

15,0409 06.03.71

Листок срока возврата

книга должна быть
возвращена не позже
указанного здесь срока

Колич. пред. выдоч.

1500841

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ ВПО «Пермский государственный университет»

Н. И. Лобов, Д. В. Любимов, Т. П. Любимова

Решение задач на ЭВМ

Учебно-методическое пособие

Пермь 2007

530
Х. 82

УДК 532.783

ББК 22.253.3:22.193
Л683
УДК 532.783

Лобов Н.И.

Л683 Решение задач на ЭВМ: учеб.-метод. пособие/
Н.И.Лобов, Д.В.Любимов, Т.П.Любимова; Перм. ун-т: –
Пермь, 2007. – 82 с.: ил.

ISBN5-7944-0812-X

На доступном для студентов нематематических специальностей уровне излагаются основные практические методы и приемы, используемые при численном исследовании задач теории гидродинамической устойчивости.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по теоретической физике и гидродинамике.

Печатается в соответствии с решением совета физического факультета Пермского государственного университета

Рецензенты:

зав.каф. теоретической физики и компьютерного моделирования Перм. гос. пед. ун-та проф. Р.В.Бирих; проф. каф. теоретической механики Перм. гос. техн. ун-та, к.ф.-м.н. Р.Н.Рулаков.

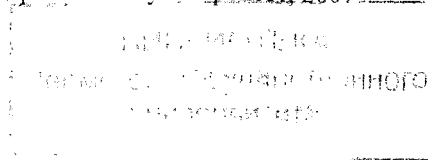
Данное пособие является победителем конкурса, проведенного Пермским государственным университетом в ходе реализации инновационной образовательной программы «Формирование информационно-коммуникационной компетентности выпускников классического университета в соответствии с потребностями информационного общества» в рамках приоритетного национального проекта «Образование».

ISBN5-7944-0812-X

УДК 532.783
ББК 22.253.3:22.193

© Лобов Н.И., Любимов Д.В., Любимова Т.П., 2007
©Пермский государственный университет, 2007

1500841



Оглавление

Введение.....	4
1. Решение уравнений и систем уравнений.....	5
1.1. Метод секущих.....	5
1.2. Решение систем нелинейных уравнений.....	9
1.3. Решение комплексных уравнений.....	14
2. Численное интегрирование.....	16
2.1. Метод Рунге-Кутты-Мерсона.....	17
2.2. Метод Фельдберга.....	24
2.3. Метод предиктор-корректор.....	25
2.4. Метод рядов Тейлора.....	28
3. Вычисление определенных интегралов.....	33
4. Краевые задачи.....	35
4.1. Метод численного построения фундаментальной системы решений.....	37
4.2. Метод ортогонализации.....	43
4.3. Дифференциальная прогонка.....	46
4.4. Стыковка в промежуточной точке.....	52
4.5. Сложные краевые задачи.....	55
5. Метод продолжения по параметру.....	58
6. Преобразование Шенкса.....	63
7. Метод Галеркина.....	65
7.1. Описание метода.....	65
7.2. Применение метода к задачам конвекции.....	68
8. Численное исследование устойчивости нестационарных течений.....	71
Список рекомендуемой литературы.....	80

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная математика занимает заслуженно важное место в учебных программах системы высшего образования. В настоящее время написано немало самых разнообразных учебных пособий по численным методам. В силу того, что они являются пособиями по соответствующим учебным курсам, значительное внимание в них уделяется обоснованию методов, выводу расчетных формул, обсуждению вопросов устойчивости и сходимости численных алгоритмов. Перегруженность подобных пособий учебным материалом делает их неудобными для практического использования. Кроме того, в стандартных курсах излагаются стандартные же численные алгоритмы. На практике часто встречаются ситуации, когда стандартные методы громоздки, неудобны. Начинаящим специалистам полезны также и рекомендации по использованию тех или иных вычислительных схем. К сожалению, книг, которые играли бы роль справочника по методам вычислений (на взгляд авторов, очень удачна монография [1]), весьма и весьма мало, да и практически все они в настоящее время труднодоступны.

Мы не претендуем на то, что предлагаемое вашему вниманию учебное пособие заполнит указанный пробел, но надеемся, что оно принесет некоторую пользу студентам старших курсов, магистрам и аспирантам. При написании пособия за основу был принят учебный материал, который авторы в разные годы излагали в рамках соответствующих спецкурсов студентам физического факультета Пермского университета, специализирующимся по теоретической физике и физической гидродинамике. В пособии приводятся рекомендации по модификациям численных методов, которые выдержали достаточно длительную проверку в многолетней практике численных исследований гидродинамической и конвективной устойчивости, проводимых в Пермской гидродинамической школе.

1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Вычислительный гидродинамический эксперимент очень часто приводит к ситуации, когда необходимо находить решение нелинейных уравнений или систем нелинейных уравнений. Типичным примером может служить исследование линейной устойчивости течений или равновесия жидкости. Характеристики неустойчивости при этом являются собственными значениями некоторой спектральной красовой задачи. Для их определения необходимо решать нелинейное уравнение или систему уравнений.

В арсенале вычислительной математики имеется много методов решения уравнений. Ниже рассмотрим модификацию метода секущих, которая хорошо себя зарекомендовала и широко используется в работах Пермской гидродинамической школы.

1.1. Метод секущих

Итак, пусть имеется некоторая функция $y = f(x)$. Если $y = 0$ при некотором значении $x = x_0$, то x_0 является корнем уравнения $f(x) = 0$. Удобно воспользоваться графическим представлением. Функция $y = f(x)$ описывает кривую линию на плоскости (рис.1), которая пересекает ось абсцисс в точке x_0 . Идея метода секущих (хорд), как и метода касательных, комбинированного метода хорд и касательных, проста и сводится к следующему. В некоторой окрестности корня кривая линия аппроксимируется прямой (нелинейная функция $y = f(x)$ заменяется линейной функцией $y = ax + b$). В качестве приближения для корня x_0 принимается координата точки пересече-

ния этой прямой линии и оси абсцисс (корень линейного уравнения). Решение линейного уравнения, очевидно, не представляет никаких трудностей. Осталось написать необходимые формулы.

Для определения двух неизвестных коэффициентов a и b необходимы два вычисления функции $y = f(x)$. Точка 1 на рис.1 имеет координаты $(x_1, y_1 = f(x_1))$, точка 2 – координаты $(x_2, y_2 = f(x_2))$. Тогда $y_1 = ax_1 + b$; $y_2 = ax_2 + b$. Отсюда получаем

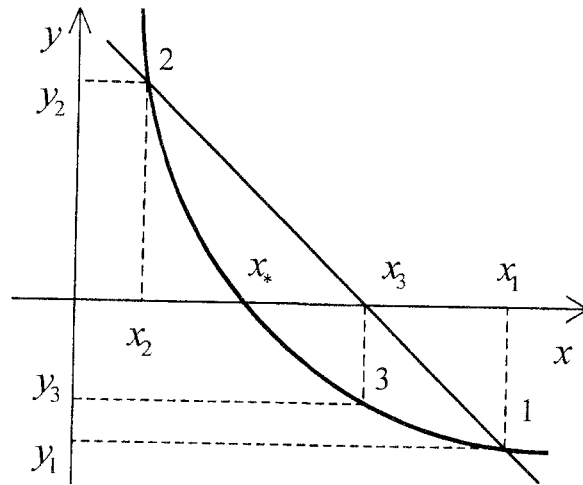


Рис. 1

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}; \quad b = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}; \quad x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}. \quad (1.1)$$

Введем для удобства следующие обозначения: $\Delta_x = x_1 y_2 - x_2 y_1$, $\Delta = y_2 - y_1$. Тогда

$$x_3 = \frac{\Delta_x}{\Delta}. \quad (1.2)$$

Как было сказано выше, в качестве приближения для корня x_* принимается величина x_3 . Далее рекомендуется поступать следующим образом. Определив $y_3 = f(x_3)$, получим точку 3 на рис.1. Теперь осталось выполнить переопределение точек: в качестве точек 1 и 2 использовать точки 2 и 3 соответственно, после чего можно вновь воспользоваться расчетными формулами (1.1)-(1.2) и т.д. Критерием выхода из этого итерационного процесса является близость текущих приближений x_2 и x_3 .

Определяем окончательно алгоритм метода:

1. Выбираем начальное «затравочное» приближение для корня x_3 . Обратите внимание на номер точки! Итерационная процедура предполагает, что наилучшим приближением для корня уравнения является x_3 , более грубым – x_2 , самым неточным – x_1 .

2. Определяем $y_2 = f(x_2)$.

3. Задаем x_1 . Величина x_1 не должна сильно отличаться от x_2 ; например, можно положить $x_1 = 1.01 * x_2$. Если $x_2 = 0$, то можно взять $x_1 = 0.01$.

4. Вычисляем $y_1 = f(x_1)$. Предварительные итерации выполнены.

5. Вычисляем величины Δ_x и Δ .

6. Теперь, казалось бы, можно приступить к определению x_3 .

Так поступают многие начинающие программисты, совершая при этом типичную ошибку. Дело в том, что в ходе итерационной процедуры уточнения корня аппроксимирующая секущая может оказаться практически параллельной оси абсцисс. Это приводит к неприятному сюрпризу в виде численного переполнения при делении в (1.2). Конечно, при запуске метода в силу пункта 3 неприятностей при делении не будет. Сказанное выше относится, безусловно, к ходу итерационного процесса. Мы рекомендуем убедиться в том, что выполняется, например, следующее условие:

$$10^{-9} * |\Delta_r| < 10^9 * |\Delta|. \quad (1.3)$$

7. Если условие (1.3) выполняется, вычисляем x_3 (теперь это можно делать совершенно спокойно).

8. Проверяем, не пора ли прекращать процедуру определения корня. Начинающие программисты при этом ограничиваются оценкой только абсолютной погрешности определения корня: $|x_3 - x_2| < \varepsilon$, где ε - требуемая точность. На практике очень часто характерная величина x_* заранее неизвестна. Поэтому более универсальной, казалось бы, является оценка относительной погрешности

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| < \varepsilon. \quad (1.4)$$

К сожалению, не все так просто. В практике гидродинамических исследований нередки ситуации, когда $x_* = 0$. Например, инкремент нейтральных монотонных возмущений равен нулю. Поэтому рекомендуется поступать следующим образом. Если есть уверенность, что $x_* \neq 0$, то для условия выхода из итерационной процедуры разумно пользоваться оценкой относительной погрешности. В противном случае полезно выполнить несколько предварительных поисков корня для того, чтобы получить представление о характерной величине x_* , и, следовательно, использовать корректную величину ε в оценке абсолютной погрешности.

9. Если условие, например (1.4), выполняется, цель достигнута. Корень нелинейного уравнения найден, причем с требуемой точностью.

10. При невыполнении условия (1.4) вычисляем $y_3 = f(x_3)$, переопределяем точки 1 и 2: $x_1 = x_2$; $x_2 = x_3$; $y_1 = y_2$; $y_2 = y_3$ и переходим к выполнению пункта 5.

11. Если условие (1.3) не соблюдается, необходим перезапуск итерационной процедуры. В качестве начального приближения для

корня принимаем последнее найденное приближение, т.е. x_2 . Для этого переходим к выполнению пункта 3.

Описанная процедура обладает нелинейной сходимостью, и для определения корня нелинейного уравнения обычно требуется всего несколько итераций. Но метод секущих сходится не всегда. Для обеспечения сходимости начальное приближение (x_2) должно находиться в области притяжения корня. Оставляя в стороне математическое обоснование, заметим, что областью притяжения корня является участок монотонного изменения функции $f(x)$. Поэтому выбор начального приближения иногда представляет собой достаточно трудную задачу. Ниже мы опишем некоторые приемы, облегчающие решение указанной проблемы. Если начальное приближение было выбрано вне области притяжения корня, то последующие приближения будут все более и более отличаться от предыдущих. В связи с этим мы рекомендуем следить за числом итераций, и если это число оказывается больше 10-20, то необходимо прекращать итерационную процедуру и изменять начальное приближение.

1.2. Решение систем нелинейных уравнений

Обобщение метода секущих для системы нелинейных уравнений рассмотрим сначала на примере системы двух нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Левые части уравнений представляют собой функции $z = f(x, y)$ и $z = g(x, y)$, которые задают искривленные поверхности в трехмерном пространстве. Эти поверхности пересекаются с координатной плоскостью $z = 0$ по некоторым кривым линиям, каждая из которых является геометрическим местом точек, координаты их удовлетворяют первому и второму уравнению (1.5) соответственно. Коор-

динаты x_2 и y_2 точки пересечения этих кривых и являются решением системы (1.5).

Двухмерный вариант метода секущих предполагает, что искривленные поверхности $z = f(x, y)$ и $z = g(x, y)$ в некоторой области значений аргументов аппроксимируются плоскостями $z = a_1x + b_1y + c_1$ и $z = a_2x + b_2y + c_2$. Указанные плоскости и координатная плоскость $z = 0$ пересекаются по прямым линиям. Если имеется точка пересечения данных прямых линий, то координаты точки пересечения являются приближением для решения системы уравнений (1.5). Расчетные формулы для координат точки пересечения можно найти в любом учебнике по аналитической геометрии. Они содержат определители третьего порядка матриц, составленных из координат базисных точек и значений функций:

$$\begin{aligned} f_1 &= f(x_1, y_1), & f_2 &= f(x_2, y_2), & f_3 &= f(x_3, y_3), \\ g_1 &= g(x_1, y_1), & g_2 &= g(x_2, y_2), & g_3 &= g(x_3, y_3); \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix};$$

$$x_4 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_4 = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Как видно, для "разгона" метода требуется предварительное трехкратное вычисление левых частей системы (1.5). Величины x_4 и y_4 являются приближением для решения системы нелинейных уравнений. Что же делать дальше? Можно опять выбирать три базисные точки, ориентируясь на найденное приближение. С точки зрения устойчивости метода такая реализация алгоритма является предпочтительной. Но при численных исследованиях вычисление левых частей системы (1.5) часто требует большого машинного времени. Поэтому, как и в случае решения одного уравнения, рекомендуется переопределение базовых точек.

При вычислении x_4 и y_4 возможна ошибка типа машинного переполнения. Это может произойти, если в ходе итераций точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) выстроятся на плоскости $x-y$ вдоль одной прямой. Чтобы избежать появления такой ошибки, Гаусс [2] предложил размещать точки в вершинах прямоугольного треугольника. Указанная причина, к сожалению, не является единственной, но невозможно всего избежать и все автоматизировать (еще одно традиционное заблуждение начинающих программистов). Перейдем к описанию алгоритма вычислений.

1. Задаем из некоторых соображений величины x_3 и y_3 . Вычисляем f_3 и g_3 .

2. Вычисляем $x_1 = 1.01 * x_3$ ($x_1 = 0.01$, если $x_3 = 0$), $y_1 = y_3$, $x_2 = x_3$, $y_2 = 1.01 * y_3$ ($y_2 = 0.01$, если $y_3 = 0$). Возможны и другие варианты разброса точек 1 и 2 относительно точки 3. Вычисляем f_1 , f_2 , g_1 , g_2 .

3. Определяем Δ , Δ_x , Δ_y . Выполняем страховочную проверку:

$$\begin{aligned} 10^{-9} * |\Delta_x| &< 10^9 * |\Delta|, \\ 10^{-9} * |\Delta_y| &< 10^9 * |\Delta|. \end{aligned} \quad (1.7)$$

4. Если оба условия (1.7) выполняются, вычисляем x_4 , y_4 .

