойства нестационарного электрического и магнитного полей. В то же время векторный и скалярный потенциалы $\vec{A}$ и φ в определенном смысле являются произвольными, и на них не накладываются какие-либо ограничения.

Это положение отнюдь не относится ко второй паре уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho. \end{cases} \tag{18.3}$$

И это понятно, так как вторая пара уравнений содержит источниковые слагаемые. В этом смысле они стоят особняком по отношению к системе (18.1). С физической точки зрения потенциалы $\vec{A}$ и φ должны быть решениями уравнений (18.3) и, следовательно, обязаны зависеть от того, как распределены заряды и токи. Подставим (18.2) в оба уравнения системы (18.3). Первое уравнение дает

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2},$$

или, раскрывая ротор ротора векторной функции по известной формуле тензорного анализа, получаем

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}. \tag{18.4}$$

Второе уравнение дает

$$-\operatorname{div}\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = 4\pi\rho. \tag{18.5}$$

Имеется простая математическая возможность упростить эти уравнения, используя факт наличия определенной свободы в выборе потенциалов $\vec{A}$ и φ. Потребуем, чтобы уравнение (18.4) привелось к одному из эталонных уравнений математической физики. Наложим дополнительное математическое условие и будем в дальнейшем называть эту связь между скалярным и векторным потенциалами калибровкой Лоренца:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0\,. \tag{18.6}$$

Удивительно, но при наложении этого условия на скалярный и векторный потенциалы оба уравнения (18.4) и (18.5) приводятся к формально одинаковому виду в рамках математической физики:

$$\begin{cases} \Delta\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \Delta\varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \end{cases} \tag{18.7}$$

Оба уравнения как для $\vec{A}$, так и для φ с точки зрения математики представляют собой неоднородные волновые уравнения. В дополнение необходимо указать на то, что применение калибровки Лоренца позволило расцепить уравнения. Для каждой неизвестной величины (трех компонент вектора $\vec{A}$ и φ) имеем теперь свое уравнение. Введем так называемый оператор Даламбера:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,.$$

С учетом этого определения неоднородные уравнения для векторного и скалярного потенциала (18.7) записываются более компактно:

$$\begin{cases} \Box\vec{A} = -\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \Box\varphi = -4\pi\rho. \end{cases}$$

Несмотря на то, что уравнения для $\vec{A}$ и φ получились независимыми, они должны быть связаны калибровкой Лоренца (18.6). Это означает, что правые части в уравнениях Даламбера не могут быть заданы независимо. Разберемся, в чем смысл калибровки Лоренца. Возьмем дивергенцию от первого уравнения в (18.7) и подействуем оператором

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

на второе уравнение в (18.7). После этого сложим их:

$$\Box\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\left(\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0\,.$$

Видно, что калибровка Лоренца в действительности эквивалентна требованию выполнения закона сохранения заряда. Можно заключить, что калибровка Лоренца является условием совместимости уравнений Даламбера для $\vec{A}$ и φ.

В дополнение необходимо выяснить, всегда ли можно удовлетворить калибровке Лоренца. Допустим, существуют потенциалы $\vec{A}'$ и φ', которые в совокупности не удовлетворяют условию Лоренца

$$\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = \chi(\vec{r},t) \neq 0,$$

где $\chi(\vec{r},t)$ – некоторая функция координат и времени, отличная от нуля. Однако ранее было показано, что всегда найдутся калибровочные преобразования, при которых поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ остаются неизменными:

$$\begin{cases} \vec{A}' \to \vec{A} + \nabla f, \\ \varphi' \to \varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial f}{\partial t}. \end{cases}$$

В результате получаем:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \Delta f + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \chi(\vec{r},t).$$

В левой части этого равенства организуется даламбертиан калибровочной функции *f*. Из этого равенства калибровочное условие Лоренца в терминах новых переменных $\vec{A}$ и φ выражается следующим образом:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \chi(\vec{r},t) - \Box f.$$

Очевидно, что если найдется функция *f*, удовлетворяющая уравнению $\Box f = \chi(\vec{r},t)$, то для $\vec{A}$ и φ условие Лоренца будет выполняться. Из курса математической физики известно, что уравнение Даламбера всегда имеет решение [2], поэтому обязательно найдутся скалярный и векторный потенциалы, удовлетворяющие калибровке Лоренца.

Наряду с калибровкой Лоренца иногда применяется так называемая кулоновская калибровка, использовавшаяся нами ранее при решении магнитостатических задач:

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0. \tag{18.8}$$

При такой калибровке уравнения для потенциалов (18.4), (18.5) приобретают другой вид:

$$\begin{cases} \Delta\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{c}\nabla\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = -\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \Delta\varphi = -4\pi\rho. \end{cases} \tag{18.9}$$

Условие (18.8) приводит к уравнению для скалярного потенциала, из которого вытекает, что распределение зарядов должно быть таким же, как если бы они покоились. Вычислив скалярный потенциал φ из уравнения Пуассона и подставив его в уравнение для векторного потенциала, получаем стандартное неоднородное волновое уравнение с откорректированной известной правой частью. Разумеется, поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$, найденные по значениям потенциалов системы уравнений (18.9) с кулоновской калибровкой, должны совпадать с решениями уравнений (18.7), полученными при помощи калибровки Лоренца.

19. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

В качестве примера решения электродинамической задачи в терминах потенциалов исследуем уравнения Даламбера в пустом пространстве:

$$\Box\vec{A} = 0, \tag{19.1}$$

$$\Box\varphi = 0, \tag{19.2}$$

с учетом калибровки

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Для простоты рассмотрим одномерные решения, когда имеется зависимость всех неизвестных только от одной пространственной координаты x:

$$\begin{cases} \vec{A}(x,t) \\ \varphi(x,t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \end{cases}$$

Все три компоненты векторного потенциала $\vec{A}$ должны удовлетворять волновому уравнению. Для того чтобы выяснить, каким будет общее решение этих уравнений, перейдем к новым независимым переменным $\xi = x - ct$ и $\eta = x + ct$. Для этого сначала необходимо преобразовать производные по переменным x и t в производные по ξ и η:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=-c\frac{\partial}{\partial \xi}+c\frac{\partial}{\partial \eta}=c\left(\frac{\partial}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \xi}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \xi}\right)=c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right).$$

В новых переменных имеем уравнение для $\varphi(\xi,\ \eta)$:

$$\cancel{\frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi^2}}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi\partial \eta}+\cancel{\frac{\partial^2\varphi}{\partial \eta^2}}-\cancel{\frac{\partial^2\varphi}{\partial \eta^2}}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi\partial \eta}-\cancel{\frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi^2}}=0.$$

В уравнении остаются слагаемые только с перекрестными производными. После сокращения на множитель, отличный от нуля, приходим к интегрируемому уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi\,\partial \eta}=0.$$

Это уравнение гиперболического типа в канонической форме. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(\xi,\eta)=\varphi_1(\xi)+\varphi_2(\eta),$$

где φ_1 и φ_2 – два частных решения в виде произвольных функций, на которые не накладывается каких-либо серьезных ограничений, кроме ограниченности во всей области их определения. Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$\varphi(x,t)=\varphi_1(x-ct)+\varphi_2(x+ct).$$

Это общее решение представляет собой суперпозицию двух волн [2]: φ_1 – волна, распространяющаяся по направлению возрастания x, φ_2 – решение, описывающее движение в противоположном направлении.

Изучим свойства одного из этих двух частых решений. А именно для определенности рассмотрим волну, движущуюся слева направо:

$$\begin{cases}\varphi=\varphi(x-ct)\equiv\varphi(\xi),\\ \vec{A}=\vec{A}(x-ct)\equiv\vec{A}(\xi).\end{cases}$$

Это решение описывает волну (рис. 13), все характеристики которой остаются постоянными в плоскости (y, z). Такая волна называется плоской. Вычислим дивергенцию векторного потенциала

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 .$$

Тогда условие Лоренца дает

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 .$$

В рамках одноволнового решения с зависимостью только от одной переменной ξ это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial A_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial A_x}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \qquad A_x' = \varphi' .$$

Здесь штрихом обозначена производная по ξ.

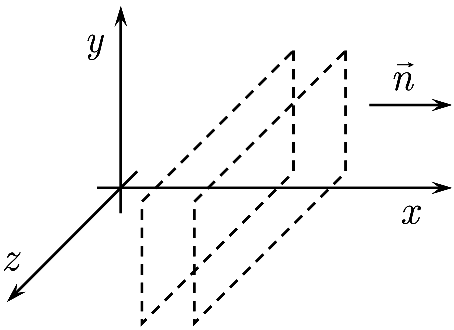

Рис. 13. Плоские решения для векторного и скалярного потенциалов

Найдем напряженности полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ по формулам с учетом найденных ограничений на потенциалы:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}. \end{cases}$$

В проекциях на координатные оси уравнение для напряженности магнитного поля дает

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} .$$

Пользуясь наличием плоской симметрии в задаче, сразу приходим к важному выводу:

$$H_x = 0 .$$

Иными словами, магнитное поле представляет собой поперечную волну. Здесь же вычислим x-компоненту электрического поля:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\varphi' + A_x' \equiv 0 .$$

Таким образом, продольная компонента электрического поля тоже равна нулю. Электрическое поле также представляет собой поперечную волну.

Вычислим оставшиеся компоненты электрического и магнитного полей:

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -A_z', \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = A_z' ,$$

$$H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} = A_y', \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = A_y' .$$

Сравнивая построчно полученные результаты, приходим к выводу:

$$H_y = -E_z, \quad H_z = E_y .$$

Далее будем иметь в виду, что

$$\vec{E}(0, E_y, E_z), \qquad \vec{H}(0, H_y, H_z) . \tag{19.3}$$

Найдем скалярное произведение векторов напряженности электрического и магнитного полей:

$$\vec{E}\cdot\vec{H} = E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z = E_y(-E_z) + E_z E_y \equiv 0 .$$

Равенство нулю скалярного произведения означает, что в каждый момент времени и в каждой точке пространства поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ортогональны. В то же время рассматриваемая волна движется в направлении оси x. Иными словами, с учетом (19.3) можно сделать вывод, что *плоская электромагнитная волна* является поперечной.

Произвольная плоская электромагнитная волна всегда может быть представлена как суперпозиция двух линейно поляризованных волн. В то же время форма волны может быть любой, но её всегда можно представить как суперпозицию гармонических монохроматических волн. Далее рассмотрим свойства линейно поляризованной гармонической монохроматической волны. Пусть вектор напряженности электрического поля имеет только одну составляющую вдоль оси y:

$$E_y = E_0 \cos(k\xi), \quad \Rightarrow \quad H_y = 0;$$
$$E_z = 0, \qquad\qquad \Rightarrow \quad H_z = H_0 \cos(k\xi).$$

Как уже указывалось выше, направление движения волны будет описываться единичным вектором $\vec{n}(1,0,0)$. Очевидно, что приведенные решения удовлетворяют волновым уравнениям

$$E_y = E_0 \cos\left(k(x - ct) \right), \tag{19.4}$$

$$H_y = H_0 \cos\left(k(x - ct) \right). \tag{19.5}$$

Константа k имеет смысл волнового числа, которое определяет пространственную периодичность волны. Из выражений (19.4), (19.5) легко определить оставшиеся характеристики гармонической волны. Длина волны и циклическая частота вычисляются по формулам

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \omega = kc .$$

Фазовая скорость удовлетворяет важному требованию

$$c = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \text{const},$$

т. е. плоская электромагнитная волна в вакууме распространяется без дисперсии. Ее фазовая скорость не зависит от частоты.

