

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учрежде-
ние высшего профессионального образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н.И. Лобов, Д.В. Любимов

Электродинамика сплошных сред

Учебно-методическое пособие

Пермь 2012

УДК 532.783

ББК 22.313

Л68

Лобов Н.И.

Л68 Электродинамика сплошных сред: учеб.-метод. пособие / Н.И.Лобов, Д.В.Любимов; Перм. гос. нац. иссл. ун-т. –2 е изд., стереотип. – Пермь, 2012. – 80 с.: ил.

ISBN 978-5-7944-1889-7

В пособии излагаются некоторые вопросы электродинамики сплошных сред. Предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по теоретической физике.

УДК 532.783

ББК 22.313

Печатается в соответствии с решением
редакционно-издательского совета Пермского государственного
национального исследовательского университета

Рецензенты:

зав.каф. теоретической физики и компьютерного моделирования Перм. гос. пед. ун-та проф. **Р.В.Бирих**; проф. каф. теоретической механики Перм. гос. техн. ун-та, к.ф.-м.н. **Р.Н.Рудаков**

Данное пособие является победителем конкурса, проведенного Пермским государственным университетом в ходе реализации инновационной образовательной программы «Формирование информационно-коммуникационной компетентности выпускников классического университета в соответствии с потребностями информационного общества» в рамках приоритетного национального проекта «Образование»

ISBN 978-5-7944-1889-7

© Лобов Н.И., Любимов Д.В., 2007

©Пермский государственный университет, 2007

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1. МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ	6
§ 1. Микроскопические и макроскопические значения физических величин	6
§ 2. Усреднение уравнений Максвелла для полей в среде.....	8
§ 3. Полный заряд в среде. Вектор электрической поляризации.....	9
§ 4. Полный ток в среде. Вектор магнитной поляризации.....	12
§ 5. Полная система уравнений Максвелла в среде. Материальные уравнения.....	15
§ 6. Условия для полей на границе раздела сред	18
§ 7. Энергия электромагнитного поля в среде	21
Глава 2. ДИЭЛЕКТРИКИ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ	24
§ 1. Поляризация диэлектриков I рода.....	27
§ 2. Поляризация диэлектриков II рода	29
Глава 3. МАГНЕТИКИ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ.....	33
§ 1. Диамагнетизм	34
§ 2. Парамагнетики	36
§ 3. Ферромагнетизм.....	37
§ 4. Феноменологическая теория Вейсса.....	40
Глава 4. ПЛОСКИЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ	45
§ 1. Дисперсионное соотношение	45
§ 2. Идеальный диэлектрик.....	47
§ 3. Проводящая среда.....	48
§ 4. Волны в хорошо проводящей среде. Скин-эффект.....	49
§ 5. Условия на границе идеального проводника	51
§ 6. Распространение света. Законы отражения и преломления.....	52
§ 7. Формулы Френеля	53
§ 8. Поляризация в быстропеременном электрическом поле	60
Глава 5. ВОЛНОВОДЫ.....	63
§ 1. Передача электромагнитной энергии вдоль линий передач	63
§ 2. Переменный ток в проводнике	65
§ 3. Распространение электромагнитных волн в волноводах	68
§ 4. Главная волна	76
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	79

ВВЕДЕНИЕ

Термин «электродинамика» в буквальном переводе означает учение о движении и взаимодействии электрических зарядов. Но такая трактовка не отражает сути дела, ибо главное содержание электродинамики есть учение об электромагнитном поле и его связи с зарядами и токами.

Первоначально делались попытки свести все электрические явления к взаимодействию электрических зарядов. При этом предполагалось, что электрические силы мгновенно передаются через пустоту, поля же вводились лишь как удобное математическое понятие. Эти основные положения теории дальнего действия разделяли Ампер, Кирхгоф, Вебер, Гельмгольц и др.

Только благодаря М.Фарадею причину стали искать не в самих зарядах и токах, а в свойствах окружающего их пространства. Фарадей ввел силовые линии, представляя их реальными образованиями. В ходе многочисленных хитроумных экспериментов, поставленных с целью обнаружения силовых линий, Фарадей пришел к открытию явления электромагнитной индукции.

Максвелл сумел увидеть в языке силовых линий гармонию математики. Тщательно изучив труды Фарадея, Максвелл сконцентрировал все их содержание в нескольких коротких уравнениях, которые стали фундаментом теории электромагнитного поля. Так благодаря Фарадею и Максвеллу появляется теория близкодействия, в основе которой лежит фарадеево представление об особом материальном носителе электромагнитных сил – электромагнитном поле.

Максвелл был сторонником механистической точки зрения, представляя электромагнитное поле в виде натяжений и деформаций всепроникающей упругой среды – эфира. На этом пути ему удалось сформулировать представления об электромагнитной природе света.