5. Проверяем, достигнута ли точность определения решения системы:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| &< \varepsilon_x, \\ \left| \frac{y_4 - y_3}{y_4} \right| &< \varepsilon_y, \end{aligned} \quad (1.8)$$

будут выглядеть рекомендации Гаусса, касающиеся разброса базисных точек¹.

1.3. Решение комплексных уравнений

До сих пор при обсуждении алгоритмов решения уравнения и систем уравнений неявно предполагалась вещественность функций и их аргументов. С формальной точки зрения обобщение содержания п.1.1 на случай комплексного уравнения для комплексной неизвестной

$$f(z) = 0, \quad f = f_r + i f_i, \quad z = x + iy, \quad (1.10)$$

тривиально – достаточно объявить комплексными соответствующие величины в расчетных формулах (1.1)-(1.2). Альтернативный способ – рассматривать уравнение (1.10) как систему двух уравнений для двух неизвестных:

$$\begin{aligned} f_r(x, y) &= 0, \\ f_i(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

и решать ее по правилам (1.6). Какой же способ лучше? В первом случае происходит экономия машинных операций, метод работает быстрее, программа проще. Поэтому "комплексный" алгоритм решения комплексного уравнения обычно предпочтителен. Тем не менее, возможны ситуации, когда комплексный вариант отказывается работать, в то же время процедура решения системы двух уравнений работает без сбоев. Примером такой ситуации может служить определение собственных чисел спектральной краевой задачи устойчивости течений вблизи точек ветвления декрементов – области так называемых жуков. Казалось бы, уравнение одно, как его не рассматривай. Указанная экономия вычислительных операций возможна потому, что для комплексной функции ее вещественная и мнимая части не являются независимыми. Именно существование условий аналитичности комплекс-

ных функций сворачивает алгоритм решения системы двух уравнений, упрощая его. В условия Коши-Римана входят производные комплексной функции. При больших производных ошибка их численной аппроксимации может быть очень большой в силу ограниченности разрядной сетки представления чисел в компьютере. Именно это и происходит в указанном выше случае ветвления декрементов. Внешне сбой алгоритма выражается в резком увеличении числа итераций метода вплоть до его "зацикливания". Тогда необходимо переходить к процедуре решения комплексного уравнения как к системе двух независимых уравнений от двух независимых переменных.

¹ Базовые точки 1: $(1.01 * x_{1,n}; x_{2,n}; \dots x_{m,n})$; 2: $(x_{1,n}; 1.01 * x_{2,n}; \dots x_{m,n})$; ...
 $n: (x_{1,n}; x_{2,n}; \dots x_{m,n})$.

2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Численным интегрированием обычно называют решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. Из всех возможных общих и частных методов решения дифференциальных уравнений мы рассмотрим здесь только некоторые методы пошагового интегрирования задачи Коши. Смысл термина "пошаговое интегрирование" заключается в том, что решение находится последовательно, шаг за шагом в отдельных точках области определения искомой функции.

Задача Коши содержит дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной,

$$y' = f(x, y).$$

Здесь $y(x)$ - неизвестная функция, x - переменная интегрирования. Функцию $f(x, y)$ в дальнейшем будем называть правой частью дифференциального уравнения, или просто правой частью. В начальной точке участка интегрирования известна величина y :

$$x = a: \quad y(x) = y(a) = y_0. \quad (2.1)$$

В процессе численного интегрирования функция $y(x)$ определяется внутри некоторого участка $x \in [a, b]$ на дискретном множестве точек $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Такие точки называются узлами интегрирования, или просто узлами. Расстояние между соседними узлами называется шагом интегрирования, $h_i = x_{i+1} - x_i$. Если $h_i = const$, то говорят об интегрировании с постоянным шагом. При пошаговом интегрировании $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$. Таким образом, строится таблица реше-

ния (табл.1). Величина Δy , является, разумеется, только приближением для приращения функции на i -м шаге. Помня об этом, будем называть для простоты приращением функции именно Δy_i . Существуют две большие группы методов пошагового интегрирования. Первую группу составляют так называемые явные методы. В этом случае по-

шаговое интегрирование предполагает, что для определения Δy , используются известные значения функции в текущем и предшествующих узлах y_i, y_{i-1}, \dots . Если для вычисления приращения используется значение функции только в предыдущем узле, то соответствующий метод называется одноточечным, в противном случае говорят о многоточечном методе.

Во вторую группу входят неявные методы. В них для формирования приращения используются как текущие и предыдущие узлы, так и последующие узлы. Рассмотрение методов начнем с метода Рунге-Кутты-Мерсона, имеющего, пожалуй, наиболее продолжительную историю применения в исследованиях, проводимых Пермской школой.

Таблица 1

x	y
x_0	$y_0 = y(a)$
x_1	$y_1 = y(x_1)$
x_2	y_2
\dots	\dots
x_n	y_n

2.1. Метод Рунге-Кутты-Мерсона

В университетских курсах численных методов обязательно рассматриваются стандартные методы Рунге-Кутты. Модификация Мерсона (см., например, [3]) отличается от них тем, что Мерсону удалось ценой дополнительного вычисления правой части дифференциального уравнения получить оценку погрешности приращения. Это позволяет гибко менять величину шага интегрирования, получая решения уравнения с требуемой точностью за приемлемое время. Метод Рунге-Кутты-Мерсона, по нашей классификации, является явным, одно-

чечным, с переменным шагом. В нашей литературе эта группа методов именуется методами Рунге-Кутты (фамилия второго автора – Кутта, родительный падеж – Кутты).

Технология получения методов Рунге-Кутты может быть найдена в любом учебном пособии по численным методам. На наш взгляд, есть смысл подробнее рассмотреть совершенно простые моменты реализации методов. Почему-то начинающие программисты совершают на этапе реализации массу ошибок. Изложение метода начнем применительно к одному дифференциальному уравнению. Обобщение для системы уравнений первого порядка приведем чуть ниже. Расчетные формулы метода Мерсона имеют вид

$$x_{i+1} = x_i + h_i; \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{2}(K_1 + 4K_4 + K_5), \quad (2.2)$$

$$K_1 = \frac{h_i}{3} f(x_i, y_i),$$

$$K_2 = \frac{h_i}{3} f\left(x_i + \frac{h_i}{3}, y_i + K_1\right),$$

$$K_3 = \frac{h_i}{3} f\left(x_i + \frac{h_i}{3}, y_i + \frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{2}\right), \quad (2.3)$$

$$K_4 = \frac{h_i}{3} f\left(x_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{3}{8}K_1 + \frac{9}{8}K_3\right),$$

$$K_5 = \frac{h_i}{3} f\left(x_i + h_i, y_i + \frac{3}{2}K_1 - \frac{9}{2}K_3 + 6K_4\right),$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{5} \left[K_1 + 4K_4 - \frac{9}{2}K_3 - \frac{K_5}{2} \right]. \quad (2.4)$$

Начинаем интегрирование. Согласно (2.1) при $x = a$ известно значение функции y . Данная точка считается начальной, т.е. $x = x_0 = a$, $y = y_0$. Зададим начальный шаг интегрирования h_0 . Можно взять начальный шаг равным, например, одной сотой характерной величины переменной интегрирования. Последовательно вычисляем

вспомогательные величины K_1, \dots, K_5 (2.3). Так, для определения величины $K_2 = \frac{h_i}{3} f\left(x_i + \frac{h_i}{3}, y_i + K_1\right)$ необходимо добавить к текущему значению координаты (в данном случае это x_0) треть текущего шага, величину искомой функции в текущем узле увеличить на только что вычисленную K_1 , а затем с этими измененными x и y вычислить величину правой части уравнения.

Метод Мерсона тем и отличается от других методов, что содержит оценку погрешности определения приращения (см. (2.4)). Вычисляем погрешность ε . Если она достаточно разумна, то определяем приращение, а затем величину функции y в следующем узле. В данном случае это будет узел с номером 1. Как поступить, если погрешность ε окажется слишком большой?

Рассмотрим некоторую промежуточную стадию процесса. Пусть мы находимся в узле i . Нам известны x_i , y_i , h_i . Определяем величины K в i -м узле. Вычисляем погрешность ε_i . В ранее опубликованных работах можно было увидеть такие рекомендации по применению традиционных методов Рунге-Кутты: если вычисленная погрешность оказывалась на порядок выше требуемой, то величина шага интегрирования уменьшалась вдвое и шаг повторялся; в противном случае шаг увеличивался вдвое.

Более гибкой является процедура, основанная на применении известного факта. Модификация Мерсона является методом пятого порядка точности. Это означает, что погрешность определения функции пропорциональна пятой степени шага интегрирования. В соответствии с этим следующий шаг определяется по формуле

$$h_{i+1} = h_i \left| \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} \right|^{\frac{1}{5}}. \quad (2.5)$$

Здесь ε обозначает требуемую точность (определяется пользователем). На самом деле (смотрите на индексы) таким соотношением связаны текущее значение шага интегрирования и величина шага, не-

обходимого для обеспечения требуемой точности. В силу гладкости функций (говорят, что физика не терпит разрывов) выражение (2.5) вполне может быть использовано для прогноза величины шага. Кстати, из-за такого некоторого "отставания" в прогнозе шага метод Мерсона иногда оказывается несколько инерционен, особенно, если переменной интегрирования является время. Многие специалисты в области гидродинамики отмечали запаздывание метода Мерсона в эволюционных задачах.

Вернемся к обсуждению алгоритма. Вычислено значение ε_i . Далее по формуле (2.5) следует определить новый шаг. Если $\varepsilon_i \leq 5\varepsilon_*$ (вычисленная погрешность не больше требуемой на полпорядка), то можно вычислять приращение (2.2), y_{i+1} , x_{i+1} . Шаг выполнен, мы оказались в узле $i+1$ и можно делать следующий шаг, так как для этого имеются все данные, включая величину h_{i+1} . Если оказалось, что $\varepsilon_i < \varepsilon_*$, то решение уравнения найдено с излишней точностью. Шаг h_{i+1} тогда окажется немного больше предыдущего. Если $\varepsilon_i > \varepsilon_*$, то шаг h_{i+1} будет меньше предыдущего. Величина шага очень гибко подстраивается под требуемую точность вычислений.

Если вычисления выполнены неточно, т.е. $\varepsilon_i > 5\varepsilon_*$, приращение определять не нужно. Необходимо просто переопределить величину h_i , взяв в качестве ее полученное значение h_{i+1} , и повторить текущий шаг интегрирования, т.е. выполнить процедуру "отката".

В заключение скажем о погрешности вычислений. Как и при решении уравнений, нам заранее неизвестна характерная величина y . Поэтому вместо оценки абсолютной погрешности удобнее пользоваться оценкой относительной погрешности $\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i / y_i$. Соответственно в формуле выбора шага (2.5) необходимо использовать значения относительных вычисленной и требуемой погрешностей. При интегрировании одного уравнения есть вероятность, что на некотором этапе интегрирования вычисленная погрешность случайно окажется очень малой, точнее, очень большой станет величина дроби в (2.5). Такие не-

приятности можно обойти, используя вместо (2.5) регуляризованное выражение

$$h_{i+1} = h_i \left| \frac{\tilde{\varepsilon}_i}{\varepsilon_*} + 0.001 \right|^{-\frac{1}{5}}, \quad (2.6)$$

в которое также входят относительные погрешности. Регуляризирующая константа, кроме всего прочего, не позволит шагу интегрирования меняться слишком сильно. И, наконец, величина шага может быть отрицательной, поэтому для интегрирования в сторону уменьшения координаты x не надо вносить в алгоритм никаких изменений.

Практика использования метода Рунге-Кутты-Мерсона показывает, что такая стратегия изменения шага уменьшает количество требуемых шагов, при этом пересчеты редки. Для примера можно привести анализ устойчивости течения Пуазейля при параметрах, характерных для кризиса течения. Интегрирование соответствующей системы дифференциальных уравнений с относительной погрешностью 10^{-5} в интервале изменения переменной интегрирования от -1 до $+1$ требует всего около 100 шагов, причем случаи повторного выполнения шага интегрирования единичны.

Перейдем к обобщению алгоритма для системы n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$\dots$$

$$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$x = a: \quad y_1 = c, \dots, y_n = d.$$

Можно представить, что неизвестные функции образуют вектор решений

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

в некотором пространстве. Тогда система уравнений и граничные условия переписутся в следующем виде:

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}),$$

$$x = x_0; \quad \vec{y} = \vec{y}_0.$$

Здесь \vec{f} - вектор правых частей. С использованием векторных обозначений обобщение расчетных формул метода на систему уравнений выглядит очень просто - над некоторыми величинами нужно поставить знак вектора:

$$x_{i+1} = x_i + h_i; \quad \vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \Delta \vec{y}_i,$$

$$\Delta \vec{y}_i = \frac{1}{2}(\vec{K}_1 + 4\vec{K}_4 + \vec{K}_5),$$

$$\vec{K}_1 = \frac{h_i}{3} \vec{f}(x_i, \vec{y}_i),$$

$$\vec{K}_2 = \frac{h_i}{3} \vec{f}\left(x_i + \frac{h_i}{3}, \vec{y}_i + \vec{K}_1\right),$$

$$\vec{K}_3 = \frac{h_i}{3} \vec{f}\left(x_i + \frac{h_i}{3}, \vec{y}_i + \frac{\vec{K}_1 + \vec{K}_2}{2}\right),$$

$$\vec{K}_4 = \frac{h_i}{3} \vec{f}\left(x_i + \frac{h_i}{2}, \vec{y}_i + \frac{3}{8}\vec{K}_1 + \frac{9}{8}\vec{K}_3\right),$$

$$\vec{K}_5 = \frac{h_i}{3} \vec{f}\left(x_i + h_i, \vec{y}_i + \frac{3}{2}\vec{K}_1 - \frac{9}{2}\vec{K}_3 + 6\vec{K}_4\right),$$

$$\vec{\varepsilon}_i = \frac{1}{5} \left[\vec{K}_1 + 4\vec{K}_4 - \frac{9}{2}\vec{K}_3 - \frac{\vec{K}_5}{2} \right].$$

Последовательность действий описана выше и дополнительных пояснений не требует. Необходимо только обсудить изменения в стратегии выбора шага. Поскольку найден вектор ошибок $\vec{\varepsilon}$, воспользуемся выражением (2.6). Возможны ситуации, когда интегрирование системы уравнений чувствительно к точности определения некоторых компонент вектора решений. В этом случае приходится находить относительные ошибки определения функций и в выражении (2.6) использовать максимальное значение из всех компонент вектора $\vec{\varepsilon}_i$. В других, менее критических ситуациях можно в (2.6) применять какие-нибудь нормы вектора ошибок и вектора решений. Приведем несколько формул (индекс, обозначающий номер шага интегрирования, для простоты опустим, компоненты векторов нумеруются индексом k):

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_k \frac{\varepsilon_k^2}{y_k^2}}; \quad \tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sum_k \varepsilon_k^2}{\sum_k y_k^2}}; \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\sum_k |\varepsilon_k|}{\sum_k |y_k|}.$$

Появление векторных величин приводит к возникновению группы затруднений программистов-"пешеходов". В литературе, посвященной программированию, часто различают программирование и кодирование. При этом под кодированием понимают запись выбранного алгоритма на каком-нибудь языке программирования. При кодировании вычисление правых частей системы дифференциальных уравнений необходимо оформлять в виде отдельного модуля. Это может быть процедура с использованием языка Паскаль (функции не годятся). При программировании на Си - это функции, при использовании Фортрана - подпрограммы subroutine. При этом правые части необходимо расписывать "честно", каждую правую часть - в отдельном операторе, одну

за другой, не используя циклов и других упрощений¹. Использование циклов приводит к вполне ощутимым накладным расходам, а вычисление правых частей занимает основное время интегрирования даже небольшой системы. При кодировании одного шага интегрирования вычисление комбинаций типа $\bar{y} + \bar{K}$ нужно оформить в виде цикла по компонентам векторов.