В продолжение вычислим вектор плотности потока энергии в плоской волне. По определению (14.4)

$$\vec{U} = c\frac{\vec{E} \times \vec{H}}{4\pi}. \tag{19.6}$$

Отсюда следует, что вектор Умова – Пойнтинга для рассматриваемой плоской волны имеет следующие компоненты:

$$U_x = \frac{c}{4\pi}\left(E_y H_z - E_z H_y\right) = \frac{c}{4\pi}\left(E_y^2 + E_z^2\right) = \frac{c}{4\pi}E^2 = \frac{c}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right),$$
$$U_y = 0, \quad U_z = 0 .$$

Таким образом, вектор плотности потока энергии ориентирован вдоль направления распространения волны:

$$\vec{U} = \frac{c}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right)\vec{n} .$$

Напомним, что плотность энергии электромагнитного поля вычисляется по формуле

$$w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}. \tag{19.7}$$

С учетом этой формулы получаем выражение для вектора Умова – Пойнтинга

$$\vec{U} = cw\vec{n}.$$

Этот простой результат говорит о том, что энергия переносится плоской электромагнитной волной со скоростью света c, и это происходит в направлении единичного вектора $\vec{n}$.

В заключение еще раз подчеркнем, как соотносятся в пространстве ключевые векторы, описывающие плоскую ЭМВ:

$$\vec{E} \perp \vec{H},\ \vec{E} \perp \vec{n},\ \vec{H} \perp \vec{n}.$$

Визуально структура плоской электромагнитной волны продемонстрирована на рис. 14.

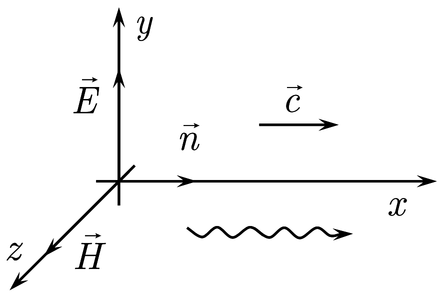

Рис. 14. Плоская электромагнитная волна

20. СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

В сферической волне есть выделенная точка, и все характеристики волны зависят от расстояния до неё. Пусть эта точка будет расположена в начале координат. Будем искать сферически симметричные решения уравнений Даламбера для $\vec{A}$ и φ. Искомые решения являются функциями двух аргументов – радиальной координаты r и времени t:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(r,t), \\ \vec{A} = \vec{A}(r,t). \end{cases}$$

В пустом пространстве уравнение для скалярного потенциала формально по-прежнему имеет вид

$$\Box\varphi = 0$$

или в развернутом виде

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Выпишем оператор Лапласа в сферических координатах [1; 2]:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2},$$

где θ – меридиональная, а α – азимутальная угловые переменные. В случае сферически симметричных волн имеем $\partial/\partial\theta = 0$, $\partial/\partial\alpha = 0$. Раскрывая радиальную часть Лапласиана, получаем уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{20.1}$$

Простой подстановкой это уравнение приводится к стандартному волновому уравнению. Представим решение в виде

$$\varphi(r,t) = \frac{f(r,t)}{r},$$

где f – неизвестная функция, подлежащая определению. Переформулируем уравнение (20.1) в терминах новой неизвестной f. Для этого вычислим промежуточные величины

$$\varphi' = \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2}, \qquad \varphi'' = \frac{f''}{r} - \frac{f'}{r^2} - \frac{f'}{r^2} + \frac{2f}{r^3}.$$

Здесь штрихом обозначается дифференцирование по r. Подставляем производные в исходное уравнение (20.1):

$$\frac{f''}{r} - 2\cancel{\frac{f'}{r^2}} + \cancel{\frac{2f}{r^3}} + \frac{2}{r}\left(\cancel{\frac{f'}{r}} - \cancel{\frac{f}{r^2}}\right) = \frac{1}{cr}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

В результирующем уравнении отсутствуют слагаемые с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Вследствие того, что радиальная координата может принимать только положительные значения ($r \ge 0$), это волновое уравнение дает частные решения в виде суперпозиции сходящейся и расходящейся волн:

$$f(r,t) = f_1(r-ct) + f_2(r+ct)\,.$$

Возвращаясь обратно к φ, приходим к следующему решению для сферически симметричных волн:

$$\varphi(r,t) = \frac{f_1(r-ct)}{r} + \frac{f_2(r+ct)}{r}\,.$$

Видно, что их амплитуда убывает с расстоянием, что является универсальной топологической особенностью всех сферических волн. Первое слагаемое описывает расходящуюся, а второе – сходящуюся сферическую волну.

21. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Как уже упоминалось ранее, уравнения для векторного и скалярного потенциалов с точки зрения методов математической физики представляют собой неоднородные волновые уравнения:

$$\begin{cases} \Delta\varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \\ \Delta\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}. \end{cases}$$

В силу линейности и относительной простоты уравнений оказывается, что можно найти их решение в общем виде. В дополнение не будем забывать, что потенциалы связаны друг с другом калибровкой Лоренца:

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0\,.$$

Следуя логике рассуждений [10], найдем частные решения этих неоднородных уравнений в случае произвольных правых частей. Решим сначала уравнение для скалярного потенциала φ, а затем по аналогии выпишем решение второго уравнения.

Пусть заряд в некотором фиксированном объеме dV (см. рис. 15), исходя из общей постановки задачи, является функцией времени $dq(t)$.

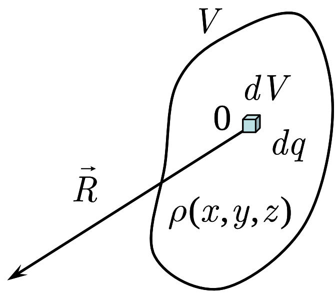

Рис. 15. Потенциал элемента объема с зарядом, меняющимся в зависимости от времени

В результате объемная плотность заряда в произвольной точке пространства запишется следующим образом: $\rho = dq\delta(\vec{R})$. Подставим выражение для объемной плотности заряда в уравнение для электрического потенциала

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi dq\delta(\vec{R}).$$

В силу линейности этого уравнения результирующее поле будет равно сумме полей, создаваемых отдельными элементами. Потенциал поля точечного заряда, характеризующийся сферической симметрией, везде, кроме начала координат $\delta(\vec{R}) = 0$, описывается волновым уравнением

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь R – радиальная координата. Делаем стандартную для сферических координат подстановку и получаем уравнение

$$\varphi = \frac{f(R,t)}{R}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

решение которого нам уже хорошо знакомо:

$$f = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right).$$

В соответствии с принципом причинности будем интересоваться только расходящимися электромагнитными волнами $f_2 = 0$. Функция f_1 в этом решении пока произвольна, так как в любом случае удовлетворяет волновому уравнению. Таким образом, имеем

$$\varphi = \frac{f\left(t - R/c\right)}{R}.$$

Это решение должно быть справедливо, в том числе в начале координат. Иначе говоря, необходимо подобрать $f(t - R/c)$ так, чтобы в начале координат удовлетворялось неоднородное волновое уравнение.

Заметим, что при $R \to 0$ имеет место асимптотика $\varphi \to \infty$. Однако производные от φ по координатам растут быстрее, чем производные по времени, поэтому при $R \to 0$ членом

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

можно пренебречь по сравнению с членом

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial f}{\partial R}\right).$$

Таким образом, в пределе $R \to 0$ приходим к уравнению, которое имеет решение $\varphi = dq/R$:

$$\Delta\varphi = -4\pi dq\delta(\vec{R}).$$

В этой ситуации $f(t) = dq(t)$. Возвращаясь к общему случаю произвольных R, в числителе решения должна будет стоять та же функция, только зависящая от аргумента $t - R/c$:

$$\varphi(R,t) = \frac{dq\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \qquad (21.1)$$

Теперь легко найти решение уравнения для произвольного распределения зарядов $\rho(x,y,z,t)$:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho.$$

Чтобы найти результирующий потенциал, необходимо проинтегрировать (21.1) по всем зарядам. С учетом произвольно расположенной системы координат (рис. 16) получаем интеграл:

$$\varphi(X,Y,Z,t) = \int\limits_V \frac{\rho\left(x,y,z,t - \frac{R'}{c}\right)dV}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|} + \varphi_0. \qquad (21.2)$$

Теперь расстояние от заряда до точки обозначается R'.

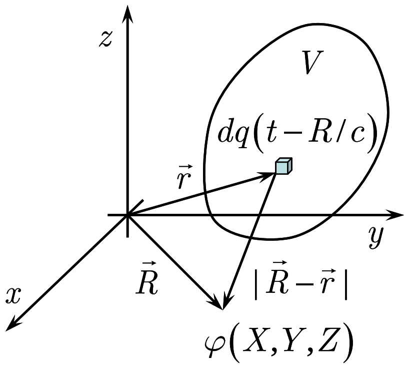

Рис. 16. Потенциал системы непрерывно распределенных зарядов, перемещающихся в пространстве

Координатами X, Y, Z обозначается положение точки, в которой вычисляется поле относительно рассматриваемой системы координат, ρ – значение объемной плотности зарядов в точке с координатами x, y, z в момент времени $t - R'/c$. Компактно это решение записывают так:

$$\varphi = \int\limits_V \frac{\rho_{t-\frac{R'}{c}} dV}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}. \qquad (21.3)$$

Для краткости здесь вводится новая переменная $\tau = t - R'/c$, так называемое время запаздывания. Зависимость от переменной τ показывает, что значение ρ надо брать не в момент времени t, а в более ранний момент времени $t - R'/c$. Аналогично (21.2), (21.3) получается выражение для векторного потенциала:

$$\vec{A}(X,Y,Z,t) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\vec{j}_{t-\frac{R'}{c}} dV}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|} + \vec{A}_0. \qquad (21.4)$$

Выражения (21.3) и (21.4) для векторного и скалярного потенциалов называются *запаздывающими потенциалами*, а величина R'/c – временем запаздывания (или временем ретардации). Время запаздывания представляет собой временной интервал, в течение которого электромагнитное поле, распространяясь со скоростью света, проходит путь R'. Обратим внимание на то, что время запаздывания для каждого точечного заряда вычисляется индивидуально и зависит от его расположения.

Вывод: система нестационарно движущихся зарядов испускает электромагнитные волны, т. е. такая система является излучателем.

22. ПОТЕНЦИАЛЫ ЛИЕНАРА – ВИХЕРТА

Применим формулы запаздывающих потенциалов для описания поля одиночного точечного заряда, движущегося по произвольному закону (рис. 17):

$$\vec{v}_0(t), \quad \vec{r}_0 = \int \vec{v}_0(t)dt,$$

где $\vec{v}_0(t)$ – скорость движения в каждый момент времени. При заданной скорости перемещения закон движения всегда можно найти путем вычисления первообразной от исходного выражения для скорости.