2.2. Метод Фельдберга

Метод Фельдберга (см., например, [4]) относится также к методам Рунге-Кутты. В нем производится шестикратное вычисление правых частей. Ценой выполнения дополнительного вычисления Фельдбергу удалось получить одновременно расчетные формулы четвертого и пятого порядка точности. Это позволило получить оценку точности метода. Приведем необходимые выражения применительно сразу к системе дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned}\bar{K}_1 &= h_i \bar{f}(x_i, \bar{y}_i), \\ \bar{K}_2 &= h_i \bar{f}\left(x_i + \frac{h_i}{4}, \bar{y}_i + \frac{\bar{K}_1}{4}\right), \\ \bar{K}_3 &= h_i \bar{f}\left(x_i + \frac{3}{8}h_i, \bar{y}_i + \frac{3}{32}\bar{K}_1 + \frac{9}{32}\bar{K}_2\right), \\ \bar{K}_4 &= h_i \bar{f}\left(x_i + \frac{12}{13}h_i, \bar{y}_i + \frac{1932}{2197}\bar{K}_1 - \frac{7200}{2197}\bar{K}_2 + \frac{7296}{2197}\bar{K}_3\right), \\ \bar{K}_5 &= h_i \bar{f}\left(x_i + h_i, \bar{y}_i + \frac{439}{216}\bar{K}_1 - 8\bar{K}_2 + \frac{3680}{513}\bar{K}_3 - \frac{845}{4104}\bar{K}_4\right), \\ \bar{K}_6 &= h_i \bar{f}\left(x_i + \frac{h_i}{2}, \bar{y}_i - \frac{8}{27}\bar{K}_1 + 2\bar{K}_2 - \frac{3544}{2565}\bar{K}_3 + \frac{1859}{4104}\bar{K}_4 - \frac{11}{40}\bar{K}_5\right).\end{aligned}$$

- Метод пятого порядка:

$$x_{i+1} = x_i + h_i, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + \Delta\bar{y}_i,$$

¹ У американских программистов есть прекрасное правило, которое в переводе на русский язык звучит примерно так: "Будь проще, дурачок!".

$$\Delta\bar{y}_i = \frac{16}{135}\bar{K}_1 + \frac{6656}{12825}\bar{K}_3 + \frac{28561}{56430}\bar{K}_4 - \frac{9}{50}\bar{K}_5 + \frac{2}{55}\bar{K}_6.$$

- Метод четвертого порядка:

$$y_i^* = \bar{y}_i + \Delta\bar{y}_i^*,$$

$$\Delta\bar{y}_i^* = \frac{25}{216}\bar{K}_1 + \frac{1408}{2565}\bar{K}_3 + \frac{2197}{4104}\bar{K}_4 - \frac{1}{5}\bar{K}_5.$$

В качестве абсолютной погрешности принимается разность $\bar{\varepsilon}_i = \Delta\bar{y}_i - \Delta\bar{y}_i^*$. Для определения величины шага интегрирования можно воспользоваться (2.6). В последнее время метод Мерсона фактически заменен в гидродинамических расчетах методом Фельдберга. Тем не менее, нам трудно назвать какие-то особенные преимущества данного метода. Можно заметить, что оценка погрешности в методе Мерсона является только оценкой. Выражение (2.4), как можно убедиться, дает точное значение погрешности метода только в том случае, когда решением дифференциального уравнения является экспоненциальная функция. Как видим, метод Фельдберга также содержит только оценку погрешности. Поэтому, наверное, при выборе метода (из указанных) определяющее значение имеют привычки и вкусы пользователей, не более того.

2.3. Метод предиктор-корректор

Описанный в параграфе 2.1. метод Рунге-Кутты-Мерсона является одношаговым – он никак не использует информацию о решении, полученном на предыдущих шагах интегрирования. Многошаговые методы используют такую информацию и поэтому требуют меньшего количества вычислений правых частей уравнений на каждом шаге по времени для достижения той же точности. Однако использование решения, полученного на нескольких предыдущих шагах, не позволяет начать интегрирование сразу таким методом. Первые несколько шагов приходится делать каким-либо другим способом. Разумным компромиссом является метод, учитывающий информацию лишь с одного

предыдущего шага. Но, конечно, порядок точности такого метода будет не очень высок.

Расчетные формулы обсуждаемого метода для одного уравнения таковы:

$$y_{i+1}^c = y_i + \frac{1}{2} h_i \left(f(x_i, y_i) + f(x_i + h_i, y_{i+1}^p) \right), \quad (2.7)$$

где

$$y_{i+1}^p = ay_i + by_{i-1} + cf(x_i, y_i), \quad (2.8)$$

$$a = 1 - \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} \right)^2, \quad b = \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} \right)^2, \quad c = h_i + \frac{h_i^2}{h_{i-1}}. \quad (2.9)$$

Вычисление y_{i+1}^p принято называть прогнозом, а вычисление y_{i+1}^c — коррекцией. И то и другое являются приближениями к правильному решению на $(i+1)$ -м шаге, причем, как можно показать, если шаг достаточно мелкий, то y_{i+1}^p и y_{i+1}^c приближают точное решение с двух разных сторон. Это означает, что их разность

$$\varepsilon_i = y_{i+1}^c - y_{i+1}^p \quad (2.10)$$

является мерой погрешности.

Хеминг [1] предложил использовать эту разность не только для оценки погрешности, но и для уточнения результата. На основании этой идеи можно получить следующую формулу для более точного приближения к истинному значению неизвестной функции на $(i+1)$ -м шаге:

$$y_{i+1} = y_{i+1}^c + d(y_{i+1}^p - y_{i+1}^c), \quad (2.11)$$

где

$$d = \frac{1}{3 + 2(h_{i-1}/h_i)^3}. \quad (2.12)$$

Современные руководства не рекомендуют применять этот прием из опасений потери устойчивости алгоритма. Однако наш опыт показывает, что в задачах, в которых выбор шага определяется в первую очередь соображениями точности, а не устойчивости, описываемый метод эффективен.

При практических вычислениях для выбора шага можно пользоваться тем же алгоритмом, что описан в параграфе 2.1, но, поскольку приведенный выше вариант метода *предиктор-корректор* имеет 4-й порядок точности, формулу (2.5) следует заменить на следующую:

$$h_{i+1} = h_i \left| \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_i} \right|^{1/4} \quad (2.13)$$

Приведем алгоритм интегрирования при использовании метода *предиктор-корректор*.

1. Задаем начальные значения x, y и h : x_0, y_0, h_0 .
2. Определяем y_1 каким-либо иным методом, например с помощью разложения в ряд Тейлора около точки x_0 , с удержанием достаточного числа членов ряда, или сделав несколько мелких шагов методом Эйлера или методом Рунге-Кутты.
3. Выбираем h_1 .
4. Вычисляем $f(x_1, y_1)$.
5. Вычисляем коэффициенты a, b, c по формуле (2.9).
6. Находим y_2^p по формуле (2.8).
7. Вычисляем $f(x_1 + h_1, y_2^p)$.
8. Находим y_2^c по формуле (2.7).
9. Вычисляем погрешность ε по формуле (2.10).
10. Если погрешность удовлетворяет условиям, описанным в параграфе 2.1, то считаем шаг удачным и вычисляем y_2 по формуле (2.11).
11. По формуле (2.13) вычисляем величину следующего шага.
12. Повторяем пункты 4—11.

13. Если погрешность велика, то вычисления на данном шаге нужно провести заново, заменив h на результат вычисления по формуле (2.13).

Переход от одного уравнения к системе уравнений осуществляется так же, как в параграфе 2.1.

Приведенные формулы метода заметно упрощаются при интегрировании с постоянным шагом:

$$y_{i+1}^c = y_i + \frac{1}{2}h(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_{i+1}^p)), \quad (2.14)$$

где

$$y_{i+1}^p = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i), \quad (2.15)$$

$$y_{i+1} = y_{i+1}^c + \frac{1}{5}(y_{i+1}^p - y_{i+1}^c). \quad (2.16)$$

До тех пор, пока из соображений точности можно не менять шаг, есть смысл пользоваться упрощенными формулами (2.14)-(2.16).

Метод *предиктор-корректор* мы рекомендуем использовать в тех случаях, когда вычисление правых частей уравнений $f(x, y)$ очень трудоемко (именно такая ситуация имеет место при решении разностных уравнений гидродинамики), но простейший метод Эйлера не дает нужной точности при приемлемой величине шага интегрирования. При сравнительно простых правых частях и повышенных требованиях точности (например, при решении краевых задач теории устойчивости (см. главу 4)) лучше использовать метод Рунге-Кутты в модификации Мерсона или Фельдберга.

2.4 Метод рядов Тейлора

Все рассмотренные выше методы численного интегрирования дифференциальных уравнений в конечном счете основываются на том, что с помощью тех или иных ухищрений строится фактически отрезок ряда Тейлора разложения функции. Естественно, что в принципе воз-

можно и непосредственное вычисление коэффициентов ряда Тейлора. Пусть есть дифференциальное уравнение

$$y'(x) = f(x, y), \quad (2.17)$$

причем в некоторой точке x_i нам уже известно решение y_i . Требуется найти значение неизвестной функции y в точке $x_i + h$:

$$y_{i+1} = y(x_i + h). \quad (2.18)$$

Используя ряд Тейлора для функции y около точки x_i , мы можем записать

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{1}{2} y_i'' h^2 + \dots + \frac{1}{n!} y_i^{(n)} h^n + \dots, \quad (2.19)$$

где $y_i^{(n)}$ - n -я производная функции, вычисленная в точке x_i .

Если бы были известны все производные функции y в точке x_i и если h меньше радиуса сходимости ряда Тейлора, то мы могли бы с любой нужной нам точностью найти y_{i+1} , удерживая в разложении Тейлора подходящее число слагаемых. Эти производные можно найти с помощью основного дифференциального уравнения (9.1). Подставляя в правую и левую части x_i , мы видим, что

$$y_i' = f(x_i, y_i). \quad (2.20)$$

Если прервать разложение в ряд Тейлора уже на слагаемом первого порядка, то получим классический метод Эйлера:

$$y_{i+1} \approx y_i + y_i' h. \quad (2.21)$$

Как правило, точность такого приближения недостаточна, и именно поэтому нужны более сложные методы.

Если продифференцируем основное уравнение по x , а потом уже положить $x = x_i$, то получим

$$y_i'' = f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) y_i', \quad (2.22)$$

где нижний буквенный индекс обозначает дифференцирование по соответствующей переменной. Аналогично может быть вычислено y_i'''' :

$$y_i'''' = f_{xx}(x, y_i) + 2f_{xy}(x, y_i)y_i' + f_{yy}(x, y_i)y_i'^2 + f_y(x, y_i)y_i'' \quad (2.23)$$

Если известен аналитический вид функции f , то таким способом можно найти любое число коэффициентов ряда Тейлора. Однако сложность формул для определения $y_i^{(n)}$ быстро возрастает с увеличением n , и потому метод рядов Тейлора, или, как его еще часто называют, метод аналитического продолжения в учебных руководствах по численным методам, как правило, не рекомендуется для применения, хотя, например, в книге [5] говорится, что, возможно, в будущем, с развитием методов аналитических вычислений на ЭВМ, этот метод найдет более широкое применение.

С момента написания упомянутой книги [5] прошло более 20 лет, популярные пакеты типа Maple и Mathematica общедоступны, и теперь вычисление $y_i^{(n)}$ любого порядка технических трудностей не представляет. Для уравнений общего вида получающиеся при этом вычислении выражения для старших производных громоздки и их нахождение требует большого количества арифметических операций, так что использование метода аналитического продолжения при больших n становится неэкономичным. Однако для некоторых специальных классов дифференциальных уравнений старшие производные выписываются достаточно просто и метод аналитического продолжения становится весьма эффективным. Одним из таких, часто встречающихся классов являются линейные уравнения с переменными коэффициентами. В частности, именно с такими уравнениями приходится иметь дело при анализе задач теории гидродинамической устойчивости.

Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$y' = A(x)y \quad (2.24)$$

Если это – скалярное уравнение, то оно, конечно, мгновенно решается методом разделения переменных, так что мы будем сразу иметь в виду многомерный случай, когда y – N -мерный вектор, а A

– квадратная матрица $N \times N$. Дифференцируя уравнение (9.8) по x , получаем последовательно

$$y_i'' = A'y_i + Ay_i', \quad (2.25)$$

$$y_i'''' = A''y_i + 2A'y_i' + Ay_i'', \quad (2.26)$$

$$y_i^{(n+1)} = \sum_{j=0}^n C_n^j A^{(j)} y_i^{(n-j)}, \quad (2.27)$$

где C_n^j – биномиальные коэффициенты, известные из элементарной алгебры:

$$C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (2.28)$$

Формулы достаточно просты и легко могут быть запрограммированы.

При практическом применении описанного метода удобно чуть-чуть изменить нормировку входящих величин. Дело в том, что при больших n некоторые из биномиальных коэффициентов становятся очень большими из-за $n!$ в числителе. Однако этот рост компенсируется значением $n!$, которое стоит в знаменателе в формуле Тейлора. Поэтому, чтобы не иметь дело с большими числами, лучше заранее сократить на $n!$. Для этого введем обозначение

$$K_i^{(n)} = \frac{1}{n!} y_i^{(n)}$$

Тогда расчетные формулы метода переписутся следующим образом:

$$y_{i-1} = y_i + K_i^{(1)} h + K_i^{(2)} h^2 + \dots + K_i^{(n)} h^n + \dots, \quad (2.29)$$

где

$$K_i^{(1)} = y_i', \quad K_i^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} A^{(j)} K_i^{(n-j)}. \quad (2.30)$$

Простота вычисления старших производных позволяет производить вычисления с удержанием большого количества членов ряда Тейлора, значит, с достаточно крупным шагом. Фактически при этом величина шага ограничивается лишь по соображениям устойчивости метода, а не точности, а также радиусом сходимости ряда Тейлора. Иногда удается даже, вычисляя достаточное количество производных, свести всю задачу к использованию лишь одного шага. Практически, как правило, приходится идти на некоторый компромисс, выбирая в каком-то смысле оптимальные величину шага и число удержанных членов разложения. Наличие двух свободных параметров (h и n), возможность легкого их изменения в процессе интегрирования делает метод очень гибким, и конкретный выбор h и n в значительной мере является делом вкуса. Напомним лишь, что грубую оценку точности, получаемой при обрывании ряда Тейлора, можно получить, используя величину последнего учтенного слагаемого.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Для вычислений определенных интегралов обычно используют формулы Симпсона. Они легко программируются, обеспечивают вполне приемлемую точность. Основным их недостатком является дробление интервала интегрирования на участки равного размера. Поэтому при определении интеграла сложно меняющейся функции на разных участках вычисления выполняются с разной точностью. Обычная процедура уточнения значения интеграла весьма примитивна. В книге [4] обсуждается адаптивный алгоритм, приводятся программы на языке Фортран-4 для этого и других методов (будьте осторожны, в программах имеются ошибки!).