Плотность заряда и плотность тока в случае одиночного точечного движущегося заряда соответственно равны

$$\rho = e\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_0), \quad \vec{j} = \rho\vec{v}_0 = e\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)\vec{v}_0(t).$$

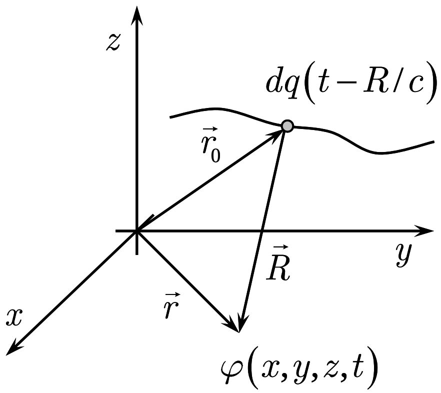

Рис. 17. Точечный движущийся заряд

Вычислим сначала, например, векторный потенциал, а затем по аналогии можно будет сразу написать ответ для скалярного потенциала. Используя формулу (21.4), получаем

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\left(t - \dfrac{R}{c}\right)dV'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} = \frac{e}{c}\int \frac{\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)\cdot\vec{v}_0\left(t - \dfrac{R}{c}\right)dV'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} =$$

$$= \frac{e}{c} \int \frac{\delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_0\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right) \cdot \vec{\upsilon}_0\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

По аналогии скалярный потенциал вычисляется по формуле

$$\varphi(\vec{r}, t) = e \int \frac{\delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_0\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Свойства дельта-функции были определены ранее для неподвижной системы координат. Сейчас ими нельзя непосредственно воспользоваться, так как $\vec{r}_0$ необходимо брать в момент времени

$$t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}.$$

Для выполнения интегрирования введем новые переменные, связанные с движущимся зарядом

$$\tilde{x} = x' - x_0(\tau), \quad \tilde{y} = y' - y_0(\tau), \quad \tilde{z} = z' - z_0(\tau).$$

При интегрировании необходимо преобразовать

$$dV' \to d\tilde{V}$$

или

$$dx'dy'dz' \to d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}.$$

Вычислим якобиан для перехода к новым переменным интегрирования. Для простоты рассмотрим сначала движение заряда только вдоль одной из осей. Пусть это будет ось x:

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x'} = 1 - \upsilon_0 \frac{\partial}{\partial x'}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) = 1 - \frac{\upsilon_0}{c}\frac{(x - x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Оставшиеся элементы определителя вычисляются просто:

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y'} = 0, \ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z'} = 0, \ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x'} = 0, \ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y'} = 1, \ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z'} = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x'} = 0, \ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y'} = 0, \ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z'} = 1.$$

В результате получаем Якобиан

$$\frac{\partial(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}{\partial(x',y',z')}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x'} & \frac{\partial\tilde{x}}{\partial y'} & \frac{\partial\tilde{x}}{\partial z'}\\ \frac{\partial\tilde{y}}{\partial x'} & \frac{\partial\tilde{y}}{\partial y'} & \frac{\partial\tilde{y}}{\partial z'}\\ \frac{\partial\tilde{z}}{\partial x'} & \frac{\partial\tilde{z}}{\partial y'} & \frac{\partial\tilde{z}}{\partial z'}\end{vmatrix}=1-\frac{\upsilon_0}{c}\frac{(x-x')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}.$$

Можно показать, что в общем случае 3D-движения заряда, когда скорость имеет все три компоненты, аналогичный якобиан имеет вид

$$\frac{\partial(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}{\partial(x',y',z')}=1-\frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}.$$

В результате преобразуем элемент объема:

$$dx'dy'dz'=\left[\frac{\partial(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}{\partial(x',y',z')}\right]^{-1}d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}=\frac{d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}}{1-\frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}.$$

Возвращаемся теперь к задаче нахождения векторного потенциала:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{e}{c}\int\frac{\delta(\tilde{\tilde{\vec{r}}})\cdot\vec{\upsilon}_0\left(t-\frac{\left|\vec{r}-\tilde{\tilde{\vec{r}}}-\vec{r}_0\right|}{c}\right)d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}}{\left|\vec{r}-\tilde{\tilde{\vec{r}}}-\vec{r}_0\right|\left(1-\frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\frac{(\vec{r}-\tilde{\tilde{\vec{r}}}-\vec{r}_0)}{\left|\vec{r}-\tilde{\tilde{\vec{r}}}-\vec{r}_0\right|}\right)}=$$

$$=\frac{e\vec{\upsilon}_0(\tau)}{c\left(R(\tau)-\frac{\vec{\upsilon}_0(\tau)\vec{R}(\tau)}{c}\right)}. \quad (22.1)$$

Точно так же получаем окончательное выражение для скалярного потенциала:

$$\varphi(\vec{r},t)=e\int\frac{\delta(\tilde{\tilde{\vec{r}}})\,d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}}{\left|\vec{r}-\tilde{\tilde{\vec{r}}}-\vec{r}_0\right|\left(1-\frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\frac{(\vec{r}-\tilde{\tilde{\vec{r}}}-\vec{r}_0)}{\left|\vec{r}-\tilde{\tilde{\vec{r}}}-\vec{r}_0\right|}\right)}=\frac{e}{R(\tau)-\frac{\vec{\upsilon}_0(\tau)\vec{R}(\tau)}{c}}. \quad (22.2)$$

Выражения для $\vec{A}$ и φ применительно к произвольно движущемуся заряду носят название *потенциалов Лиенара – Вихерта*. Потенциалы Лиенара – Вихерта характеризуют поле точечного заряда в самом общем виде – при движении вдоль произвольной траектории и произвольном характере движения.

В пределе сколь угодно малых скоростей движения

$$\frac{\upsilon_0}{c} \to 0$$

формула для скалярного потенциала (22.2) переходит в выражение для медленно движущегося заряда без эффекта запаздывания, а векторный потенциал $\vec{A}$ согласно (22.1) стремится к нулю. Поле в этом пределе потенциально.

23. НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

Остается найти в общем виде напряженности полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$, которые связаны с потенциалами (22.1) и (22.2) общими соотношениями

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}. \end{cases}$$

Между тем следует обратить внимание на то, что потенциалы $\vec{A}$ и φ зависят от $\vec{r}$ и t как сложные функции. Производная по времени t выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t}, \qquad \tau = t - \frac{R(\tau)}{c}.$$

Вычислим некоторые вспомогательные величины:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R(\tau)}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{c}\frac{\partial R(\tau)}{\partial\tau}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = 1.$$

Откуда

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial R(\tau)}{\partial\tau}}. \tag{23.1}$$

Воспользуемся тождеством

$$R\frac{\partial R}{\partial \tau}=\vec{R}\frac{\partial \vec{R}}{\partial \tau}=(\vec{r}-\vec{r}\,')\frac{\partial(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\partial t}=-\vec{R}\frac{\partial \vec{r}\,'}{\partial \tau}=-\vec{R}\vec{\upsilon}_0 .$$

В результате равенство (23.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{\upsilon}_0\vec{R}}{R}} . \tag{23.2}$$

Это еще одно промежуточное вспомогательное выражение, которое нам пригодится в ходе дальнейших выкладок.

Для сокращения количества записей в ходе вычислений, следуя [6], введем обозначение

$$\lambda(\tau)=R(\tau)-\frac{\vec{\upsilon}_0(\tau)\vec{R}(\tau)}{c} .$$

Тогда с учетом определения λ потенциалы Лиенара – Вихерта (22.1) и (22.2) приобретают вид

$$\vec{A}=\frac{e\vec{\upsilon}_0}{c\lambda}, \qquad \varphi=\frac{e}{\lambda} .$$

В то же время производная (23.2) принимает следующую форму:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}=\frac{R}{\lambda} .$$

Вычислим, наконец, напряженность электрического поля $\vec{E}$:

$$\vec{E}=-e\nabla\frac{1}{\lambda}-\frac{e}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{\upsilon}_0}{\lambda}\right)=\frac{e}{\lambda^2}\nabla\lambda-\frac{e}{c^2\lambda}\frac{\partial\vec{\upsilon}_0}{\partial t}+\frac{e\vec{\upsilon}_0}{c^2\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial t} .$$

Найдем недостающие множители:

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}_0}{\partial t}=\frac{\partial\vec{\upsilon}_0}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}=\dot{\vec{\upsilon}}_0\frac{R}{\lambda}, \qquad \frac{\partial\vec{R}_0}{\partial \tau}=-\vec{\upsilon}_0(\tau) .$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{R}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(R(\tau)-\frac{\vec{\upsilon}_0(\tau)\vec{R}(\tau)}{c}\right)=$$

$$=\frac{R}{\lambda}\left(\frac{\partial R}{\partial\tau}-\frac{\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R}}{c}-\frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\frac{\partial\vec{R}}{\partial\tau}\right)=$$

$$=\frac{R}{\lambda}\left(-\frac{\vec{R}\vec{\upsilon}_0}{R}-\frac{\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R}}{c}-\frac{\vec{\upsilon}_0^{\,2}}{c}\right).$$

Вычислим градиент вспомогательной функции λ:

$$\nabla\lambda = (\nabla\lambda)_\tau + \frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\nabla\tau = \frac{\partial}{\partial X_i}\left(R - \frac{\vec{\upsilon}_0\vec{R}}{c}\right) + \left(\frac{\partial R}{\partial\tau} - \frac{\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R}}{c} + \frac{\vec{\upsilon}_0^2}{c}\right)\nabla\tau =$$

$$= \frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0}{c} + \left(-\frac{\vec{\upsilon}_0\vec{R}}{R} - \frac{\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R}}{c} + \frac{\vec{\upsilon}_0^2}{c}\right)\nabla\tau .$$

Как видно из полученного выражения, для этого необходимо найти градиент от времени запаздывания:

$$\nabla\tau = \nabla\left(t - \frac{R}{c}\right) = -\frac{1}{c}\nabla R = -\frac{1}{c}(\nabla R)_\tau - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial\tau}\nabla\tau = -\frac{\vec{R}}{cR} + \frac{\vec{\upsilon}_0\vec{R}}{cR}\nabla\tau .$$

Перенесем слагаемые с градиентом от времени запаздывания в левую часть равенства:

$$\nabla\tau\left(1 - \frac{\vec{R}\vec{\upsilon}_0}{cR}\right) = -\frac{\vec{R}}{cR} \quad\Rightarrow\quad \nabla\tau\left(R - \frac{\vec{R}\vec{\upsilon}_0}{c}\right) = -\frac{\vec{R}}{c} .$$

Отсюда выражаем $\nabla\tau$:

$$\nabla\tau = -\frac{\vec{R}}{c\lambda} .$$

В результате имеем

$$\nabla\lambda = \frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0}{c} + \left(\frac{\vec{\upsilon}_0\vec{R}}{R} + \frac{\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R}}{c} - \frac{\vec{\upsilon}_0^2}{c}\right)\frac{\vec{R}}{c\lambda} .$$