В практике часто возможны ситуации, когда наряду с интегрированием систем дифференциальных уравнений необходимо вычисление интегралов от найденных функций. Для примера можно привести случай разложения краевой задачи по малому параметру. При этом в старших порядках разложения может появиться условие разрешимости, которое при этом обычно имеет вид некоторого интеграла. Тогда удобно совместить процедуры интегрирования и вычисления квадратур.

В связи с этим рассмотрим прием, который позволяет вычислять интегралы с контролем точности. Он заключается в сведении процедуры квадратуры к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения (кстати, иногда этот прием называют методом лентя – лень использовать адаптивный алгоритм вычисления квадратур).

Суть приема весьма проста. Пусть необходимо вычислить интеграл некоторой функции $f(x)$:

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.1)$$

Введем вместо (3.1) интеграл с переменным верхним пределом $y = \int_a^x f(x) dx$, так что $y(a) = 0$, а $y(b) = I$. Если функцию y продифференцировать по верхнему пределу, то ее определение сводится к решению задачи Коши:

$$y' = f(x); \quad y(a) = 0. \quad (3.2)$$

Задачу Коши можно решить с помощью любого описанного выше метода. Значение функции при $x = b$ даст искомое значение интеграла I . Таким образом, можно достаточно "экономно" вычислять интегралы. Если же встретится уже упоминавшаяся ситуация (одновременное интегрирование и вычисление квадратуры), то необходимо просто к соответствующему дифференциальному уравнению или системе уравнений добавить уравнение (3.2).

4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Численное исследование линейной устойчивости равновесия и течений жидкости приводит к краевым задачам. Существует несколько удобных методов их решения. Можно указать на прямые методы, например, на группу методов Галеркина. В разных случаях оказывается удобным пользоваться разными методами. Ниже мы рассмотрим методы сведения краевой задачи к задаче Коши и дадим необходимые рекомендации по их использованию. Изложение будем вести не в общей форме, а на конкретном примере. Там, где потребуется, приведем и более общие выкладки. Для определенности выберем известное конвективное течение в подогреваемом сбоку плоском вертикальном слое. Будем пользоваться сразу безразмерными величинами.

Итак, несжимаемая жидкость находится в вертикальном слое, ограниченном параллельными плоскостями $x = \pm 1$ (рис. 2). Границы слоя имеют бесконечную теплопроводность и поддерживаются при разных температурах $T = \mp Gr$ (Gr - число Грасгофа). В этих условиях равновесие жидкости невозможно и в слое возникает течение, состоящее из двух встречных потоков. Профили скорости описываются кубическим полиномом от поперечной координаты, температурный профиль имеет теплопроводный характер:

$$v_0 = \frac{Gr}{6}(x^3 - x), \quad T_0 = -Gr x. \quad (4.1)$$

Для анализа линейной устойчивости течения (4.1) относительно малых нормальных возмущений необходимо решить краевую задачу:

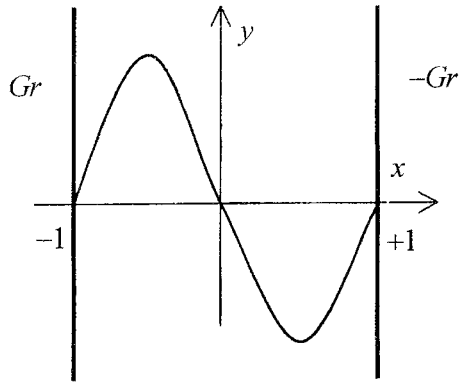


Рис. 2

$$\begin{aligned}
 -\lambda \Delta \varphi + ik v_0 \Delta \varphi - ik v_0'' \varphi &= \Delta \Delta \varphi - \mathcal{G}', \\
 -\lambda \mathcal{G} + ik v_0 \mathcal{G} - ik Gr \varphi &= \frac{1}{Pr} \Delta \mathcal{G}, \\
 \Delta &= \frac{d^2}{dx^2} - k^2, \\
 x = \pm 1: \quad \varphi = \varphi' = \mathcal{G} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по поперечной координате, φ , \mathcal{G} - амплитуды нормальных возмущений функции тока и температуры соответственно, k - волновое число, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ - декремент, Pr - число Прандтля. Декремент возмущений в общем случае зависит от параметров задачи: волнового числа, чисел Прандтля и Грасгофа. Устойчивость течения хорошо изучена [6], и мы не будем касаться физических аспектов проблемы.

При численном решении задачи (4.2) возникает немало проблем. Основная трудность обусловлена тем, что задача (4.2) является краевой, она содержит граничные условия. Специфика граничных ус-

ловий - они двухточечно разделенные. Половина необходимых условий задана на одной границе слоя, а половина - на другой границе. Это почти общее положение. В других случаях граничные условия делятся на группы и делятся по-разному. Ниже мы покажем, как систему дифференциальных уравнений шестого порядка свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Однако для решения задачи Коши, например методом Мерсона, необходимо, чтобы все, подчеркнем, все граничные условия были известны в одной точке интервала интегрирования.

Как же решать краевые задачи типа (4.2)? Существует несколько отработанных методик. Рассмотрим метод построения фундаментальной системы решений и метод дифференциальной прогонки.

4.1. Метод численного построения фундаментальной системы решений

Прежде всего, опишем процедуру понижения порядка уравнений. Введем унифицированные обозначения. Пусть

$$\begin{aligned}
 y_1 = \varphi, \quad y_2 = \varphi', \quad y_3 = \varphi'', \\
 y_4 = \varphi''', \quad y_5 = \mathcal{G}, \quad y_6 = \mathcal{G}'.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Введенные функции y_i образуют вектор \vec{y} в шестимерном пространстве решений; будем пользоваться этим удобным представлением и далее. Теперь естественно записать, что $y_1' = y_2$; $y_2' = y_3$; $y_3' = y_4$; $y_4' = y_5$; $y_5' = y_6$. Выражения для y_4' и y_6' возьмем из краевой задачи. Тогда окончательно получаем вместо (4.2) систему уравнений первого порядка с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad y_3' = y_4, \\
 y_4' = y_5, \quad y_5' = X y_3 + Y y_1, \quad y_6' = Z y_5 + Q y_1,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$x = \pm 1: \quad y_1 = y_2 = y_5 = 0.$$

Коэффициенты X , Y , Z , Q содержат комбинации собственных чисел и параметров задачи:

$$X = -\lambda + ik v_0 + 2k^2, \quad Y = \lambda k^2 - ik^3 v_0 - ik v_0'' - k^4,$$

$$Z = \text{Pr}(-\lambda + ik v_0) + k^2, \quad Q = -ik \text{PrGr}.$$

Сущность рассматриваемого метода заключается в том, что фундаментальное решение задачи (4.4) ищется в виде суперпозиции трех независимых частных решений. Смысл этих действий в следующем. Система уравнений (4.4) имеет в общем случае бесконечное множество решений. Требование выполнения условий на одной из границ вырезает в пространстве решений подпространство меньшей размерности (вдвое меньше в нашем случае). Условия на второй границе определяют вектор решений \bar{y} в этом подпространстве. Для построения подпространства можем воспользоваться базисными векторами. Ими являются три (подчеркнем, что три -- в данном случае) частных решения, которые могут быть получены из системы (4.4) с использованием трех линейно независимых вариантов полного набора условий на одной из границ. Эти варианты могут быть любыми, важна лишь их линейная независимость. Удобно воспользоваться ортогональным базисом.

Выберем три варианта полных граничных условий при $x = -1$:

$$\bar{y}^{(1)}(-1) = (0, 0, 1, 0, 0, 0),$$

$$\bar{y}^{(2)}(-1) = (0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$\bar{y}^{(3)}(-1) = (0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Видно, что три вектора являются линейно независимыми. Они ортогональны; их скалярное произведение равно нулю. Если теперь проинтегрировать систему (4.4) три раза с данными граничными условиями, то получим три частных решения $\bar{y}^{(1)}(x)$, $\bar{y}^{(2)}(x)$, $\bar{y}^{(3)}(x)$, в том числе и при $x = +1$. Номер частного решения задается верхним индексом. Множество решений системы, удовлетворяющих граничным условиям при $x = -1$ (искмое подпространство решений), комплектуется на основе этих частных решений:

$$\bar{y}(x) = a \bar{y}^{(1)}(x) + b \bar{y}^{(2)}(x) + c \bar{y}^{(3)}(x), \quad (4.5)$$

где a , b , c суть произвольные постоянные. Для получения решения краевой задачи необходимо потребовать, чтобы решение (4.5) подчинялось граничным условиям на правом конце интервала интегрирования:

$$y_1(1) = a y_1^{(1)}(1) + b y_1^{(2)}(1) + c y_1^{(3)}(1) = 0,$$

$$y_2(1) = a y_2^{(1)}(1) + b y_2^{(2)}(1) + c y_2^{(3)}(1) = 0, \quad (4.6)$$

$$y_5(1) = a y_5^{(1)}(1) + b y_5^{(2)}(1) + c y_5^{(3)}(1) = 0.$$

Здесь нижний индекс нумерует компоненты вектора решений. Совокупность данных условий необходимо рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных величин a , b , c . Если их удастся определить, то цель достигнута; решение краевой задачи найдено!

Система линейных уравнений (4.6) является однородной. Условием ее разрешимости является равенство нулю определителя матрицы коэффициентов при неизвестных a , b , c .

$$d = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(1) & y_1^{(2)}(1) & y_1^{(3)}(1) \\ y_2^{(1)}(1) & y_2^{(2)}(1) & y_2^{(3)}(1) \\ y_5^{(1)}(1) & y_5^{(2)}(1) & y_5^{(3)}(1) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.7)$$

Условие (4.7) выполняется не всегда. Дело в том, что краевая задача (4.2) является задачей на собственные значения. Ее решение существует, в общем случае, не при любых наборах величин λ_r , λ_s , k , Pr , Gr . Подбирая указанные величины, мы можем добиться равенства определителя нулю. Так и находятся численные характеристики устойчивости. Собственные значения краевой задачи найдены! Теперь можно поступить стандартно. Отбрасываем одно из уравнений в системе (4.6), например второе. Оставшиеся два уравнения образуют неоднородную систему, которая определяет любые две неизвестные из трех. Выразим a и c через b :

$$a = b \frac{y_1^{(3)}(1)y_5^{(2)}(1) - y_1^{(2)}(1)y_5^{(3)}(1)}{y_1^{(1)}(1)y_5^{(3)}(1) - y_1^{(3)}(1)y_5^{(1)}(1)},$$

$$c = b \frac{y_1^{(2)}(1)y_5^{(1)}(1) - y_1^{(1)}(1)y_5^{(2)}(1)}{y_1^{(1)}(1)y_5^{(3)}(1) - y_1^{(3)}(1)y_5^{(1)}(1)}.$$
(4.8)

Краевая задача линейная, поэтому решение может быть найдено с точностью до произвольного множителя. Величина b определяет условие нормировки; положим $b = 1$. Используя (4.8), можем вычислить согласно (4.5) недостающие условия на границе $x = 1$. Таким образом, на правой границе имеем полный набор условий для всех неизвестных функций:

$$\begin{aligned} y_1(1) &= 0, \\ y_2(1) &= 0, \\ y_3(1) &= a y_3^{(1)}(1) + b y_3^{(2)}(1) + c y_3^{(3)}(1), \\ y_4(1) &= a y_4^{(1)}(1) + b y_4^{(2)}(1) + c y_4^{(3)}(1), \\ y_5(1) &= 0, \\ y_6(1) &= a y_6^{(1)}(1) + b y_6^{(2)}(1) + c y_6^{(3)}(1). \end{aligned}$$
(4.9)

Теперь систему уравнений (4.4) с данными условиями можно проинтегрировать в обратном направлении, т.е. от $x = 1$ до $x = -1$. Собственные функции, описывающие вид возмущений, найдены, краевая задача решена полностью.

К сказанному выше необходимо сделать некоторые пояснения.

Гидродинамиками - "численниками" этот метод часто именуется методом пристрелки (стрельбы). Нам такое название метода представляется некорректным.

При развортывании уравнений краевой задачи в систему уравнений первого порядка в качестве y_3 выбрана вторая производная амплитуды функции тока (4.3). Рекомендуется вместо φ'' использовать комбинацию функций, имеющую смысл вихря скорости возмущений, т.е. положить $y_3 = \varphi'' - k^2\varphi$, а $y_4 = \varphi''' - k^2\varphi'$. С формальной точки зрения это, вроде бы, не принципиально. Тем не менее, такой выбор пред-

почтителен, потому что вихрь скорости является более "физической" характеристикой, это обеспечивает, как показывает практика, более надежную работу алгоритма.

Удобно частные решения определять одновременно. Для этого нужно составить объединенный вектор решений (с общей нумерацией) и интегрировать объединенную систему уравнений. В рассматриваемом случае система состоит из 18 уравнений. Этот прием будет очень полезен при ортогонализации векторов решений (см. п.4.2).

В нашем случае краевые условия разделены поровну: половина условий задана на левой, половина - на правой границе. В любом случае размерность подпространства решений определяется числом недостающих условий при $x = -1$; эта размерность определит и число соотношений (4.6).

В общем случае определитель (4.7) является комплексным. С формальной точки зрения собственными значениями краевой задачи являются вещественная и мнимая части декремента. Тем не менее мы вправе использовать в качестве собственных чисел любой из наборов: $k - \lambda_i$, $\text{Pr} - \lambda_i$, $\text{Gr} - \lambda_i$, что позволяет получать различные зависимости численных характеристик неустойчивости.

Поиск собственных значений, то есть решение уравнения (4.7), необходимо, безусловно, автоматизировать. При этом можно использовать один из методов, описанных в главе 1. Попытки "ручной" работы приведут к бессмысленным затратам времени.

Наконец, естественно, на первом этапе решения краевой задачи вовсе не обязательно интегрировать систему уравнений от левой границы слоя. Можно определять собственные значения задачи после интегрирования от $x = 1$, а собственные функции находить при интегрировании в сторону увеличения координаты.

В заключение опишем алгоритм метода. Будем использовать такие обозначения: n - общий порядок краевой задачи, m - количество граничных условий при $x = -1$, l - число условий при $x = 1$; $n = m + l$.

1. Представляем дифференциальные уравнения, входящие в краевую задачу, в виде системы n дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Инициализируем начальное приближение для собственных чисел краевой задачи, определяемся с остальными параметрами.

3. Задаем l вариантов независимых граничных условий при $x = -1$. Каждый вариант состоит из m условий.

4. Интегрируем соответствующие системы уравнений, определяя векторы частных решений $\bar{y}^{(k)}(x)$, $k = 1 \dots l$. Повторяем, что можно интегрировать объединенную систему. Ее размерность будет $m \cdot l$. При $x = 1$ запоминаем величины $\bar{y}^{(k)}(1)$.

5. Формируем систему алгебраических уравнений типа (4.6). Вычисляем величину определителя (4.7).