Представим результирующую напряженность электрического поля в виде суммы двух разных по смыслу слагаемых. Разбиение поля на две части будем производить по следующему критерию: пусть одна из них зависит, а вторая не зависит от ускорения заряда:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

Найдем сначала слагаемое, не зависящее от ускорения заряда:

$$\vec{E}_1 = \frac{e}{\lambda^2}\left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\right) + \frac{e}{\lambda^3}\frac{\vec{R}}{c}\left(\frac{\vec{\upsilon}_0\vec{R}}{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0^2}{c}\right) +$$

$$+ \frac{e\vec{\upsilon}_0}{\lambda^3}\frac{R}{c^2}\left(\frac{\vec{\upsilon}_0^2}{c} - \frac{\vec{\upsilon}_0\vec{R}}{R}\right) = \frac{e}{\lambda^2}\left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\right) +$$

$$+ \frac{e\vec{R}}{c\lambda^3}\left(\left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\right)\vec{\upsilon}_0\right) + \frac{e\vec{\upsilon}_0 R}{c^2\lambda^3}\left[\left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\right)(-\vec{\upsilon}_0)\right] =$$

$$= \frac{e}{\lambda^2}\left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\right) + \left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\right)\vec{\upsilon}_0 \frac{e}{c\lambda^3}\left(\vec{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0 R}{c}\right) =$$

$$= \frac{e}{\lambda^3}\left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\right)\left(R - \frac{\vec{\upsilon}_0\vec{R}}{c} + \frac{\vec{\upsilon}_0 R}{c}\left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0}{c}\right)\right) =$$

$$= \frac{e}{\lambda^3}\left(\vec{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0 R}{c}\right)\left(1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}\right). \quad (23.3)$$

Теперь перейдем к нахождению той части напряженности электрического поля, которая зависит от ускорения заряда:

$$\vec{E}_2 = \frac{e}{c^2\lambda^3}(\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R})\vec{R} + \frac{e}{c^2\lambda^2}\dot{\vec{\upsilon}}_0 R + \frac{e\vec{\upsilon}_0 R}{c^2\lambda^3}\left(-\frac{(\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R})}{c}\right) =$$

$$= \frac{e}{c^2\lambda^3}\left((\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R})\vec{R} - \dot{\vec{\upsilon}}_0 R\lambda + \vec{\upsilon}_0 R\left(-\frac{(\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R})}{c}\right)\right) =$$

$$= \frac{e}{c^2\lambda^3}\left((\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R})\vec{R} - \dot{\vec{\upsilon}}_0 R\left(R - \frac{\vec{\upsilon}_0\vec{R}}{c}\right) + \frac{\vec{\upsilon}_0\vec{R}}{c}(\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R})\right) =$$

$$= \frac{e}{c^2\lambda^3}\left((\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R})\left(\vec{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0 R}{c}\right) - \dot{\vec{\upsilon}}_0\left(\left(\vec{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0 R}{c}\right)\vec{R}\right)\right).$$

Видно, что здесь можно воспользоваться известной формулой из аналитической геометрии [4] для двойного векторного произведения

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right).$$

В результате имеем

$$\vec{E}_2 = \frac{e}{c^2\lambda^3}\left(\vec{R} \times \left(\vec{R} - \frac{\vec{\upsilon}_0 R}{c}\right) \times \dot{\vec{\upsilon}}_0\right). \quad (23.4)$$

Теперь найдем магнитное поле:

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A} = \mathrm{rot}\left(\frac{e\vec{\upsilon}_0}{c\lambda}\right) = \frac{e}{c\lambda}\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon}_0 + \frac{e}{c}\nabla\lambda^{-1} \times \vec{\upsilon}_0 =$$

$$= \frac{e}{c\lambda}\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon}_0 + \frac{e}{c\lambda^2}\nabla\lambda \times \vec{\upsilon}_0 =$$

$$= \frac{e}{c^2\lambda^2}\left(\dot{\vec{\upsilon}}_0 \times \vec{R}\right) + \frac{e}{c\lambda^2}\left(\vec{\upsilon}_0 \times \nabla\lambda\right).$$

Запишем в индексной форме i-компоненту ротора скорости

$$\mathrm{rot}_i \vec{\upsilon}_0 = \left(\nabla \times \vec{\upsilon}_0(\tau)\right)_i = \varepsilon_{ijk}\nabla_j \upsilon_{0k}(\tau) =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial \upsilon_{0k}(\tau)}{\tau}\nabla_j\tau = \nabla\tau \times \dot{\vec{\upsilon}}_0 .$$

Окончательно вычисляем напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{e}{c^2\lambda^2}\left(\dot{\vec{\upsilon}}_0 \times \vec{R}\right) + \frac{e}{c\lambda^2}\left(\vec{\upsilon}_0 \times \frac{\vec{R}}{R}\right) +$$

$$+ \frac{e}{c\lambda^2}\left(\dot{\vec{\upsilon}}_0 \times \left(\frac{\vec{\upsilon}_0\vec{R}}{R} + \frac{\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R}}{c} - \frac{\upsilon_0^2}{c}\right)\frac{\vec{R}}{c\lambda}\right) = \frac{\vec{R}}{R} \times \left(-\frac{e}{c^2\lambda^3}\dot{\vec{\upsilon}}_0\lambda R\right) +$$

$$+ \frac{e}{\lambda^3}\frac{\vec{\upsilon}_0\lambda}{c} - \frac{e}{c^2\lambda^3}\left(\vec{\upsilon}_0\vec{R} + \left(\frac{(\dot{\vec{\upsilon}}_0\vec{R})R}{c} - \frac{\upsilon_0^2 R}{c}\right)\frac{\vec{R}}{c\lambda}\right)\vec{\upsilon}_0) = \frac{\vec{R} \times \vec{E}}{R} .$$

Магнитное поле перпендикулярно электрическому. В формулах для $\vec{E}$ (23.3) и (23.4) $\vec{\upsilon}_0$, $\vec{R}$ следует брать в момент времени τ.

Как уже было определено выше, поле $\vec{E}$ распадается на две части – $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Слагаемое $\vec{E}_1$ зависит только от скорости, а $\vec{E}_2$ – от ускорения заряда. В предельном случае равномерного движения $\vec{E}_2 = 0$. На больших расстояниях первое слагаемое в сумме имеет следующую асимптотику:

$$\left|\vec{E}_1\right| \sim \frac{1}{R^2} .$$

Также заметим, что $\vec{E}_1$ всегда имеет компоненту, направленную вдоль вектора $\vec{R}$. При условии $\upsilon_0 \ll c$ получаем асимптотическое выражение для поля медленно движущегося заряда

$$\vec{E}_1 \approx \frac{e\vec{R}}{R^3} .$$

Как и полагается, в пределе эта формула совпадает с кулоновской.

Проанализируем теперь вторую часть напряженности ЭП. $\vec{E}_2 \perp \vec{R}$ – это свойство всегда справедливо для $\vec{E}_2$, иными словами,

$\vec{E}_2$ имеет характер поперечного поля. На больших расстояниях эта часть поля имеет принципиально иную асимптотику

$$\left|\vec{E}_2\right| \sim \frac{1}{R}.$$

Таким образом, если заряд движется ускоренно, то на больших расстояниях поле по величине определяется вторым слагаемым, так как оно медленнее убывает с расстоянием.

На больших расстояниях по абсолютной величине $|\vec{E}|$ и $|\vec{H}|$ равны, так как

$$\vec{H} = \frac{\vec{R} \times \vec{E}}{R}. \qquad (23.5)$$

Формулы (23.3), (23.4) и (23.5) имеют смысл при выполнении условия $\upsilon_0 < c$. Так что константа c, которая представляет собой скорость света и появилась изначально в электродинамике как размерный множитель в силе Лоренца, теперь приобретает новый смысл некоторого порогового значения скорости.

24. ИЗЛУЧЕНИЕ ДИПОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ. ЛИНЕЙНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

На основе результатов, полученных в трех предыдущих параграфах, произведем расчет поля, создаваемого системой движущихся зарядов на больших расстояниях (рис. 18). В рамках используемого приближения $R' >> d$, где d – характерный размер области, занимаемой зарядами. Определим для начала векторный потенциал. Как следует из формулы (21.4) применительно к рис. 18, он должен вычисляться согласно интегралу

$$\vec{A}(\vec{R},t) = \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r},\tau)}{R'} dV , \qquad (24.1)$$

где τ – время запаздывания. Интегрирование производится по координатам радиус-вектора $\vec{r}$.

В дальнейшем будем предполагать, что система зарядов располагается вблизи начала координат, т. е. условие выбора точки отсчета определяется неравенством $d \geq r$. Как результат, в главном приближении R' в знаменателе можно заменить на R. Однако при вычислении токов этого в общем случае делать нельзя, так как изучаемые эффекты запаздывания принципиальны на размерах системы.

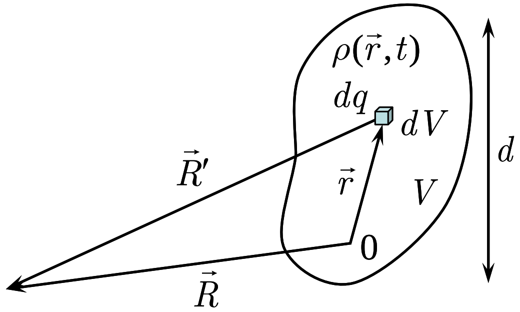

Рис. 18. Токи, локализованные в некотором объеме

Пусть ω – характерная частота, тогда порядок скорости зарядов имеет значение $v \sim \omega d$. Характерное время в данной задаче равно $T \sim 1/\omega$, поэтому можно пренебречь поправкой $r \sim d$, если $d/c \ll T$. Данное условие представляет собой так называемое условие дипольности. Это неравенство эквивалентно условию $d \ll \lambda$, где λ – длина электромагнитной волны ($c \sim \lambda/T$).

Полученное ограничение можно представить в другой форме через оценку скоростей движения зарядов $v \sim d/T$. В то же время, как было отмечено выше, $c \sim \lambda/T$. Таким образом, приходим к условию $c \gg v$, т. е. заряды должны двигаться со значительно меньшими скоростями, нежели скорость света.