6. Используя какой-либо вариант метода секущих, получаем очередное приближение для собственных значений. Если собственные значения не определены с необходимой абсолютной (относительной) погрешностью, то переходим к шагу 3.

7. В противном случае идем с результатами к научному руководителю.

8. Далее приступаем к определению собственных функций. Полагаем равной единице значение одной из l неизвестных функций при $x = 1$.

9. Вычисляем $l-1$ неизвестных a, b, c, \dots

10. С помощью (4.9) формируем n граничных условий при $x = 1$.

11. Используя полный набор граничных условий, интегрируем от $x = 1$ до $x = -1$ систему n дифференциальных уравнений первого порядка. Получаем собственные функции.

4.2 Метод ортогонализации

Посмотрим еще раз на задачу (4.2). Разрешим уравнения относительно старших производных. Мы получим уравнения, которые схематически запишем так:

$$\begin{aligned}\varphi'' &= f(x, \varphi', \varphi'', \varphi''', \vartheta, \vartheta', \lambda, k, Gr, Pr), \\ \vartheta'' &= w(x, \varphi', \varphi'', \varphi''', \vartheta, \vartheta', \lambda, k, Gr, Pr).\end{aligned}\quad (4.10)$$

Правые части содержат комбинации неизвестных функций, их производных, параметров задачи.

При исследовании устойчивости конвективного течения можем попасть в такую область, когда численные характеристики неустойчивости будут весьма велики. Такая ситуация встречается достаточно часто, например, для вязких жидкостей характерны большие числа Прандтля; для плоского течения Пуазейля велико минимальное критическое число Рейнольдса. Эти примеры можно продолжать и продолжать. В этом случае в уравнениях (4.10) правые части окажутся большими. В литературе такие уравнения называют уравнениями с малым параметром при старшей производной.

Локально, при небольшом изменении переменной интегрирования, эти уравнения допускают экспоненциальные решения с соответственно большим показателем. Это приводит к тому, что погрешности численного счета, связанные с погрешностью алгоритмов и с ограниченностью разрядной сетки, очень быстро нарастают. Можно привести следующий пример. Попытка решения краевой задачи для плоского течения Пуазейля по методике п.4.1, моментально приводит к краху, на первом же шаге интегрирования наступает машинное переполнение.

Такое поведение алгоритма означает следующее. Частные решения перестают быть независимыми и не могут быть использованы для построения необходимого подпространства решений. На векторном языке данное обстоятельство можно сформулировать так: векторы частных решений в процессе интегрирования системы меняются как по величине, так и по направлению. Один из векторов нарастает. Ос-

тальные, будучи по первоначальному построению ортогональными ему и друг другу, при продвижении по координате "подтягиваются" к нему (рис. 3).

Отсюда ясно, как можно преодолеть подобные трудности. Необходимо в процессе интегрирования восстанавливать ортогональность базисных векторов решений. Частота ортогонализации решений определяется опытным путем. Если характерные величины параметров неустойчивости достаточно велики, процедуру ортогонализации придется выполнять после каждого шага интегрирования.

Восстановление независимости векторов частных решений можно выполнять по-разному. Одним из способов является ортогонализация по Грама-Шмидту [7]. Метод применим к любому базису евклидова

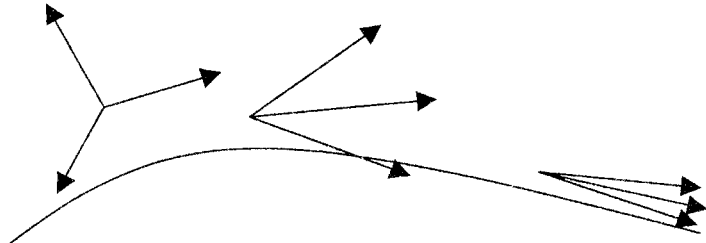


Рис. 3

лидова векторного пространства. Пусть на некотором этапе получены l векторов частных решений $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_l$. Из этого базиса последовательно получают новые векторы:

$$\bar{z}_1 = \bar{y}_1; \quad \bar{z}_k = \bar{y}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\bar{y}_k, \bar{z}_i)}{(\bar{z}_i, \bar{z}_i)} \bar{z}_i; \quad k = 2, 3, \dots, l \quad (4.11)$$

Выражения типа (\bar{y}_k, \bar{z}_i) имеют смысл скалярного произведения векторов. В данном случае скалярные произведения вычисляются с использованием всех компонент векторов решений. Векторы \bar{z}_k образуют ортогональный базис. Предотвратить рост решений можно, нормируя полученный базис:

$$\bar{y}_k = \frac{\bar{z}_k}{|\bar{z}_k|}. \quad (4.12)$$

Процедура предполагает ортогонализацию векторов решений относительно вектора с первым порядковым номером. Можно достигнуть лучшего результата, если сначала определить, какой из частных векторов вырос более всего (сравнивая, например, модули векторов). Он станет исходным для процедуры (4.11)-(4.12). В этом случае немного сложнее становится кодирование алгоритма, но эффект, повторяем, сильнее.

Из-за погрешностей численного счета метод Грама-Шмидта не позволяет выполнить строгую ортогонализацию. Кроме того, чрезвычайно осложняется определение собственных функций краевой задачи. Существует еще один способ восстановления независимости частных решений. В практике конвективных исследований этот способ впервые применили Р.В.Бирих и Р.Н.Рудаков [8].

Вернемся к задаче, рассмотренной в п.4.1. Пусть после некоторого шага интегрирования системы (4.4) мы получили три частных решения: $\bar{y}^{(1)}$, $\bar{y}^{(2)}$ и $\bar{y}^{(3)}$. Составим три линейных комбинации этих частных решений:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i^{(1)} &= a_{11}y_i^{(1)} + a_{12}y_i^{(2)} + a_{13}y_i^{(3)}, \\ \tilde{y}_i^{(2)} &= a_{21}y_i^{(1)} + a_{22}y_i^{(2)} + a_{23}y_i^{(3)}, \\ \tilde{y}_i^{(3)} &= a_{31}y_i^{(1)} + a_{32}y_i^{(2)} + a_{33}y_i^{(3)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Здесь нижний индекс нумерует компоненты векторов. Потребуем, чтобы компоненты с номерами 3, 4, 6 (в содержательных обозначениях φ'' , φ''' , ϑ') были бы такими же, как и в начале интервала интегрирования, т.е. при $x = -1$:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_3^{(1)} &= 1, & \tilde{y}_4^{(1)} &= 0, & \tilde{y}_6^{(1)} &= 0, \\ \tilde{y}_3^{(2)} &= 0, & \tilde{y}_4^{(2)} &= 1, & \tilde{y}_6^{(2)} &= 0, \\ \tilde{y}_3^{(3)} &= 0, & \tilde{y}_4^{(3)} &= 0, & \tilde{y}_6^{(3)} &= 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Таким образом, получаем систему 9 линейных уравнений для 9 величин a_k . Вычисленные коэффициенты можно использовать для определения остальных компонент векторов $\vec{y}^{(1)}$, $\vec{y}^{(2)}$, $\vec{y}^{(3)}$. Векторы $\vec{y}^{(k)}$ принимаются в качестве начальных условий для следующего шага интегрирования. Процедура ортогонализации выполняется в некоторых точках интервала интегрирования. Если параметры при старших производных в системе (4.10) достаточно малы, то ортогонализацию векторов придется выполнять после каждого шага интегрирования.

Обратите внимание на то, что в данном варианте ортогонализуются только "хвостики" векторов решений.

4.3 Дифференциальная прогонка

Мы выяснили, что при больших правых частях в (4.10) численный анализ краевой задачи с помощью построения фундаментальной системы решений (п.4.1) неустойчив. Для преодоления неустойчивости приходится выполнять ортогонализацию векторов. Существует альтернативный способ. Он имеет название дифференциальной прогонки. Был впервые применен для задач гидродинамической устойчивости В.А.Сапожниковым [9]. Подробное описание метода приведено в [10]. Он может быть сформулирован как в линейном, так и в нелинейном варианте. В нелинейном варианте экспоненциальные решения не проходят, поэтому метод пригоден для анализа краевых задач с малыми параметрами при старших производных. Идея метода следующая. Если в методе п.4.1 базисные вектора использовались для формирования необходимого пространства решений, то в методе дифференциальной прогонки определяется и решается уравнение искомого подпространства.

Продемонстрируем метод дифференциальной прогонки на примере конвективного течения в вертикальном слое. Введем вектор решений \vec{y} , определив его компоненты так:

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi, & y_2 &= \varphi', & y_3 &= \vartheta, \\ y_4 &= \varphi'' - k^2 \varphi, & y_5 &= \varphi''' - k^2 \varphi', & y_6 &= \vartheta' \end{aligned} \quad (4.15)$$

Тогда краевая задача для линейной устойчивости течения примет вид

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_2' &= y_4 + k^2 y_1, & y_3' &= y_6, \\ y_4' &= y_5, & y_5' &= X y_4 + Y y_1 + y_6, & y_6' &= Z y_3 + Q y_1, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$x = \pm 1: \quad y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

$$X = -\lambda + ikv_0 + k^2; \quad Y = -ikv_0'';$$

$$Z = \text{Pr}(-\lambda + ikv_0) + k^2; \quad Q = -ik\text{PrGr}$$

Образум из \vec{y} два вектора: \vec{V} и \vec{W} . В вектор \vec{V} включим те компоненты вектора решений, для которых известны условия на левой границе слоя, то есть при $x = -1$. Вектор \vec{W} составим из оставшихся компонент:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{W} = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Тогда краевая задача (4.16) может быть записана в матрично-векторной форме:

$$\vec{V}' = K \vec{V} + M \vec{W},$$

$$\vec{W}' = E \vec{V} + L \vec{W}, \quad (4.18)$$

$$\vec{V}(\pm 1) = 0,$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ Q & 0 & Z \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ X & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнением подпространства решений, удовлетворяющих условиям на левой границе, является связь

$$\vec{V}(x) = A(x)\vec{W}(x), \quad (4.19)$$

которую, следуя [10], будем называть прогоночным соотношением. Матрица A называется прогоночной матрицей. Связь (4.19) существует не только на границе, но и в любой точке интервала интегрирования. Если нам удастся сформулировать уравнение для прогоночной матрицы и решить его, то мы сможем определить связь между различными компонентами вектора решений в любой точке участка интегрирования, что позволит получить решение краевой задачи. Выведем уравнение для прогоночной матрицы, приведя для наглядности все выкладки.

Сначала продифференцируем по координате x прогоночное соотношение:

$$\vec{V}' = A'\vec{W} + A\vec{W}'. \quad (4.20)$$

Подставим в (4.20) выражения для производных \vec{V}' и \vec{W}' их выражения из матричной записи задачи (4.18):

$$K\vec{V} + M\vec{W} = A'\vec{W} + A(E\vec{V} + L\vec{W}). \quad (4.21)$$

Для вектора \vec{V} используем прогоночное соотношение (4.19)

$$K A\vec{W} + M\vec{W} = A'\vec{W} + A E A\vec{W} + A L\vec{W}. \quad (4.22)$$

Это соотношение должно выполняться при любом значении поперечной координаты, то есть для произвольного вектора \vec{W} (из возможных). Тогда имеем уравнение для прогоночной матрицы:

$$A' = K A + M - A E A - A L. \quad (4.23)$$

Уравнение получено. Для его решения необходимы начальные условия. Вспомним, что прогоночная связь (4.19) существует при любом значении координаты, в том числе и на левой границе, а следовательно $V(-1) = A(-1)W(-1) = 0$. На границе вектор W достаточно

произволен, хотя бы потому, что краевая задача линейна. Отсюда получаем условие:

$$A(-1) = 0. \quad (4.24)$$

Для иллюстрации запишем задачу (4.23)-(4.24) в виде системы дифференциальных уравнений для элементов прогоночной матрицы. Подставив выражения для матриц K , M , E , L и выполнив необходимые умножения, получаем

$$\begin{aligned} a'_{11} &= -(Y a_{12} + Q a_{13}) a_{11} - (Z a_{13}) a_{31} - X a_{12} + a_{21}, \\ a'_{12} &= -(Y a_{12} + Q a_{13}) a_{12} - (Z a_{13}) a_{32} - a_{11} + a_{22}, \\ a'_{13} &= -(Y a_{12} + Q a_{13}) a_{13} - (Z a_{13}) a_{33} - a_{12} + a_{23}, \\ a'_{21} &= -(Y a_{22} + Q a_{23}) a_{11} - (Z a_{23}) a_{31} - X a_{22} + k^2 a_{11} + 1, \\ a'_{22} &= -(Y a_{22} + Q a_{23}) a_{12} - (Z a_{23}) a_{32} - a_{21} + k^2 a_{12}, \\ a'_{23} &= -(Y a_{22} + Q a_{23}) a_{13} - (Z a_{23}) a_{33} - a_{22} + k^2 a_{13}, \\ a'_{31} &= -(Y a_{32} + Q a_{33}) a_{11} - (Z a_{33}) a_{31} - X a_{32}, \\ a'_{32} &= -(Y a_{32} + Q a_{33}) a_{12} - (Z a_{33}) a_{32} - a_{31}, \\ a'_{33} &= -(Y a_{32} + Q a_{33}) a_{13} - (Z a_{33}) a_{33} - a_{32} + 1, \\ x = -1: \quad a_{ik} &= 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Решив задачу (4.25), мы получим значения элементов прогоночной матрицы везде, в том числе и на границе $x = 1$. Таким образом, на правой границе нам стала известна связь между векторами \vec{V} и \vec{W} . Запишем ее и потребуем выполнения граничных условий:

$$\begin{aligned} y_1(1) &= a_{11}(1)y_4(1) + a_{12}(1)y_5(1) + a_{13}(1)y_6(1) = 0, \\ y_2(1) &= a_{21}(1)y_4(1) + a_{22}(1)y_5(1) + a_{23}(1)y_6(1) = 0, \\ y_3(1) &= a_{31}(1)y_4(1) + a_{32}(1)y_5(1) + a_{33}(1)y_6(1) = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Получена линейная система уравнений для неизвестных, которыми являются компоненты $y_4(1)$, $y_5(1)$, $y_6(1)$. Система уравнений однородна, условием ее разрешимости является равенство нулю определителя матрицы коэффициентов

$$d = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.27)$$

Как и в п.4.1, уравнение (4.27) является характеристическим соотношением. При произвольном наборе параметров задачи определитель отличен от нуля, так как по смыслу задачи на собственные значения она в этом случае не может быть решена. Подбирая собственные значения, мы можем добиться выполнения условия (4.27). Подбор собственных значений, конечно, разумно автоматизировать.

Интегрирование системы (4.25) и выполнение требования (4.27) составляет содержание прямой прогонки (по терминологии [10]). Собственные функции определяются при обратной прогонке. Если собственные значения найдены, определитель прогоночной матрицы достаточно мал. Тогда в системе уравнений (4.26) одно из уравнений является лишним, а остальные уравнения позволят выразить два недостающих граничных условия через третье. Отказываясь, например, от второго уравнения, получим

$$\begin{aligned} y_5(1) &= y_4(1) \frac{a_{13}(1)a_{31}(1) - a_{11}(1)a_{33}(1)}{a_{12}(1)a_{33}(1) - a_{13}(1)a_{32}(1)}, \\ y_6(1) &= y_4(1) \frac{a_{11}(1)a_{32}(1) - a_{12}(1)a_{31}(1)}{a_{12}(1)a_{33}(1) - a_{13}(1)a_{32}(1)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Краевая задача линейна, поэтому величина $y_4(1)$ может быть выбрана любой; можно положить $y_4(1) = 1$.