В результате дипольное приближение подразумевает наличие двух независимых ограничений –

$$R \gg d, \quad \lambda \gg d.$$

При выполнении этих условий выражение для векторного потенциала (24.1) принимает вид

$$\vec{A}(\vec{R},t) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r},t-R/c)}{R}dV + \ldots$$

Знаменатель подынтегральной функции теперь не зависит от переменных интегрирования, в результате имеем более простое выражение для векторного потенциала:

$$\vec{A}(\vec{R},t) = \frac{1}{cR}\int\limits_V \vec{j}(\vec{r},t-R/c)dV + \ldots$$

Перейдем к индексной форме записи

$$A_i(\vec{R},t) = \frac{1}{cR}\int_V j_i(\vec{r}, t - R/c)dV =$$

$$= \frac{1}{cR}\int_V j_k \delta_{ik} dV = \frac{1}{cR}\int_V j_k \frac{\partial x_i}{\partial x_k} dV =$$

$$= \frac{1}{cR}\int_V \frac{\partial\left(j_k x_i\right)}{\partial x_k} dV - \frac{1}{cR}\int_V x_i \frac{\partial j_k}{\partial x_k} dV \ .$$

Первый интеграл преобразуется по теореме Гаусса – Остроградского в интеграл по поверхности, которую можно унести на бесконечность. Очевидно, он равен нулю, так как через эту поверхность токи не протекают:

$$\frac{1}{cR}\int_V \frac{\partial\left(j_k x_i\right)}{\partial x_k} dV = \oint_S j_k x_i dS_k = 0 \ .$$

Во втором интеграле фигурирует дивергенция объемной плотности тока, которая входит в закон сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{j} \ .$$

В результате получаем

$$\frac{1}{cR}\int_V x_i \frac{\partial j_k}{\partial x_k} dV = -\frac{1}{cR}\int_V x_i \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\frac{1}{cR}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho x_i dV \ . \qquad (24.2)$$

По определению полученный под знаком производной интеграл в (24.2) представляет собой не что иное, как дипольный момент системы непрерывно распределенных зарядов [8; 10], целесообразность введения которого была обоснована в § 26:

$$\vec{P} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}\, dV \ .$$

Производная по времени в (24.2) отражает тот факт, что при движении зарядов дипольный момент системы, вообще говоря, меняется с течением времени. Таким образом, для векторного потенциала произвольной системы движущихся зарядов на больших расстояниях получаем удивительно простой ответ:

$$\vec{A}(\vec{R},t) = \frac{1}{cR}\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{1}{cR}\dot{\vec{P}}\left(t - \frac{R}{c}\right). \qquad (24.3)$$

Время запаздывания в этой формуле учитывается не для каждого заряда по отдельности, а интегрально для всей системы в целом. Отметим, что векторный потенциал полностью выражается через дипольный момент системы.

Имея в своем распоряжении выражение (24.3) для векторного потенциала, можно однозначно вычислить распределение напряженности магнитного поля в пространстве:

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A} = \frac{1}{c}\mathrm{rot}\left(\frac{\dot{\vec{P}}}{R}\right) = \frac{1}{c}\nabla\frac{1}{R}\times\dot{\vec{P}} + \frac{1}{cR}\mathrm{rot}\dot{\vec{P}}\ .$$

Вычислим отдельно последнее слагаемое в индексной форме:

$$\mathrm{rot}_i\dot{\vec{P}} = \varepsilon_{ijk}\nabla_j\dot{P}_k = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\dot{P}_k}{\partial X_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial R}{\partial X_j}\frac{\partial\dot{P}_k}{\partial R} = \varepsilon_{ijk}\left(\nabla_j R\right)\frac{\partial\dot{P}_k}{\partial R}\ .$$

Переход к векторной форме записи дает

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{P}} = \nabla R\times\frac{\partial\dot{\vec{P}}}{\partial R} = \nabla R\times\frac{\partial\dot{\vec{P}}}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial R} = -\frac{1}{c}\nabla R\times\ddot{\vec{P}}\ .$$

С учетом формулы тензорного анализа

$$\nabla\frac{1}{R} = -\frac{\nabla R}{R^2}$$

имеем следующее выражение для напряженности магнитного поля:

$$\vec{H}(\vec{R},t) = -\frac{1}{cR^2}\nabla R\times\dot{\vec{P}} - \frac{1}{c^2R}\nabla R\times\ddot{\vec{P}}\,. \qquad (24.4)$$

В качестве одного из множителей в обоих векторных произведениях выступает ∇R, поэтому напряженность магнитного поля удовлетворяет условию

$$\vec{H}\perp\vec{R}\,.$$

Выясним, какой вклад в эту сумму дает каждое из слагаемых. Обозначим эти вклады как

$$\Lambda_1 = \left|\frac{1}{cR^2}\nabla R\times\dot{\vec{P}}\right|,\qquad \Lambda_2 = \left|\frac{1}{c^2R}\nabla R\times\ddot{\vec{P}}\right|.$$

По порядку величины производная по времени дипольного момента равна

$$\left|\dot{\vec{P}}\right| \sim \omega\left|\vec{P}\right|\,.$$

Тогда приходим к следующей оценке для двух составляющих магнитного поля

$$\Lambda_1 \sim \frac{\omega}{cR^2}|\nabla R|\cdot|\vec{P}|, \qquad \Lambda_2 \sim \frac{\omega^2}{c^2 R}|\nabla R|\cdot|\vec{P}|.$$

Отношение этих членов дает

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \approx \frac{\omega}{cR^2}|\nabla R|\cdot|\vec{P}| \Big/ \frac{\omega^2}{c^2 R}|\nabla R|\cdot|\vec{P}| = \frac{c}{\omega R} = \frac{\lambda}{R}.$$

При условии $R >> \lambda$ первое слагаемое дает пренебрежимо малый вклад в общую напряженность магнитного поля по сравнению со вторым членом. Если, наоборот, $\lambda >> R$, то имеем противоположный частный случай. Область расстояний, в которой преимущественно работает второе слагаемое, называется *волновой зоной*. Второй член описывает процесс излучения энергии системой. Введем обозначение для единичного вектора, направленного вдоль радиус-вектора:

$$\nabla R = \frac{\vec{R}}{R} = \vec{n}.$$

Оставляя только второе слагаемое в (24.4), получим для волновой зоны выражение

$$\vec{H}\left(\vec{R},t\right) = \frac{\ddot{\vec{P}}\times\vec{n}}{c^2 R}. \tag{24.5}$$

В формуле (24.5) присутствует вторая производная от дипольного момента, которая действует на координаты зарядов. Таким образом, система излучает за счет того, что заряды движутся ускоренно. Для нахождения напряженности электрического поля, помимо векторного, необходимо знать скалярный потенциал. Для его нахождения воспользуемся калибровкой Лоренца

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Вычислим с помощью формулы (24.3) дивергенцию векторного потенциала в волновой зоне

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\ddot{\vec{P}}\nabla\tau}{cR} + \ldots$$

Слагаемым, которое появляется в результате дифференцирования $1/R$, необходимо пренебречь ввиду его малости. Из определения времени запаздывания находим его градиент

$$\nabla\tau = -\frac{\vec{n}}{c}.$$

В результате приходим к следующему ответу:

$$\mathrm{div}\vec{A} = -\frac{\ddot{\vec{P}}\vec{n}}{c^2 R}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\ddot{\vec{P}}\vec{n}}{cR}.$$

Чтобы найти электрический потенциал остается проинтегрировать полученное выражение по времени. Интегрирование дает

$$\varphi\left(\vec{R},t\right) = \frac{\dot{\vec{P}}\vec{n}}{cR}. \tag{24.6}$$

Теперь вычислим напряженность электрического поля, оставляя, как и раньше, главные члены и отбрасывая члены порядка $1/R^2$.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\dot{\vec{P}}\vec{n}}{cR}\nabla\tau - \frac{\ddot{\vec{P}}}{c^2 R} = \frac{(\ddot{\vec{P}}\vec{n})}{c^2 R}\vec{n} - \frac{\ddot{\vec{P}}}{c^2 R}.$$

Ответ можно компактно представить в виде известной формулы векторного анализа для двойного векторного произведения

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 R}\left((\ddot{\vec{P}}\vec{n})\vec{n} - (\vec{n}\vec{n})\ddot{\vec{P}}\right) = \frac{\vec{n}\times[\vec{n}\times\ddot{\vec{P}}]}{c^2 R}.$$

Циклическая перестановка в формуле дает возможность сравнить полученное выражение с напряженностью магнитного поля (24.5):

$$\vec{E} = \frac{[\ddot{\vec{P}}\times\vec{n}]\times\vec{n}}{c^2 R} = \vec{H}\times\vec{n}. \tag{24.7}$$

В формуле (24.7) присутствует вторая производная от дипольного момента, которая касается координат зарядов. Иными словами система излучает за счет того, что заряды движутся ускоренно.

Таким образом, из (24.5) и (24.7) однозначно вытекает, что векторы $\vec{n}$, $\vec{H}$ и $\vec{E}$ находятся в следующем соответствии:

$$\vec{n}\perp\vec{E}, \quad \vec{H}\perp\vec{E}, \quad \vec{n}\perp\vec{H}$$

и их взаимная ориентация доопределяется правилом правой руки. Этот вывод совпадает с полученным ранее для плоской электромагнитной волны. Также из (24.7) следует, что напряженности электрического и магнитного полей равны друг другу по модулю, а их интенсивность спадает с расстоянием.

В задаче об излучении диполя чрезвычайно актуальным является вопрос, касающийся энергии, переносимой полем. Вычислим сначала объемную плотность энергии ЭМП:

$$w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \frac{H^2}{4\pi} .$$

Вектор плотности потока энергии определяется формулой (14.4):

$$\vec{U} = cw\vec{n} = \frac{\vec{n}}{4\pi c^3 R^2}\left(\ddot{\vec{P}} \times \vec{n}\right)^2 . \qquad (24.8)$$

Этот вектор указывает, в какую сторону и какое количество энергии переносится в произвольном направлении.

Определимся с видом зависимости величины дипольного момента от времени. Проведем расчет поля простейшей электродинамической системы, дипольный момент которой меняется с течением времени по закону

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_0 \cos \omega t .$$

Независимо от того, что собой представляет эта система, очевидно, что она излучает электромагнитные волны. В электродинамике она называется гармоническим осциллятором. Вычисления проведем, следуя работе [11].

Выпишем вторую производную от дипольного момента по времени, которая необходима для нахождения вектора Умова – Пойнтинга:

$$\ddot{\vec{P}} = -\omega^2 \vec{P}_0 \cos \omega t .$$

В результате для линейного гармонического осциллятора имеем

$$\vec{U} = \frac{\vec{n}\omega^4}{4\pi c^3 R^2}\left(\vec{P}_0 \times \vec{n}\right)^2 \cos^2 \omega t . \qquad (24.9)$$

Множитель перед единичным вектором всегда положителен, поэтому вектор плотности потока энергии всегда ориентирован от источника по всем направлениям. В дополнение имеет смыл вычислить распределение по углам для средней по времени излучаемой энергии. Искомая величина выражается формулой

$$\overline{\vec{U}} = \frac{\vec{n}\omega^4}{4\pi c^3 R^2}\left(\vec{P}_0 \times \vec{n}\right)^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{\vec{n}\omega^4}{8\pi c^3 R^2}\left(\vec{P}_0 \times \vec{n}\right)^2 .$$

Квадрат векторного произведения удобно выразить через меридиональный угол θ:

$$\overline{\vec{U}} = \frac{\omega^4 \left|\vec{P}_0\right|^2 \sin^2\theta}{8\pi c^3 R^2}\vec{n}\,. \qquad (24.10)$$

Диаграмма направленности излучения линейного гармонического осциллятора, иллюстрирующая распределение плотности потока энергии по углам, представлена на рис. 19. Как видно из формулы (24.10), данное распределение характеризуется азимутальной симметрией. Максимум интенсивности имеет место при $\theta = 90°$. В продольном направлении диполь не излучает.

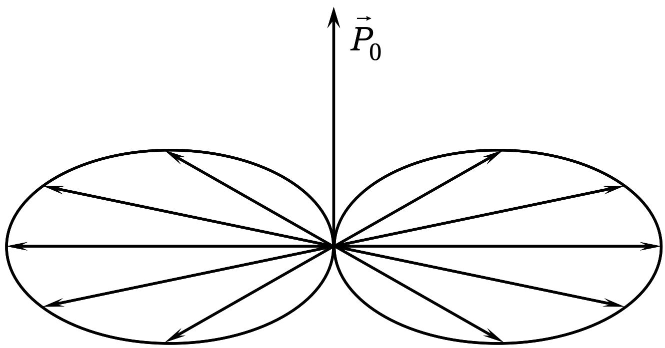

Рис. 19. Графическое изображение плотности потока энергии линейного гармонического осциллятора

В дополнение вычислим осредненный по времени полный поток энергии. По смыслу это мощность излучения

$$N = \oint_S \vec{U} d\vec{S} = \frac{\omega^4 \left|\vec{P}_0\right|^2}{8\pi c^3 R^2} \oint_S \sin^2\theta dS\,.$$

Элемент площади поверхности сферы (рис. 20) выражается через азимутальный и меридиональный углы формулой

$$dS = R^2 \sin\theta\, d\alpha d\theta\,.$$

Таким образом, приходим к интегралу, который элементарно вычисляется

$$\oint_S \sin^3\theta \;\; dS = 4/3\,.$$

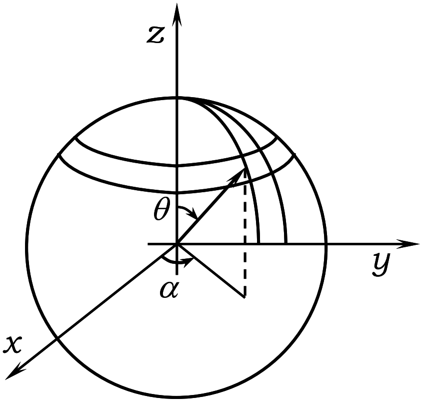

Рис. 20. Элемент сферической поверхности

Полный поток энергии, излучаемой за единицу времени, равен

$$N = \frac{\omega^4 \left|\vec{P}_0\right|^2}{3c^3}. \tag{24.11}$$

Заметим, что мощность излучения по вполне естественным причинам не зависит от R, в то время как плотность потока энергии (24.10) убывала обратно пропорционально квадрату расстояния. Также из (24.10) и (24.11) следует, что излучаемая энергия чрезвычайно сильно растет с частотой по закону ~ ω^4.

В качестве промежуточного заключения в отношении рассмотренных электродинамических решений необходимо подчеркнуть, что основной чертой всех излучающих систем являются эффекты запаздывания, связанные с конечностью скорости распространения электромагнитных волн, причем эта скорость оказывается одинаковой во всех инерциальных системах отсчета.

25. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ И ПРЕДПОСЫЛКИ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Более серьезный анализ уравнений электродинамики показывает, что они находятся в противоречии с основными принципами классической механики Ньютона. А именно уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразований Галилея. Для дальнейших рассуждений необходимо вспомнить понятие инерциальной системы отсчета (СО).

Инерциальными называются СО, в которых движение не подверженных действию внешних сил тел происходит равномерно и прямолинейно. Рассмотрим преобразования координат и скоростей применительно к инерциальным системам отсчета

$$\begin{cases} x = x' + \upsilon t', \\ y = y', \quad z = z', \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}' + \upsilon, \\ t = t'. \end{cases}$$

Для простоты формулами описывается случай одномерного движения материальной точки вдоль оси x'. При этом начало отсчета СК K' перемещается относительно оси x с постоянной скоростью υ (рис. 21).

Инвариантность относительно преобразований Галилея подразумевает неизменность уравнений Ньютона при переходе от одной инерциальной СО к другой:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}', \quad \ddot{y} = \ddot{y}', \quad \ddot{z} = \ddot{z}',$$

где m – масса тела, U – потенциальная энергия (в принципе в правых частях этих уравнений могут стоять и непотенциальные силы).

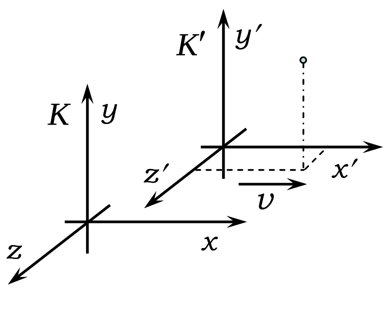

Рис. 21. Иллюстрация к правилу сложения скоростей и относительности движения

Учитывая равенство ускорений в разных ИСО, приходим к выводу, что формально уравнения Ньютона в штрихованной системе координат выглядят так же, как в нештрихованной.

$$m\ddot{x}' = -\frac{\partial U}{\partial x'}, \quad m\ddot{y}' = -\frac{\partial U}{\partial y'}, \quad m\ddot{z}' = -\frac{\partial U}{\partial z'}.$$

В основе противоречия электродинамики и классической ньютоновой механики лежит опытный факт постоянства скорости света во всех инерциальных СО. Исторически Майкельсон был первым, кому удалось с высокой степенью точности измерить экспериментально влияние орбитального движения Земли на скорость света (1881 г.) и получить при этом отрицательный результат. Де Ситтер в 1912 г. провел независимое исследование излучения двойных звезд. Итогом этих наблюдений является опытный факт, согласно которому скорость света в вакууме одинакова во всех ИСО и является фундаментальной физической постоянной $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

Убедительные данные, связанные с фактом постоянства скорости света во всех ИСО, позволили Эйнштейну в 1905 г. сформировать новую концепцию пространства-времени и построить специальную теорию относительности, в основу которой он положил два постулата:

1. Все законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

2. Скорость света в пустом пространстве одинакова для наблюдателей во всех ИСО и не зависит от относительного движения источника света.

Следует отметить, что волны в материальных средах принципиально отличаются от электромагнитных волн, так как они распространяются в вакууме. Неявно постулатами специальной теории относительности предполагается следующее:

1. Все инерциальные системы отсчета эквивалентны.

2. Пространство однородно и изотропно.

Сразу отметим (и это будет подтверждено ниже), что если скорость света является абсолютной константой, то время и длина должны быть относительными величинами.

26. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Исходя из постулатов теории относительности можно найти законы преобразования координат и времени при переходе от одной ИСО к другой (рис. 21). Как и ранее, параметр v – скорость движения СО K' относительно СО K. Пусть в момент времени t' в точке с координатами x', y', z' происходит некоторое событие. Задача заключается в том, чтобы найти координаты этого события в СО K.

Согласно идеологии неразрывности пространства и времени событие должно характеризоваться в разных системах отсчета совокупностями координат x, y, z, t и x', y', z', t' соответственно.

Пусть в момент времени $t = 0$ начала отсчета координатных систем K' и K совпадают. В этот момент из начала координат испускается сферическая электромагнитная волна. Для простоты относительное движение происходит только вдоль осей x и x'. Уравнение световой волны в системе отсчета K имеет следующий вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 .$$

Согласно принципу относительности системы отсчета K и K' неотличимы. Тогда уравнение этой же волны будет иметь вид

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 .$$

и для них справедливо

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 . \qquad (26.1)$$

По условию движение происходит только вдоль оси x, поэтому

$$y = y', \quad z = z' . \qquad (26.2)$$

Связь между переменными x, t и x', t' может быть только линейной, так как все ИСО равноправны. В результате имеем соотношения

$$x' = \alpha(\upsilon)\left(x - \upsilon t\right), \qquad (26.3)$$

$$t' = \beta t + \gamma x . \qquad (26.4)$$

Здесь α, β, γ – некоторые константы по x и t. Заметим, что это максимально общая линейная связь с учетом того, что при $t = 0$ начала координат у обеих СО совпадают, и координата $x' = 0$ относительно системы отсчета K движется по закону $x = \upsilon t$. Таким образом, коэффициенты при x и υt в уравнении (26.3) должны быть одинаковыми по величине и иметь разные знаки. Так что результирующий множитель $\alpha(\upsilon)$ обязан быть функцией только υ. Убедившись в справедливости этих рассуждений, подставим (26.3) и (26.4) в соотношение (26.1).

Сравнивая слагаемые при квадратичных слагаемых одного типа, получаем три нелинейных алгебраических уравнения

$$\alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1, \quad \alpha^2\upsilon^2 - c^2\beta^2 = -c^2 , \quad \alpha^2\upsilon + c^2\beta\gamma = 0 .$$

Несложные вычисления методом исключения дают значения искомых коэффициентов α, β и γ.

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \quad \gamma = -\frac{\upsilon/c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}.$$

Возвращаясь к формулам (26.3) и (26.4), имеем в результате следующие правила преобразования координат и времени:

$$x' = \frac{x-\upsilon t}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t' = \frac{t-\upsilon x/c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \qquad (26.5)$$

Обратные преобразования соответственно характеризуются видом

$$x = \frac{x'+\upsilon t'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t'+\upsilon x'/c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \qquad (26.6)$$

Эти соотношения носят название *преобразований Лоренца* (1898 г.). В предельном случае $\upsilon << c$ приходим к преобразованиям Галилея.

$$x = x' + \upsilon t, \qquad t = t'.$$

Вывод: теория относительности не отвергает законы классической механики как неверные, а включает их в себя как предельный случай.

Преобразования Лоренца свидетельствуют о том, что временна́я и пространственная координаты единым образом преобразуются при переходе от одной СО к другой. Будучи ранее независимыми переменными, теперь они образуют единое четырехмерное пространство-время.

27. ЭФФЕКТ СОКРАЩЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИНТЕРВАЛА

Из преобразований Лоренца вытекают так называемые эффекты сокращения длины и увеличения временного интервала при измерении этих величин в ЛСО по отношению к собственной длине и времени. Пусть l_0 – продольный размер тела в СО, в которой оно неподвижно (в данном случае K' – собственная СО).

Далее измерение длины тела произведем в системе отсчета K в момент времени t. Иными словами, необходимо зафиксировать координаты концов стержня в один и тот же момент времени t. Подобное может случиться только в том случае, если сигналы из x_1' и x_2' вышли в разные моменты времени t_1' и t_2' (так как скорость света одинакова во всех ИСО). Таким образом, из преобразований Лоренца (26.5) вытекает связь

$$x_2' = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\,, \quad x_1' = \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\,.$$

Вычитая из одного равенства другое, получим

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\,.$$

Вспоминая, что по определению

$$l_o = x_2' - x_1'\,, \qquad l = x_2 - x_1\,,$$

получаем окончательно формулу

$$l = l_o\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\,. \qquad (27.1)$$

С одной стороны, рассмотренный эффект традиционно называется лоренцевым сокращением длины ($l < l_o$), однако следует заметить, что первенство получения этой формулы независимо от Лоренца принадлежит ирландскому физику Дж. Фицжеральду (1892 г.). Логика вывода формулы (27.1) показывает, что эффект сокращения длины имеет чисто кинематическую природу.