Итак, на правой границе слоя известны все необходимые условия. Казалось бы, теперь для определения собственных функций можно интегрировать (обратная прогонка) полную систему уравнений (4.16). Если характерные величины параметров задачи невелики, то естественнее и проще всего так и поступать. В противном случае, когда в краевой задаче явно присутствуют малые параметры при старших производных, делать этого нельзя ни в коем случае.

Поступаем следующим образом. После определения собственных значений необходимо еще раз проинтегрировать систему уравне-

ний от $x = -1$ до $x = 1$ и запомнить значения элементов прогоночной матрицы в промежуточных точках. После определения граничных условий (4.28) интегрируем второе уравнение из системы (4.18) (четвертое, пятое и шестое уравнение в (4.16)) с использованием прогоночного соотношения, то есть уравнения $W' = EAW + LW$, или по компонентам:

$$\begin{aligned} y_4' &= y_5, \\ y_5' &= Xy_4 + Y(a_{11}y_4 + a_{12}y_5 + a_{13}y_6) + y_6, \\ y_6' &= Z(a_{31}y_4 + a_{32}y_5 + a_{33}y_6) + \\ &+ Q(a_{11}y_4 + a_{12}y_5 + a_{13}y_6) + y_6. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Несмотря на то, что эта система является линейной, использование запомненных значений элементов прогоночной матрицы удерживает алгоритм от быстрого и неуправляемого роста погрешностей. Это и понятно, в течение обратной прогонки мы все время находимся в нужном подпространстве решений, не выходя из него. Теперь понятно, что неизбежно приведут к краху (проверено!) попытки обмануть природу, и в ходе обратной прогонки вычислять прогоночную матрицу, интегрируя уравнение для нее, одновременно с интегрированием системы (4.29).

К сожалению, "восстановление" элементов прогоночной матрицы в промежуточных точках понижает точность метода. Действительно, элементы прогоночной матрицы при прямом интегрировании мы запомнили в дискретном числе точек. Алгоритмы Рунге-Кутты требуют вычислений в добавочных точках. Значения элементов прогоночной матрицы между узлами придется определять с помощью интерполяции, которая внесет дополнительную погрешность. Борьба с этим можно, только запомнив матрицу в узлах более мелкой сетки.

Выбор левой границы для выполнения прямой прогонки не принципиален. Все сказанное выше остается в силе, определять собственные значения мы будем при интегрировании от $x = 1$, а собственные функции — от $x = -1$.

В заключение отметим, что метод дифференциальной прогонки более трудоемок, чем метод построения фундаментальной системы

решений, так как требует дополнительных преобразования с целью получения уравнения для прогоночной матрицы.

4.4. Стыковка в промежуточной точке

При решении краевых задач с малым параметром при старших производных имеются проблемы, от которых не удастся избавиться даже применением процедуры ортогонализации или нелинейного варианта дифференциальной прогонки. Пусть, для определенности, находятся декременты возмущений. В качестве собственных чисел можно выбрать и другие параметры, сущность ситуации от этого не меняется. Декременты определяются как корни комплексного характеристического уравнения (4.7) или (4.27). Оказывается, что в этом случае (малый параметр при старших производных) вещественная и мнимая части характеристического определителя являются сложной функцией декрементов (за деталями отсылаем читателя к работе [10]). Если для поиска корней применять какой-нибудь итерационный метод (см. гл.1), то область сходимости окажется очень небольшой. Тогда необходимо знать с хорошей точностью начальное приближение для корня (задача не из простых), иначе велика вероятность того, что начальное приближение окажется вне области притяжения корня, и метод "зациклится".

Существует решение проблемы. Таким решением является использование стыковки в промежуточной точке. Подчеркнем, что идея стыковки базируется на весьма общих особенностях поведения собственных функций краевой задачи. Представления о том, что стыковка является вариантом метода дифференциальной прогонки, ошибочны. Процедуру стыковки можно успешно применять и в том случае, когда для решения краевой задачи используется метод построения фундаментальной системы решений с ортогонализацией векторов. Ниже, для определенности, рассмотрим технологию выполнения стыковки на примере дифференциальной прогонки.

Представим, что выполняется прямая прогонка. Выполним интегрирование системы уравнений для прогоночной матрицы от левой границы до некоторой промежуточной точки x_c внутри слоя. Запом-

ним в этой точке, которую будем называть стыковочной, величины элементов прогоночной матрицы $a_{ik}(x_c)$. Теперь выполним те же действия, только интегрировать будем во встречном направлении, т.е. от $x=1$ до $x=x_c$. В нашем случае, когда граничные условия слева и справа одинаковы, никакой дополнительной подготовки не требуется. Система уравнений и начальные условия для прогоночной матрицы остаются прежними (4.25). Обозначим знаком тильды величины, имеющие отношение к встречному направлению интегрирования.

Запишем прогоночные соотношения для прямого и встречного этапов в точке стыковки:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}y_4 + a_{12}y_5 + a_{13}y_6, & \tilde{y}_1 &= \tilde{a}_{11}\tilde{y}_4 + \tilde{a}_{12}\tilde{y}_5 + \tilde{a}_{13}\tilde{y}_6, \\ y_2 &= a_{21}y_4 + a_{22}y_5 + a_{23}y_6, & \tilde{y}_2 &= \tilde{a}_{21}\tilde{y}_4 + \tilde{a}_{22}\tilde{y}_5 + \tilde{a}_{23}\tilde{y}_6, \\ y_3 &= a_{31}y_4 + a_{32}y_5 + a_{33}y_6, & \tilde{y}_3 &= \tilde{a}_{31}\tilde{y}_4 + \tilde{a}_{32}\tilde{y}_5 + \tilde{a}_{33}\tilde{y}_6. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Если мы хотим, чтобы решение задачи удовлетворяло условиям и на правой и на левой границе слоя, то должны потребовать совпадения векторов \vec{y} и $\vec{\tilde{y}}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \tilde{y}_1, & y_2 &= \tilde{y}_2, & y_3 &= \tilde{y}_3, \\ y_4 &= \tilde{y}_4, & y_5 &= \tilde{y}_5, & y_6 &= \tilde{y}_6. \end{aligned}$$

Приравнивая левые части и выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} (a_{11} - \tilde{a}_{11})y_4 + (a_{12} - \tilde{a}_{12})y_5 + (a_{13} - \tilde{a}_{13})y_6 &= 0, \\ (a_{21} - \tilde{a}_{21})y_4 + (a_{22} - \tilde{a}_{22})y_5 + (a_{23} - \tilde{a}_{23})y_6 &= 0, \\ (a_{31} - \tilde{a}_{31})y_4 + (a_{32} - \tilde{a}_{32})y_5 + (a_{33} - \tilde{a}_{33})y_6 &= 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Используя условие разрешимости системы, получаем новый, более общий, вариант характеристического соотношения:

$$d(x_c) = |A - \tilde{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \tilde{a}_{11} & a_{12} - \tilde{a}_{12} & a_{13} - \tilde{a}_{13} \\ a_{21} - \tilde{a}_{21} & a_{22} - \tilde{a}_{22} & a_{23} - \tilde{a}_{23} \\ a_{31} - \tilde{a}_{31} & a_{32} - \tilde{a}_{32} & a_{33} - \tilde{a}_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.32)$$

Стыковочный определитель $d(x_c)$ является функцией координаты точки стыковки. В предельных случаях $x_c = 1$ или $x_c = -1$ получаем вариант, который был рассмотрен в параграфе 4.3.

Собственные значения краевой задачи являются теперь корнями уравнения (4.32). После их определения решаем систему уравнений (4.31) и находим величины $y_4(x_c)$, $y_5(x_c)$, $y_6(x_c)$. Прогоночные соотношения (4.30) позволяют определить в точке стыковки y_1 , y_2 , y_3 . Таким образом, при $x = x_c$ известен весь вектор решения. Далее, следуя приведенной выше схеме, интегрируем системы уравнений для прогоночной матрицы от $x = -1$ до x_c и от x_c до $x = 1$, запоминая a_{ik} и \tilde{a}_{ik} в промежуточных точках. Собственные функции вычисляют в ходе обратной прогонки, интегрируя от точки стыковки до левой и правой границы соответственно системы уравнений типа (4.29).

До сих пор за рамками обсуждения оставался выбор положения точки стыковки. К изложению некоторых соображений по этому поводу мы сейчас и приступим. Разговор на эту тему позволит прояснить еще один момент - почему в присутствии малых параметров при старших производных так эффективна стыковка.

Как уже отмечалось выше, величина стыковочного определителя является функцией x_c . Зададимся некоторым набором параметров, который не будет собственным, и построим зависимость, например, модуля определителя (4.32) от координаты точки стыковки. Вид функции будет зависеть от того, какой области параметров принадлежит используемый набор (какие механизмы неустойчивости являются определяющими в данной области). Общая закономерность заключается в том, что данная функция минимальна на границах слоя. Один или несколько максимумов привязаны к точкам, которые являются "опасными" для течения. Так, если мы находимся в области значений параметров, характерных для невязкой неустойчивости, то максимум будет около точки перегиба профиля. Подобная зависимость, построенная в случае течения Пуазейля, характеризуется максимумами вблизи критических точек профиля. Расположим точку стыковки там, где опреде-

литель (4.32) максимален. Если теперь выполнить процедуру определения собственных значений, то тогда характеристический определитель будет заведомо мал везде, в том числе и на границах. В результате при таком задании точки стыковки существенно упрощается вид зависимости стыковочного определителя от собственных значений. В большой окрестности корня уравнения (4.32) его левая часть будет очень гладкой функцией параметров задачи. При этом область притяжения корня резко увеличивается, метод секущих сходится всего за несколько итераций, можно использовать очень грубое приближение, а вследствие этого менять параметры задачи с большим шагом.

Можно привести следующий пример из практики. При получении точки нейтральной кривой течения Пуазейля методом дифференциальной прогонки без стыковки необходимо использовать приближение для собственных значений (число Рейнольдса и мнимая часть декремента) с относительной погрешностью не более десятых долей процента. Использование более грубого приближения немедленно приводит к срыву итерационной процедуры метода двумерных секущих. Стыковка позволяет применять приближения с относительной погрешностью до 5-10%! Таким образом, настоятельно рекомендуем использовать метод стыковки. Положение точки стыковки необходимо выбирать в зависимости от ситуации, но точка обязательно должна быть внутри слоя. Вариант расположения точки стыковки на границах является наихудшим из возможных.

4.5. Сложные краевые задачи

До сих пор обсуждались методики решения краевой задачи в самом простом случае. Рассматривалась однородная задача, однородные граничные условия заданы симметричным образом. В практике гидродинамических исследований встречаются (и часто) более сложные ситуации. Существуют неоднородные краевые задачи. Они могут встретиться, например, при разложении краевой задачи по некоторому параметру. Граничные условия могут быть неоднородными. Возможно задание разного числа разных граничных условий. Такое бывает при исследовании многослойных систем. Нетрудно выполнить обобщение

метода. Некоторые общие сведения приведены в работе [10]. Обсудим далее несколько моментов: во-первых, это случаи, когда в процессе вычислений прогоночная матрица становится сингулярной; во-вторых, когда уравнение для прогоночной матрицы выписывается для неоднородной краевой задачи.

Прежде всего, рассмотрим ситуацию, когда матрица в процессе интегрирования становится сингулярной. Прогоночная матрица связывает два вектора, $\vec{V} = A\vec{W}$. Если в процессе вычислений обнаружится, что некоторые элементы матрицы начинают быстро нарастать, то необходимо перейти к другому прогоночному соотношению, приняв, например, $\vec{W} = B\vec{V}$. Далее необходимо продолжать процедуру, определяя элементы матрицы B , которая является обратной к исходной матрице, $B = A^{-1}$.

Теперь выпишем формулы, необходимые для решения неоднородной краевой задачи. Пусть координата x меняется в некоторых пределах $c \leq x \leq d$. Используем прежние обозначения: n - общий порядок краевой задачи, m - количество граничных условий при $x = c$, l - число условий при $x = d$; $n = m + l$. Краевая задача может быть записана в рассматриваемом случае так:

$$\begin{aligned}\vec{V}' &= K\vec{V} + M\vec{W} + \vec{v}, \\ \vec{W}' &= E\vec{V} + L\vec{W} + \vec{w}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Вектор \vec{V} имеет размерность n и составлен из тех компонент полного вектора решений, для которых заданы условия при $x = c$. Остальные компоненты образуют вектор \vec{W} , имеющий размерность l . Матрицы K , M , E , L составлены из коэффициентов, с которыми соответствующие элементы вектора решения входят в краевую задачу; \vec{v} и \vec{w} - неоднородности. Граничные условия не выписываем.

Пусть, для определенности, прямая прогонка будет выполняться в ходе интегрирования от c к d . Тогда прогоночное соотношение, которое, кстати, тоже станет неоднородным, примет вид

$$\vec{V} = A\vec{W} + \vec{b}.\tag{4.34}$$

В общем случае (когда $n \neq l$) прогоночная матрица имеет размерность $n \times l$. Далее поступаем стандартным образом. Дифференцируем прогоночное соотношение, используем (4.33) и (4.34), получаем дифференциальное уравнение для прогоночной матрицы A и для неоднородности \vec{b} :

$$\begin{aligned}A' &= -AEA - AL + KA + M, \\ \vec{b}' &= -AE\vec{b} + K\vec{b} + \vec{v} - A\vec{w}.\end{aligned}$$

Начальные условия для прогоночной матрицы и неоднородности получаются из граничных условий краевой задачи.

5. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Обсудим способы получения начального приближения для решения краевых задач и некоторые приемы построения различных зависимостей численных характеристик неустойчивости.

Прежде всего отметим, что нахождение начального приближения является одним из центральных моментов при анализе устойчивости равновесия и течений с помощью методов, описанных выше. И метод построения фундаментальной системы решений, и метод дифференциальной прогонки для определения количественных характеристик неустойчивости требуют решения некоторого нелинейного уравнения (системы уравнений). Численное решение уравнения невозможно без использования начального приближения. Более того, приемлемо не всякое начальное приближение. Не угадаешь - окажешься вне области притяжения корня. Кстати, именно поэтому чрезвычайно велика вероятность того, что могут быть не определены важные моды неустойчивости. Существуют методы решения краевых задач, которые свободны от указанных недостатков. Метод Галеркина, например, позволяет получать сразу некоторое количество уровней спектра декрементов. Но успех его применения существенно зависит как от представительности базиса, так и от его полноты. Два рассмотренных нами метода гарантируют получение результата с требуемой точностью.