28. ЭФФЕКТ УВЕЛИЧЕНИЯ ВРЕМЕННОГО ИНТЕРВАЛА

Постоянство скорости света во всех ИСО и неразрывная связь координат и времени приводят к еще одному следствию. А именно время в специальной теории относительности тоже не имеет абсолютного характера.

Пусть в некоторой фиксированной точке x' в системе отсчета K' происходит некоторый физический процесс в течение некоторого времени $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Здесь t_2' и t_1' – соответственно моменты времени начала и конца этого процесса. Тогда из преобразований Лоренца (26.6) следует, что

$$t_2 = \frac{t_2' + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\,, \quad t_1 = \frac{t_1' + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\,.$$

Вычитаем из одного равенства другое:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\,.$$

Приходим к эффекту увеличения временного интервала $\tau = \Delta t$ в системе отсчета K по сравнению с интервалом времени $\tau_o = \Delta t'$ в собственной СО:

$$\tau = \frac{\tau_o}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}\,. \qquad (28.1)$$

Движущиеся относительно некоторой системы отсчета часы идут медленнее, чем в собственной системе координат.

29. ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Выведем теперь релятивистскую формулу сложения скоростей. Для начала определим естественным образом скорости тела в разных системах отсчета:

$$u_x = dx/dt\,,\ (K) \qquad u_x' = dx'/dt'\,,\ (K')$$

$$u_y = dy/dt\,, \qquad u_y' = dy'/dt'\,,$$

$$u_z = dz/dt\,, \qquad u_z' = dz'/dt'\,.$$

Из преобразований Лоренца (26.6) следует в силу их линейности, что дифференциалы пространственных координат и времени в разных системах отсчета связаны соотношениями

$$dx = \frac{dx' + \upsilon dt'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\,, \qquad dt = \frac{dt' + \upsilon dx'/c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\,.$$

(также для одномерного относительного движения систем отсчета имеем $dy = dy'$, $dz = dz'$). Разделив приращения координат на соответствующие приращения времени, получаем выражения для компонент скорости в системе отсчета K:

$$u_x = \frac{dx' + \upsilon dt'}{dt' + \dfrac{\upsilon dx'}{c^2}} = \frac{u_x' + \upsilon}{1 + \dfrac{\upsilon u_x}{c^2}}\,, \qquad (29.1)$$

$$u_y = \frac{dy'\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{dt' + \dfrac{\upsilon dx'}{c^2}} = \frac{u_y'\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1 + \dfrac{\upsilon u_x'}{c^2}}\,, \qquad (29.2)$$

$$u_z = \frac{dz'\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{dt' + \frac{\upsilon dx'}{c^2}} = \frac{u_z'\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1+\frac{\upsilon u_x'}{c^2}}. \qquad (29.3)$$

В том числе эти формулы удивительным образом правильно отражают факт одинаковости скорости света во всех ИСО. В переделе малых скоростей имеем

$$u_x \approx u_x' + \upsilon, \quad u_y \approx u_y', \quad u_z \approx u_z'.$$

Это правило сложения скоростей Галилея.

30. ИНВАРИАНТЫ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Одна из главных задач, которые ставит перед собой СТО, заключается в выявлении и анализе абсолютных, а также относительных величин [6]. Введем понятие интервала, по-прежнему имея в виду, что событие характеризуется четырьмя переменными x, y, z и t. Из преобразований Лоренца следует, что время неразрывно связано с пространственными координатами и наоборот. Определим новую формальную координату $\tau = ict$. Соответствующее ей перемещение имеет ту же размерность, что и Δx, Δy, Δz. Понятие интервала вводится по аналогии с обычным интервалом в смысле расстояния между точками и некоторого промежутка времени

$$s = \sqrt{c^2(t_1-t)^2 - (x_1-x)^2 - (y_1-y)^2 - (z_1-z)^2}.$$

В штрихованной системе координат по определению интервал записывается аналогичным образом:

$$s' = \sqrt{c^2(t_1'-t')^2 - (x_1'-x')^2 - (y_1'-y')^2 - (z_1'-z')^2}.$$

Докажем, что интервал является инвариантом. А именно эта скалярная величина не меняется в ходе преобразований Лоренца. Пусть для простоты

$$(y_1-y)^2 = (y_1'-y')^2,$$
$$(y_1-y)^2 = (z_1'-z')^2.$$

Преобразуются только $\Delta x'$ и $\Delta t'$:

$$(x_1'-x')^2 = \frac{(x_1-x)^2 - 2\upsilon(x_1-x)(t_1-t) + \upsilon^2(t_1-t)^2}{1-\upsilon^2/c^2},$$

$$c^2(t_1'-t')^2 = \frac{(t_1-t)^2 - \dfrac{2v}{c^2}(x_1-x)(t_1-t) + \dfrac{v^2}{c^4}(x_1-x)^2}{1-v^2/c^2}c^2 .$$

Вычитая из нижнего равенства верхнее, получаем:

$$c^2(t_1'-t')^2 - (x_1'-x') =$$

$$= \frac{c^2(t_1-t)^2 - (x_1-x)^2 - v^2(t_1-t)^2 + \dfrac{v^2}{c^2}(x_1-x)^2}{1-v^2/c^2} =$$

$$= c^2(t_1-t)^2 - (x_1-x)^2 .$$

В результате приходим к важному заключению

$$s = s' .$$

Иными словами, интервал, действительно, является инвариантом. Если s – вещественная величина ($c^2\Delta t^2 > \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$), то интервал называется *времениподобным*. Когда s – мнимая величина ($c^2\Delta t^2 < \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$), то интервал называется *пространственноподобным*. Условие $c^2\Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ формирует так называемый *световой конус* [6; 12]. Световой конус разделяет множество точек в четырехмерном пространстве-времени на области «абсолютного будущего», «абсолютного прошлого» и абсолютно удаленных событий.

На следующем этапе рассуждений введем понятие собственного времени. Пусть в некоторой точке последовательно происходят два события в моменты времени t' и t_1', разделенные промежутком $dt_o = t_1' - t'$ (время, прошедшее между двумя событиями). В соответствии с накладываемыми условиями интервал для этих двух событий равен

$$ds = \sqrt{c^2(t_1-t)^2 - (x_1-x)^2 - (y_1-y)^2 - (z_1-z)^2} = c\,dt_o .$$

Событие происходит в одной и той же точке в СО K', поэтому $dx' = dy' = dz' = 0$. Но интервал – инвариант, поэтому собственное время тоже является инвариантом:

$$dt_o = \frac{ds}{c} .$$

Собственное время можно выразить через временной промежуток в произвольной системе координат. Окончательно имеем

$$dt_o = dt\sqrt{1-v^2/c^2} . \qquad (30.1)$$

С одной стороны, эта формула повторяет (28.1), однако теперь собственное время в отличие от промежутков времени во всех других ИСО приобретает исключительный, выделенный характер, так как является инвариантом.

31. 4-ВЕКТОР СКОРОСТИ И 4-ИМПУЛЬС

Определим четыре-вектор скорости, как производную от 4-радиус-вектора по некоторому инварианту, т. е. скаляру. Указанный радиус-вектор характеризуется набором координат

$$r_\alpha = (x, y, z, \tau).$$

Естественной и единственной возможностью при выборе скалярной величины, по которой должно производиться дифференцирование радиус-вектора, является собственное время, т. е. $u_\alpha = dr_\alpha / dt_0$. Вычисления дают

$$u_x = \frac{dx}{dt_0} = \frac{dx}{dt\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} = \frac{\upsilon_x}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \tag{31.1}$$

$$u_y = \frac{\upsilon_y}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \quad u_z = \frac{\upsilon_z}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}. \tag{31.2}$$

При этом любопытно выглядит четвертая компонента скорости

$$u_\tau = \frac{d\tau}{dt_0} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}. \tag{31.3}$$

Фактически она является отражением разницы между собственным временем и временем в любой другой ИСО. В пределе $\upsilon << c$ пространственные компоненты 4-скорости превращаются в обычные составляющие вектора скорости.

Далее предположим, что тела обладают инертностью, которая тоже характеризуется скаляром, т. е. инвариантом. Данная величина называется массой тела m. Это дает возможность по отработанной схеме на основе (31.1) – (31.3) определить вектор 4-импульса: $p_\alpha = mu_\alpha$.

Умножая на массу левые и правые части равенств (31.1) – (31.3), получаем определение вектора 4-импульса тела:

$$p_x = \frac{m\upsilon_x}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \quad p_y = \frac{m\upsilon_y}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \tag{31.4}$$

$$p_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad p_\tau = \frac{imc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{31.5}$$

В индексной форме кратко можно записать $p_\alpha = mu_\alpha$, где текущий индекс принимает значения $\alpha = \overline{1,4}$.

Необычной и не совсем очевидной величиной здесь является четвертая компонента 4-импульса. Физический смысл этой неотъемлемой составляющей 4-вектора импульса тела будет прояснен ниже.

32. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ТЕЛА В СТО

Следующий этап построения релятивистской механики связан с выводом уравнения, определяющего динамику тела. Потребуем, чтобы искомое уравнение имело четырехмерную векторную форму. Это опять означает, что приращение импульса необходимо делить на скаляр, т. е. на приращение собственного времени dt_o. Таким образом, по аналогии со вторым законом Ньютона сформулируем закон динамики тела в СТО

$$\frac{dp_\alpha}{dt_o} = \mathcal{F}_\alpha, \tag{32.1}$$

где $\mathcal{F}_\alpha$ – релятивистский четыре-вектор силы. Исторически $\mathcal{F}_\alpha$ называют 4-силой Минковского. Ее компоненты должны изменяться при переходе от одной СО к другой в соответствии с формулами преобразования векторов. Правда, более естественным в законе релятивистской динамики представляется определять изменение времени в системе отсчета K, в которой производится измерение приращения импульса. Тогда получаем

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \mathcal{F}_\alpha \sqrt{1-v^2/c^2} \equiv f_\alpha.$$

33. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛА ЭНЕРГИИ ТЕЛА

Вычислим в рамках релятивистской динамики работу при одномерном перемещении тела массой m вдоль оси x (для простоты $f_y = 0$, $f_z = 0$). Будем интересоваться работой, производимой за единицу времени в системе отсчета K:

$$\frac{\delta A}{\delta t} = f_x v_x = v_x \frac{dp_x}{dt} = v_x \frac{d}{dt}\frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} =$$

$$= \frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dv_x}{dt} + \frac{mv_x^2}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} \frac{v_x}{c^2} \frac{dv_x}{dt} =$$

$$= \frac{mv_x}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} \frac{dv_x}{dt}. \qquad (33.1)$$

Так же, как в классической механике [13], необходимо попытаться представить это выражение в виде полной производной от некоторой функции. В данном случае эту возможность можно реализовать, в результате чего приходим к равенству

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Выражение под оператором производной по времени представляет собой по смыслу энергию тела массой m:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (33.2)$$

Содержательно формула для энергии (33.2) в корне отличается от аналогичной величины в ньютоновой механике [14]. Важнейшая особенность полученной формулы заключается в том, что теперь нельзя разогнать тело с ненулевой массой покоя до скорости света, так как для этого потребовалось бы совершить над телом бесконечную работу. Еще одно замечание касается предельного случая $v = 0$. Согласно (33.2) тело в покое обладает энергией

$$E = mc^2.$$

Это соотношение называется *формулой Эйнштейна*. Оно имеет глубокий физический смысл, который заключается в том, что в рассматриваемом пределе масса становится в определенном смысле эквивалентной энергии тела, так как с точностью до размерного постоянного множителя в покое равна ей.

Не менее важным является еще одно примечательное следствие. Для его фиксации необходимо сопоставить (33.2) с четвертой компонентой 4-импульса. Из сравнения соответствующей формулы в (31.5) с (33.2) видно, что четвертая компонента импульса p_τ имеет простую и наглядную физическую интерпретацию – это энергия тела с точностью до размерного множителя.

Таким образом, имеем 4-импульс в виде

$$P_\alpha = \left(\vec{p}, \frac{iE}{c}\right) = \left(p_x, p_y, p_z, \frac{iE}{c}\right).$$

В ньютоновой механике импульс и кинетическая энергия являются разными характеристиками движения. В релятивистской динамике эти две на первый взгляд непохожие друг на друга физические величины представляют собой единое целое, образуя единую четырехмерную количественную меру движения в пространстве-времени.

В пределе малых скоростей $\upsilon << c$ правую часть формулы (33.2) можно разложить в ряд по малому параметру $\varepsilon = \upsilon/c$. Используя известную математическую формулу

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \dots,$$

получаем

$$E = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \dots\right) = mc^2 + \frac{m\upsilon^2}{2} + \dots$$

Первое слагаемое – это уже отмеченная выше энергия покоя, второе – классическое выражение для кинетической энергии тела.

34. 4-ТОК В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ. УРАВНЕНИЕ ДАЛАМБЕРА

Перейдем теперь к построению релятивистской электродинамики [15]. Здесь необходимо оговориться, что речь должна идти лишь о придании уравнениям Максвелла несколько другой, более симметричной, формы. Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца (25.6), и они не требуют коренной переработки.

Таким образом, в основу дальнейших рассуждений положим предположения об инвариантности полевых уравнений относительно лоренцевых преобразований и сохранении электрического заряда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\vec{\upsilon}\right) = 0, \tag{34.1}$$

где ρ – объемная плотность заряда. Иными словами, закон сохранения заряда должен быть справедлив во всех инерциальных СО. Необходимо только придать закону сохранения заряда (34.1) релятивистски инвариантную форму.

Для этого достаточно ввести 4-вектор, который в дальнейшем будет именоваться 4-током:

$$J_\alpha = \left(\rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, ic\rho\right).$$

В терминах 4-тока закон сохранения заряда (34.1) имеет особенно простую форму (по-прежнему $\tau = ict$ – четвертая координата):

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial J_\tau}{\partial \tau} = 0, \qquad \alpha = \overline{1,4}.$$

Из абстрактного определения 4-вектора вытекает, что при переходе от одной СК к другой его компоненты должны преобразовываться по общим формулам [16]:

$$a_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} a_\beta'.$$

Здесь $\gamma_{\alpha\beta}$ – матрица преобразования. По повторяющемуся индексу β предполагается суммирование. Обобщение преобразований (25.6) дает выражения [6]:

$$a_x = \frac{a_{x'} - i\frac{v}{c}a_{\tau'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \; a_y = a_{y'}, \; a_z = a_{z'}, \; a_\tau = \frac{a_{\tau'} + i\frac{v}{c}a_{x'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (34.2)$$

В отличие от классической механики Ньютона система уравнений Максвелла – Лоренца является релятивистски инвариантной. Выпишем уравнения электродинамики в терминах электрического потенциала φ и векторного потенциала $\vec{A}$:

$$\Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}, \qquad \Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (34.3)$$

$$\Box\varphi = -4\pi\rho, \qquad \vec{j} = \rho\vec{u}, \quad (34.4)$$

где $\Box$ – оператор Даламбера, $\vec{j}$ – объемная плотность тока. Не будем забывать, что система уравнений (34.3), (34.4) должна быть дополнена определенным ограничением, которое носит название калибровки Лоренца:

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Видно, что правые части неоднородных волновых уравнений (34.3), (34.4) являются частями введенного нами ранее 4-тока. Для объединения уравнений (34.3), (34.4) определим 4-потенциал. Он вводится по аналогии с 4-током:

$$A_\alpha = \left(A_x, A_y, A_z, i\varphi\right) = \left(\vec{A}, i\varphi\right).$$

С помощью 4-векторов тока и потенциала можно записать соотношения (34.3), (34.4) в виде одного универсального уравнения

$$\Box A_\alpha = -\frac{4\pi}{c} J_\alpha .$$

Условие калибровки Лоренца также без труда записывается в четырехмерной форме:

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 , \quad \alpha = \overline{1,4} .$$

В результате полная система уравнений электродинамики приобретает релятивистски инвариантную форму. Это означает, что законы электродинамики, как и полагается, одинаковы во всех ИСО. При этом потенциалы электромагнитного поля не являются инвариантными величинами. Очевидно, что закон преобразования потенциалов определяется общими формулами (34.2):

$$A_x = \frac{A_x{}' + \frac{\upsilon}{c}\varphi'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} , \quad A_y = A_y{}' , \quad A_z = A_z{}' , \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{\upsilon}{c} A_x{}'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} . \quad (34.5)$$

35. ТЕНЗОР ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Вспомним связь между напряженностями электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$, с одной стороны, и соответствующими потенциалами с другой:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ,$$

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A} .$$

Далее будем иметь ввиду, что $A_\alpha = (A_x, A_y, A_z, i\varphi)$; φ – электрический, $\vec{A}$ – векторный потенциалы. По-прежнему роль четвертой координаты выполняет переменная $\tau = ict$. По формулам приходим к антисимметричным выражениям для компонент вектора напряженности ЭП:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial \tau}\right),$$

$$E_y = i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial \tau}\right),$$

$$E_x = i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \tau}\right).$$

Введение четвертой временно́й координаты τ, включающей мнимую единицу, приводит к тому, что выражения для компонент вектора напряженности формально становятся антисимметричными.

Взяв ротор векторного потенциала, получим подобные соотношения для компонент магнитного поля:

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Эти выражения изначально были антисимметричными и естественным образом сохранили указанное свойство.

Введем антисимметричный тензор

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \quad \left(F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}\right).$$

Компоненты этого тензора выражаются через компоненты электрического и магнитного полей следующим образом:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

36. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ФОРМЕ

В качестве напоминания выпишем исходную систему уравнений Максвелла [6; 8; 10], описывающую эволюцию электрического и магнитного полей в вакууме по заданным и в общем случае меняющимся с течением времени распределениям зарядов и токов:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{H} = 0, \tag{36.1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho. \tag{36.2}$$

Легко видеть, что традиционные для математики операции однократного дифференцирования и свертки применительно к тензору

$F_{\alpha\beta}$ позволяют полностью воспроизвести уравнения Максвелла (36.1), (36.2), которые приобретают компактную и особо симметричную форму:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0\,, \qquad \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{4\pi}{c} J_\alpha\,.$$

Это и есть релятивистки инвариантная форма записи уравнений Максвелла. Свойства поля вытекают из вида одного антисимметричного тензора электромагнитного поля, определенного в 4-мерном пространстве-времени.

Как видно из определения, составляющие $\vec{E}$ и $\vec{H}$ входят в этот тензор в определенном смысле на равных правах.

37. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Материал, изложенный в учебном пособии, практически не содержит примеров решения частных задач и представляет собой цельный теорфизический взгляд на электродинамические явления в вакууме. Заполнить пробел, связанный с отсутствием прикладных вопросов в данном направлении, предлагается с помощью сборника задач [17], который является великолепным дополнением к приведенным в списке литературы книгам при освоении университетского курса электродинамики. Указанный задачник в определенном смысле является таким же классическим пособием по этой дисциплине, как знаменитый сборник задач по математическому анализу Б.П. Демидовича. По причинам широкого спектра задач и их качественного подбора учебник [17] всегда был крайне востребован, неоднократно переиздавался в России с момента первого выхода в свет и сохранил свою актуальность.

Как уже неоднократно подчеркивалось, по своему содержанию предлагаемое учебное пособие не затрагивает некоторые родственные для данного курса области, а именно электродинамику сплошных сред и физику плазмы. Из доступных книг для первичного знакомства с этими разделами электродинамики можно предложить учебные пособия [3; 18; 19]. В частности, в книге [19] можно найти обсуждение таких нелинейных электродинамических процессов, как ленгмюровские волны и ионно-звуковые волны в холодной плазме. Для описания ионно-звуковых волн производится вывод уравнения Кортевега – де Вриза и находится решение данного уравнения в виде солитонов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.
2. *Тихонов А.Н.*, *Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 799 с.
3. *Лобов Н.И.*, *Любимов Д.В.* Электродинамика сплошных сред. Пермь. Изд-во Перм. ун-та, 2007. 80 с.
4. *Ильин В.А.*, *Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1988. 224 с.
5. *Демин В.А.* Теория элементарных частиц. Кварки и глюоны: учеб.-метод. пособие. Изд-во Перм. ун-та, Пермь, 2007. 43 с.
6. *Левич В.Г.* Курс теоретической физики. М.: Наука, 1969. Т. 1. 912 с.
7. *Яворский Б.М.*, *Детлаф А.А.* Справочник по физике. М.: Наука, 1977. 944 с.
8. *Любимов Д.В.* Электродинамика. Электромагнитное поле в вакууме. Пермь. Изд-во Перм. ун-та. 2007. 91 с.
9. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука. 1989. 504 с.
10. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Курс теоретической физики. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы. 1962. Т. 2. Теория поля. 422 с.
11. *Гершуни Г.З.* Электродинамика. Излучение дипольной системы. Метод. указания. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1989. 16 с.
12. *Угаров В.А.* Специальная теория относительности. М.: Наука, 1969. 304 с.
13. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Изд-во технико-теор. литературы. 1957. 408 с.
14. *Матвеев А.Н.* Механика и теория относительности: учеб. пособие. М.: Высшая школа. 1976. 416 с.
15. *Демин В.А.* Основы специальной теории относительности и ее связь с электродинамикой: метод. указания / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2017. 20 с.
16. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1953. 635 с.

17. *Батыгин В.В.*, *Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1962. 480 с.

18. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988. 304 с.

19. *Демин В.А.* Ударные волны и акустические явления: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2016. 112 с.

Учебное издание

Демин Виталий Анатольевич

Электродинамика и специальная теория относительности

Учебно-методическое пособие

Редактор *М. А. Шемякина*
Корректор *Н. А. Антонова*
Компьютерная верстка: *В. А. Демин*

Объем данных 2,5 Мб
Подписано к использованию 12.04.2021

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15