Итак, в чем суть метода продолжения по параметру? Представим, что нам необходимо получить зависимость собственного значения a от некоторой характеристики задачи b , в данном случае назы-

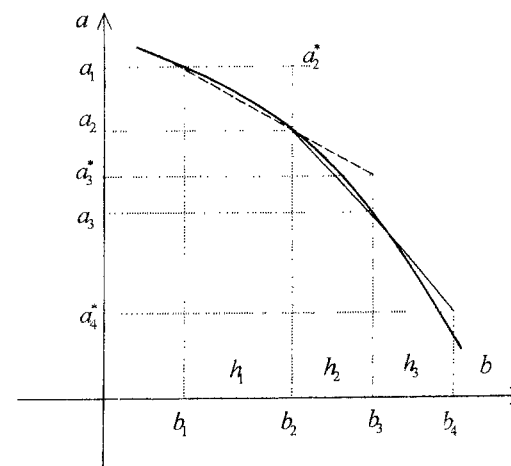


Рис. 4

ваемой параметром. Для нейтральной кривой тепловых волн конвективного течения в вертикальном слое, например, число Грасгофа и частота возмущений играют роль собственных значений краевой задачи; параметром является волновое число. Пусть мы находимся в некоторой точке 1 (рис.4) зависимости. Это означает, что при $b = b_1$ известна величина $a = a_1$. Выполняем шаг h_1 по параметру; $b_2 = b_1 + h_1$. При получении $a_2 = a(b_2)$ в качестве приближения a_2^* для итерационной процедуры решения дисперсионного уравнения используем a_1 . Таким образом, постепенно перемещаясь по параметру, строим искомую зависимость.

Продвижение по параметру можно осуществлять с большим шагом, если воспользоваться процедурой экстраполяции. При этом можно поступить следующим образом. Для получения приближения a_2^* используется, как было описано выше, предыдущее найденное собственное значение. Далее, по известным a_1 и a_2 на основании линейной экстраполяции строим приближение a_3^* . Следующие шаги по па-

параметру совершаем с помощью параболической экстраполяции, используя для получения приближений a_4^* , a_5^* , ... предыдущие три точки зависимости. Приведем формулы для расчета приближений (смысл обозначений понятен из рис. 4):

$$a_2^* = a_1,$$

$$a_3^* = \frac{a_2 - a_1}{h_1} h_2 + a_1,$$

$$a_4^* = \frac{(a_2 - a_1)(h_1 + h_2)^2 - h_1(a_3 - a_1)(h_1 + h_2 + h_3)^2 + h_1^2(a_3 - a_1) - (a_2 - a_1)(h_1 + h_2)^2}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)} (h_1 + h_2 + h_3) + a_1,$$

Процедуру экстраполяции имеет смысл применять, если выполнение одного шага по параметру требует значительных вычислительных затрат. Увеличение быстродействия вычислительной техники снижает остроту проблемы, но и сейчас отнюдь не редки случаи, когда экстраполяция эффективна.

При продвижении по параметру необходимо следить, чтобы не выйти за пределы области его изменения. В сложных случаях следует переопределять, какая величина играет роль собственного числа, а какая – параметра. Сказанное иллюстрирует рис.5, на котором изображена замкнутая зависимость. Такая ситуация не является экзотической; замкнутые нейтральные кривые, например, встречаются сплошь и рядом. В этом случае удобно действовать следующим образом: на участке 1-2 роль собственного числа играет величина a , а величина b – роль параметра; на участке 2-3 определяем $b = b(a)$; на участке 3-4 определяем $a = a(b)$; на участке 4-1 снова снимаем зависимость $b = b(a)$.

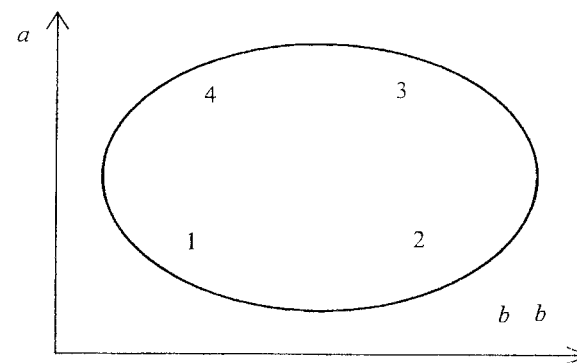


Рис. 5

Если при каком-то наборе параметров у нас имеются собственные числа краевой задачи, то, продвигаясь по параметру, мы сможем снять необходимые зависимости. "Самое первое" начальное приближение можно получить с помощью того же приема продолжения по параметру. В задаче могут существовать частные, предельные случаи, решение которых или известно, или может быть найдено аналитически и т.д. В качестве начального приближения можно воспользоваться такими "предельными" решениями, а затем уж переместиться в интере-

Таблица 2

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
λ_0	9.86	9.31	10.15	13.87	20.17	28.76	39.50
λ_1	20.19	20.57	22.14	25.60	31.33	39.36	49.64
λ_2	39.47	38.94	39.65	42.73	48.13	55.80	65.70
λ_3	56.67	60.05	61.56	64.80	70.10	77.56	87.21
λ_4	88.82	88.30	88.98	91.95	97.12	104.45	113.93
λ_5	118.89	119.27	120.76	123.94	129.11	136.36	145.73
λ_6	157.91	157.38	158.06	160.99	166.08	173.27	182.56
λ_7	197.85	198.23	199.71	202.87	207.98	215.14	224.37
λ_8	246.74	246.21	246.88	249.80	254.85	261.97	271.16

сующую нас область параметров. В решении проблемы изначального приближения может помочь работа [11], в которой определены декременты возмущений в слое покоящейся жидкости. В таблице 2, приведены из указанной работы декременты 9 нижних уровней при некоторых значениях волнового числа.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ШЕНКСА

В самых различных задачах можно столкнуться с ситуацией, когда решение их находится в ходе чрезвычайно медленно сходящейся процедуры. Это может быть суммированием медленно сходящихся рядов, определением предела медленно сходящейся последовательности. Решение многих сеточных задач методом установления также отличается очень медленным выходом алгоритма на стационарный режим.

В данных ситуациях может помочь прием экстраполяции к пределу, который в литературе [12] известен как преобразование Шенкса. В его основе лежит предположение об экспоненциальном поведении функции, последовательности и т.д. Представим, что у нас имеется три члена последовательности, которые представим тремя значениями экспоненциальной функции $y = Ae^{-bx} + C$, вычисленными при равноотстоящих значениях аргумента $x = 0$, $x = h$, $x = 2h$. Тогда можно написать, что $y_1 = A + C$, $y_2 = Ae^{-bh} + C$, $y_3 = Ae^{-2bh} + C$. После несложных преобразований получим

$$y(x = \infty) = C = \frac{y_1 y_3 - y_2^2}{y_1 - 2y_2 + y_3}. \quad (6.1)$$

Это и есть преобразование Шенкса. Проиллюстрируем его эффективность на примерах. Пример первый. Известно разложение тригонометрической функции $\sin(x)$ в ряд по малому аргументу. Приведем три частных суммы ряда:

$$y_1 = x, \quad y_2 = x - \frac{x^3}{6}, \quad y_3 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Используя преобразование (6.1), получаем, что аппроксимацией $\sin(x)$ может служить следующая дробь:

$$\sin(x) \approx \frac{60x - 7x^2}{60 + 3x^2}. \quad (6.2)$$

Выражение (6.2) позволяет получить с точностью не хуже полутора процентов величину функции для значений аргумента вплоть до $\pi/4$, а с использованием формул приведения – получить величину тригонометрических функций при любом значении аргумента.

Более впечатляющий пример приведен в [12]. Известно, что число π можно получить с помощью суммирования знакопеременного ряда:

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

Этот ряд сходится очень медленно. Процедура Шенкса, примененная к семи (всего!) частичным суммам ряда, позволяет получить число π с точностью до шестого знака после запятой.

7. МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Метод Галеркина относится к группе методов, в которых решение аппроксимируется функциями из заданного класса, обычно просто линейными комбинациями функций из некоторого набора.

7.1. Описание метода

Основную идею метода поясним на простом примере. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \psi'' + \lambda\psi &= 0, \\ \psi(0) &= \psi(1) = 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $\psi = \psi(x)$, штрихом обозначено дифференцирование по x . Нетривиальные решения задачи (7.1) существуют лишь при избранных значениях параметра λ , который и играет роль собственного числа.

Задача (7.1) имеет очевидное точное решение:

$$\psi_n(x) = \sin n\pi x, \quad \lambda_n = n^2\pi^2. \quad (7.2)$$

Здесь $n = 1, 2, \dots$ - произвольное целое число. Наименьшее собственное число получается при $n = 1$ и равно π^2 .

Попытаемся найти приближенное решение, которое можно сравнить с точным.

Сначала аппроксимируем решение одной функцией $\tilde{\psi}(x) = a\varphi(x)$, где a - неопределенная константа, а $\varphi(x)$ - заданная функция, удовлетворяющая граничным условиям. Например, можно взять $\varphi(x) = x(1-x)$. Если мы подставим $\tilde{\psi}(x)$ в уравнение (7.1), то оно не удовлетворится, вместо нуля в правой части получим некото-

рую функцию $F(x, \lambda)$, которую обычно называют «невязкой». Определим скалярное произведение двух функций как интеграл от их произведения по отрезку (0-1). Будем говорить, что функции ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю. Метод Галеркина заключается в требовании ортогональности невязки и базисной функции:

$$\int_0^1 \varphi(x) F(x, \lambda) dx = 0. \quad (7.3)$$

Соотношение (7.3) можно рассматривать как уравнение для λ . Для $\varphi(x) = x(1-x)$ получим $F = \lambda(x-x^2) - 2$ и, подставляя F и φ в (7.3), вычисляя интегралы, находим λ :

$$\lambda = 10. \quad (7.4)$$

Сравнивая этот результат с точным решением $\lambda = \pi^2$, видим, что погрешность приближенного решения составляет примерно 1.3%.

Можно уточнить результат, взяв более сложную аппроксимацию собственной функции. Продемонстрируем вычисления для аппроксимации

$$\tilde{\psi} = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2, \quad (7.5)$$

где $\varphi_1 = x(1-x)$, $\varphi_2 = x^2(1-x)^2$.

Подставляя приближение (7.5) в (7.1), находим невязку

$$F = -2a_1 + a_2(2 - 12x + 12x^2) + \lambda(a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)^2). \quad (7.6)$$

Потребуем теперь ортогональности невязки к базисным функциям. Умножая (7.6) на φ_1 и φ_2 и интегрируя, получаем систему двух линейных алгебраических уравнений для коэффициентов a_1, a_2 :

$$\begin{aligned} a_1 \left(\frac{1}{30} \lambda - \frac{1}{3} \right) + a_2 \left(\frac{1}{140} \lambda - \frac{1}{15} \right) &= 0, \\ a_1 \left(\frac{1}{140} \lambda - \frac{1}{15} \right) + a_2 \left(\frac{1}{630} \lambda - \frac{2}{105} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Условие существования нетривиального решения системы (7.7), т.е. равенство нулю определителя этой системы, после приведения подобных позволяет получить квадратное уравнение для λ :

$$\lambda^2 - 112\lambda + 1008 = 0. \quad (7.8)$$

Корни этого уравнения дают приближенные значения для двух собственных чисел задачи (7.1). Приближение ко второму собственному числу оказывается грубым, а меньший корень улучшает полученное ранее приближение (7.4):

$$\lambda = 56 - 4\sqrt{133} \approx 9.8697496, \quad (7.9)$$

которое отличается от точного результата всего на 0.0015%.

Эта высокая точность кажется даже слегка неожиданной. Откуда берется такое странное (на первый взгляд) требование – ортогональность невязки базисным функциям? Наводящие соображения здесь могут быть примерно такими. Если бы нам удалось сделать невязку равной нулю, то это бы означало, что мы получили точное решение. Если мы не можем получить точное решение, то естественно попытаться сделать невязку в каком-то смысле как можно меньшей. В зависимости от того, как мы это делаем, получаем тот или иной метод. Например, минимизация интеграла квадрата невязки (при выполнении какого-либо нормировочного условия на коэффициенты) приводит к методу наименьших квадратов. В методе Галеркина малость невязки понимается в другом смысле. Если бы невязка была ортогональна ко всем функциям некоторой полной системы, то это бы означало равенство ее нулю. Поскольку мы не можем этого достичь, то пусть она будет ортогональна хотя бы к некоторым функциям.

Рассмотренный пример легко обобщается на системы уравнений и произвольное число базисных функций. В общем случае мы имеем задачу на собственные значения

$$\hat{H}\psi = \lambda \hat{L}\psi, \quad (7.10)$$

где \hat{H}, \hat{L} - линейные операторы, ψ - вектор, который можно представлять себе как столбец неизвестных функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям.

Приближенное решение будем искать в виде

$$\tilde{\psi} = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k, \quad (7.11)$$

где вектор-функции φ_k определены в той же области и удовлетворяют тем же граничным условиям, что и ψ . Определим скалярное произведение векторов $\langle \Psi, \Phi \rangle$ как интеграл от их обычного произведения (суммы произведений компонент) по области определения. Будем умножать (7.10) скалярно на базисные векторы φ_k , подставив вместо ψ аппроксимацию (7.11). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов a_k :

$$\sum_{k=1}^N H_{ik} a_k = \lambda \sum_{k=1}^N L_{ik} a_k. \quad (7.12)$$

Условие существования нетривиального решения системы (7.12) представляет собой алгебраическое уравнение степени N относительно λ . Его корни являются приближениями к собственным значениям задачи (7.10).

7.1. Применение метода к задачам конвекции

Опишем применение метода Галеркина к задачам устойчивости равновесия подогреваемой снизу жидкости.

Уравнения для малых возмущений имеют вид

$$-\nabla p + \Delta \vec{v} + Ra \vec{\gamma} \vartheta = 0, \quad (7.13)$$

$$\Delta \vartheta + \vec{v} \cdot \vec{\gamma} = 0, \quad (7.14)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0. \quad (7.15)$$

На границе области S выполняются граничные условия

$$\vec{v}|_S = 0, \quad \vartheta|_S = 0. \quad (7.16)$$

Роль собственного значения играет число Рэлея Ra . Для применения метода Галеркина нужно прежде всего выбрать подходящие базисные функции. Удобно аппроксимацию поля скорости выбирать сразу соленоидальной, это, как мы сейчас увидим, позволяет вообще не заботиться об аппроксимации давления. Будем искать приближенное решение в виде

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^N a_k \vec{u}_k, \quad \vartheta = \sum_{k=1}^N b_k \theta_k, \quad (7.17)$$

где функции \vec{u}_k, θ_k удовлетворяют граничным условиям (7.16) и, кроме того, $\text{div} \vec{u}_k = 0$.

Для получения условий ортогональности невязок базисным функциям умножим уравнение (7.13) на \vec{u}_j , а (7.14) - на θ_j и проинтегрируем по объему. При этом интегралы, содержащие давление, исчезают. Действительно,

$$\int_V \vec{u}_j \cdot \nabla p dV = \int_V \text{div}(\vec{u}_j p) dV - \int_V p \text{div} \vec{u}_j dV = \oint_S p \vec{u}_j \cdot d\vec{S} = 0.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Гаусса, соленоидальностью поля \vec{u}_j и граничными условиями.

После вычисления всех интегралов получаем Галеркинские уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_k H_{jk} + Ra \sum_{k=1}^N b_k L_{jk} &= 0, \\ \sum_{k=1}^N b_k M_{jk} + \sum_{k=1}^N a_k L_{jk} &= 0, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где $H_{jk} = \int_V \vec{u}_j \cdot \Delta \vec{u}_k dV$, $L_{jk} = \int_V \vec{u}_j \cdot \vec{\gamma} \theta_k dV$, $M_{jk} = \int_V \theta_j \Delta \theta_k dV$.

Система (7.18) представляет собой систему $2N$ однородных алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных a_k, b_k . Условие существования нетривиального решения, т.е. равенство нулю определителя этой системы, дает нам уравнение для нахождения критического значения числа Рэлея Ra .

8. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В предыдущих разделах рассматривались численные методы исследования линейной устойчивости для случаев, когда имеется однородность по двум пространственным координатам. Такая ситуация характерна для плоских слоев. В этом случае при исследовании линейной устойчивости рассматриваются возмущения, периодические по этим двум координатам, и задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Настоящий раздел посвящен методам исследования линейной устойчивости в тех случаях, когда существует однородность лишь по одной координате. Это прежде всего течения в длинных каналах. Задача в этом случае является гораздо более сложной, поскольку можно предполагать периодичность возмущений лишь по одной координате и для исследования устойчивости нужно решать уравнения в частных производных.

Наиболее простым методом исследования линейной устойчивости основного решения (которое в частном случае может быть и тривиальным) является эволюционный метод. При этом численно, например методом конечных разностей решаются линеаризованные уравнения малых возмущений. Рассмотрим применение этого метода к исследованию устойчивости стационарного конвективного течения в горизонтальном канале прямоугольного сечения (рис.6), на границах которого поддерживается постоянный однородный градиент температуры, параллельный оси канала.

Уравнения свободной тепловой конвекции в приближении Буссинеска в безразмерной форме имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta v + Gr T, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta w, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.5)$$

Здесь $Pr = \nu / \chi$ – число Прандтля, $Gr = g\beta AN^4 / \nu^2$ – число Грасгофа.

При $Pr = 0$ рассматриваемая задача допускает стационарное решение, соответствующее плоскопараллельному течению, при этом единственная отличная от нуля компонента скорости, продольная скорость w , определяется задачей

$$\Delta w = Gr y, \quad w|_{\Gamma} = 0. \quad (1.6)$$

Как видно из (1.6), при $Pr = 0$ интенсивность течения пропорциональна Gr , продольная скорость w четна по горизонтальной координате и нечетна по вертикальной, в нижней части области жидкость движется в направлении, совпадающем с направлением приложенного градиента температуры, в верхней части – в противоположном направлении. Изолинии продольной составляющей скорости в поперечном сечении канала, полученные методом конечных разностей, приведены на рис. 7.

В случае отличных от нуля значений числа Прандтля задача не имеет стационарных решений, соответствующих плоскопараллельному течению, все три компоненты скорости течения отличны от нуля.

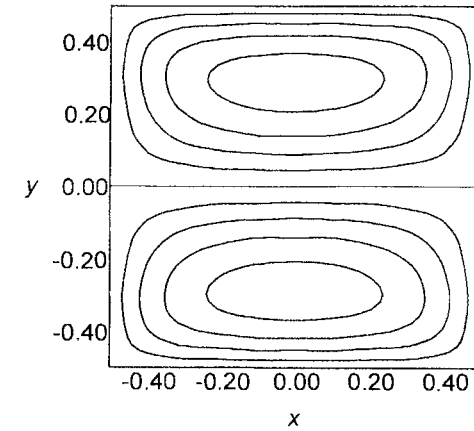


Рис. 7

Есть, однако, стационарные решения, в которых скорость и отклонение температуры от теплопроводного распределения не зависят от z :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, y), \quad T = \theta(x, y) + z. \quad (8.7)$$

Ограничимся анализом таких решений.

Рассмотрим алгоритм исследования устойчивости стационарных решений (8.7). Представим поля скорости, давления и температуры в виде

$$\begin{aligned} u &= U_0 + u', & v &= V_0 + v', \\ w &= W_0 + w', & p &= P_0 + p', \\ T &= T_0 + T', \end{aligned} \quad (8.8)$$

где U_0, V_0, W_0, P_0, T_0 – компоненты скорости, давление и температура основного решения, u', v', w', p', T' – возмущения.

Подставляя (8.8) в (1.1)-(1.5) и линеаризуя, получим систему уравнений, описывающих временную эволюцию малых возмущений, в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial u'}{\partial y} + \\ v' \frac{\partial U_0}{\partial y} + W_0 \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \Delta u', \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + u' \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial v'}{\partial y} + \\ v \frac{\partial V_0}{\partial y} + W_0 \frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \Delta v' + \text{Gr} T', \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial w'}{\partial x} + u' \frac{\partial W_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial w'}{\partial y} + \\ v' \frac{\partial W_0}{\partial y} + W_0 \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \Delta w', \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial T'}{\partial x} + u' \frac{\partial \theta}{\partial x} + V_0 \frac{\partial T'}{\partial y} + \\ v' \frac{\partial \theta}{\partial y} + W_0 \frac{\partial T'}{\partial z} + w' = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T'. \end{aligned} \quad (1.13)$$

На границах области возмущения скорости и температуры исчезают.

Поскольку задача для возмущений однородна по z , при исследовании устойчивости можно ограничиться рассмотрением возмущений, периодических вдоль оси канала:

$$u', v', w', p', T' \sim e^{ikz}. \quad (8.14)$$

Уравнения, описывающие эволюцию таких возмущений, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial u'}{\partial y} + \\ v' \frac{\partial U_0}{\partial y} + iku'W_0 = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \Delta_2 u' - k^2 u', \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + u' \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial v'}{\partial y} + \\ v \frac{\partial V_0}{\partial y} + ikv'W_0 = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \Delta_2 v' - k^2 v' + \text{Gr} T', \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial w'}{\partial x} + u' \frac{\partial W_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial w'}{\partial y} + \\ v' \frac{\partial W_0}{\partial y} + ikw'W_0 = -ikp' + \Delta_2 w' - k^2 w', \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + ikw' = 0, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial T'}{\partial x} + u' \frac{\partial \theta}{\partial x} + V_0 \frac{\partial T'}{\partial y} + \\ v' \frac{\partial \theta}{\partial y} + ikW_0 T' + w' = \frac{1}{\text{Pr}} (\Delta_2 T' - k^2 T'), \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\text{где } \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Обсудим алгоритм численного исследования устойчивости эволюционным методом с применением метода конечных разностей (подробное изложение метода конечных разностей в применении к задачам тепловой конвекции можно найти в [13]).

Вычисления на каждом шаге по времени включают три этапа.

1. Из упрощенной системы уравнений, получаемой из (1.15)-(1.19) отбрасыванием пространственных производных давления, опре-

деляются промежуточные значения компонент скорости \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} в узлах пространственной сетки. При использовании явной схемы конечно-разностный аналог получающихся уравнений имеет вид

$$\frac{\tilde{u}'^{n+1} - u'^n}{\tau} = \left(\Delta u' - k^2 u' - U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} - u' \frac{\partial U_0}{\partial x} - V_0 \frac{\partial u'}{\partial y} - v' \frac{\partial U_0}{\partial y} - ik W_0 u' \right)^n, \quad (1.20)$$

$$\frac{\tilde{v}'^{n+1} - v'^n}{\tau} = \left(\Delta v' - k^2 v' + Gr T' - U_0 \frac{\partial v'}{\partial x} - u' \frac{\partial V_0}{\partial x} - V_0 \frac{\partial v'}{\partial y} - v' \frac{\partial V_0}{\partial y} - ik W_0 v' \right)^n, \quad (1.21)$$

$$\frac{\tilde{w}'^{n+1} - w'^n}{\tau} = \left(\Delta w' - k^2 w' - U_0 \frac{\partial w'}{\partial x} - u' \frac{\partial W_0}{\partial x} - V_0 \frac{\partial w'}{\partial y} - v' \frac{\partial W_0}{\partial y} - ik W_0 w' \right)^n, \quad (1.22)$$

где τ — шаг по времени, n — номер шага.

2. Применяя к (1.20)-(1.22) операцию div и используя условие соленоидальности

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0,$$

получим уравнение для определения поля давления через найденные поля компонент промежуточной скорости:

$$\Delta p' = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial y} + ik \tilde{w}' \right). \quad (8.23)$$

Граничные условия для давления получаются проектированием уравнения движения на границе на направление нормали:

$$\frac{\partial p'}{\partial n} = \frac{\partial^2 v'_n}{\partial n^2}, \quad (8.24)$$

где v'_n — нормальная к границе компонента промежуточной скорости. Уравнение Пуассона (8.23) с граничным условием (8.24) может быть решено методом последовательной верхней релаксации.

3. По формуле

$$(u', v', w') = (\tilde{u}', \tilde{v}', \tilde{w}') - \tau \nabla p' \quad (8.25)$$

вычисляются уточненные значения компонент возмущений скорости и из уравнения (1.13) определяется поле возмущений температуры.

Интегрирование по времени проводится до таких времен, когда эволюция будет определяться уже только возмущениями с наибольшей действительной частью инкремента. Анализ зависимости возмущений от времени позволяет вычислять инкремент и частоту наиболее опасной моды по формулам

$$\lambda = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{f_2}{f_1}, \quad \omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}, \quad (8.26)$$

где t_2 и t_1 — моменты времени, в которые какая-либо функция f , линейно связанная с полями возмущений, достигает максимума либо минимума по периоду.

Для монотонных мод, с $\omega=0$, t_1 и t_2 могут быть произвольными:

$$\lambda = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{f_2}{f_1}. \quad (8.27)$$

Граница линейной устойчивости относительно данной моды определяется условием $\lambda = 0$.

Альтернативным методом исследования устойчивости является решение обобщенной задачи на собственные значения. При этом предполагается экспоненциальная зависимость возмущений от времени: $u', v', w', p', T' \sim e^{\lambda t}$. Дискретизация уравнений методом конечных разностей приводит к обобщенной алгебраической проблеме на собственные значения вида $Ax = \lambda Bx$, где A и B — матрицы, зависящие от

параметров задачи, A - несимметричная, комплекснозначная матрица, имеющая ленточную структуру, B - вырожденная диагональная матрица, в которой часть диагональных элементов равна единице, а все остальные - нулю, λ - комплексный инкремент возмущений, x - вектор, составленный из возмущений скорости, давления и температуры. Решение задачи дает значение инкремента λ и соответствующие поля возмущений скорости, температуры и давления. Положение нейтральной кривой определяется из условия $\text{Re}(\lambda)=0$.

Размерность матриц A и B на практике оказывается настолько большой, что стандартные методы нахождения собственных значений применить не удастся. Поэтому для решения спектральной задачи $Ax = \lambda Bx$ рекомендуется пользоваться каким-либо итерационным методом уточнения собственного значения и собственного вектора, например методом Ньютона-Рафсона:

$$\begin{cases} Ax - \lambda_0 Bx = \Delta\lambda \cdot Bx_0, \\ \Delta x \cdot e = 0 \text{ (or } x \cdot e = 1), \end{cases} \quad (8.28)$$

где неизвестные вектор возмущений и инкремент представляются в виде $x_0 + \Delta x$ и $\lambda_0 + \Delta\lambda$, x_0 и λ_0 - приближенные значения собственного вектора и собственного числа соответственно. Решение предполагается нормированным условием: $x \cdot e = 1$, где e - заданный вектор. Более подробное описание этого метода можно найти в [14].

Нейтральная кривая $Gr_c(k)$ устойчивости стационарного конвективного течения в канале квадратного сечения при нулевом значении числа Прандтля приведена на рис.8. Эта нейтральная кривая соответствует границе устойчивости по отношению к четным по x монотонным возмущениям, которые, как показывают расчеты, оказываются в рассматриваемой ситуации наиболее опасными.

Опыт использования двух обсуждавшихся в этом разделе методов исследования устойчивости показывает, что эволюционный метод является гораздо более простым в реализации и с большей достоверностью приводит к наиболее опасной моде возмущения. В то же время, он уступает методу решения обобщенной задачи на собственные значения в эффективности вычислений (затратам компьютерного време-

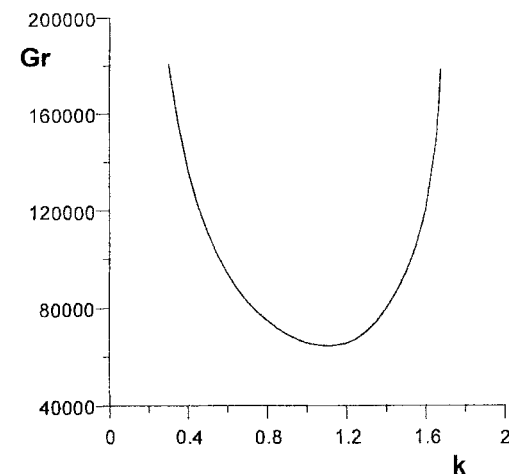


Рис. 8

ни). Оптимальным является использование обоих методов: эволюционного метода - для грубого получения собственного значения и собственного вектора, и решения обобщенной задачи на собственные значения - для уточнения результата.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хемминг Р. Численные методы. Для научных работников и инженеров / Р.М.Хемминг. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
2. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений / А.М.Островский. – М.: Изд-во иностр. лит. 1963. – 219 с.
3. Ланс Д.Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин / Д.Н.Ланс. – М.: Изд-во иностр. лит. 1962. – 208 с.
4. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж.Форсайт, М.Малькольм, Л.Моулер. – М.: Мир, 1980. – 279 с.
5. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
6. Гершуни Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З.Гершуни, Е.М.Жуховицкий. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
7. Корн Г.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.А.Корн, Т.М.Корн. – М.: Наука. 1968. – 720 с.
8. Бирих Р.В. Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений / Р.В.Бирих, Р.Н.Рудаков // Уч.зап. Перм.ун-та. № 316. Гидродинамика. Вып V. Пермь: 1974. – С. 149-158.
9. Goldshtik M.A. Differential factorization method in problems of hydrodynamic stability / M.A.Goldshtik, V.A.Sapozhnikov, V.N.Shtern. " Proc. GAMM Conf. Numer. Methods in Fluid Mech." – Köln, DFVLR, 1975. – P. 52-59.
10. Гольдштик М.А. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М.А.Гольдштик, В.Н.Штерн. – Новосибир.: Наука, 1977. – 366 с.
11. Бирих Р.В. Декременты нормальных возмущений плоского слоя покоящейся жидкости / Р.В.Бирих, Р.Н. Рудаков // Уч.зап. Перм. ун-та. № 184. Гидродинамика. – Пермь. 1968. – С. 117-123.
12. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М.Ван-Дайк. – М.: Мир, 1967. – 310 с.
13. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах тепловой конвекции / Е.Л.Тарунин. – Иркутск: изд-во Иркут. ун-та, 1990. – 223 с.
14. Lyubimov D.V. Software package for numerical investigation of linear stability of multi-dimensional flows. / D.V.Lyubimov, T.P.Lyubimova, V.A.Morozov // Bulletin of Perm University. Information systems and technologies/ – 2001. N 5. – PP. 74-81.

Учебное издание

**Николай Иванович Лобов
Дмитрий Викторович Любимов
Татьяна Петровна Любимова**

Решение задач на ЭВМ

Учебно-методическое пособие

Редактор *Н.В.Петрова*
Компьютерная верстка *Н.И.Лобова*

Подписано в печать 31.10.07. Формат 60x84/16.
Усл.печ.л. 4,88. Уч.-изд.л. 3,6.
Тираж 100 экз. Заказ **615**.

Редакционно-издательский отдел Пермского государственного университета
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Типография Пермского государственного университета
614990, Пермь, ул. Букирева, 15