Отказ от мирового эфира стал возможным только после создания специальной теории относительности. Г.Лоренц много сделал для становления теории относительности, но от идеи эфира он так и не

смог отказаться. Во многом благодаря Эйнштейну постепенно складывается представление об электромагнитном поле, как о материальной сущности. В настоящее время доказательств правильности таких представлений более чем достаточно. К ним относятся и опыты Г.Герца по обнаружению электромагнитных волн, и опыты П.Н.Лебедева по измерению светового давления, и другие многочисленные эксперименты.

Электродинамика, изучающая электромагнитные процессы, является одной из самых разработанных областей физики. Характер электромагнитных процессов в веществе существенно зависит от свойств вещества. Тем не менее, оказывается возможным построить теорию электромагнитных процессов в веществе. Такая теория обычно называется электродинамикой сплошных сред.

Глава 1. МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ

Эта глава посвящена выводу макроскопических уравнений поля в среде из микроскопических уравнений и обсуждению условий на границе раздела сред.

§ 1. Микроскопические и макроскопические значения физических величин

С формальной точки зрения для описания электромагнитного поля в среде можно воспользоваться уравнениями Максвелла для поля в пустоте. Необходимо «только» учесть все заряды и токи. На самом деле такая задача просто не выполнима, так как для этого необходима информация о поведении огромного количества зарядов. Характеристики распределения зарядов и токов, равно как и характеристики электрического и магнитного поля в среде очень сильно меняются при перемещении точки наблюдения даже на расстояния порядка размера атома. Кроме того, эти характеристики являются быстрыми и сложными функциями времени. Такие характеристики мы будем называть микроскопическими. К счастью, такой объем информации и не является необходимым. Вполне достаточно знать, например, среднюю напряженность электрического поля в области с линейными размерами 10^{-2} см. Так как характерные размеры атомов составляют около 10^{-8} см, то указанный объем будет содержать около 10^{18} атомов. Это означает, что микроскопические флуктуации полностью усреднятся. Любой датчик в лабораторном физическом эксперименте имеет вполне конечные размеры, поэтому и экспериментальные данные являются усредненными, макроскопическими. Тогда и теория электромагнитного поля в среде, основанная на экспериментальных данных, должна быть макроскопической.

Чтобы уточнить понятие среднего значения, введем терминологию

гию, предложенную Лоренцем. Будем называть физически бесконечно малыми такие объемы, которые удовлетворяют двум требованиям:

а) имеют характерные размеры, значительно большие расстояний между атомами и молекулами, а следовательно, и характерных размеров микроскопических неоднородностей среды;

б) имеют размеры, которые чрезвычайно малы по сравнению с размерами макроскопических неоднородностей среды.

Выполнение первого требования обеспечивает независимость результата усреднения от выбора физически бесконечно малого объема. Второе требование позволяет выполнять дифференцирование макроскопических характеристик по макроскопическим координатам.

Аналогично этому вводится понятие физически бесконечно малого промежутка времени. Он должен быть много больше промежутков времени, характерных для молекулярных процессов. Кроме того, он должен быть много меньше времен, характерных для макроскопических изменений (например, много меньше периода изменения напряжения на обкладках конденсатора).

Тогда под макроскопическими величинами будем понимать средние значения физических величин в физически бесконечно малом объеме на протяжении физически бесконечно малого промежутка времени:

$$f_{macro} = \langle f_{micro} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} \int_{\Delta t} f_{micro} dV dt .$$

Операции дифференцирования и осреднения можно менять местами. Покажем, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle, \quad (1)$$

где f – некоторая микроскопическая скалярная или векторная величина. Действительно,

$$\langle f(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(\vec{r}') dV'; \quad \langle f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(\vec{r}' + \Delta\vec{r}') dV' .$$

Так как результат усреднения по объему не должен зависеть от формы и величины объема, то он в обоих случаях выбран одним и тем же.

Тогда

$$\langle f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) \rangle - \langle f(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V [f(\vec{r}' + \Delta\vec{r}') - f(\vec{r}')] dV'. \quad (2)$$

Пусть вектор $\Delta\vec{r}$ параллелен оси x : $\Delta\vec{r} = \vec{i} \Delta x$, где \vec{i} – орт оси x . Разделив (2) на Δx и переходя к пределу $\Delta x \rightarrow 0$, получаем равенство (1). Аналогично можно показать, что операция усреднения по времени и операция дифференцирования по времени коммутируют.

§ 2. Усреднение уравнений Максвелла для полей в среде

Запишем систему уравнений Максвелла для микроскопических полей в среде:

$$\text{rot } \vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{h} = 0, \quad (4)$$

$$\text{rot } \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\text{div } \vec{e} = 4\pi\rho. \quad (6)$$

Здесь \vec{e} и \vec{h} суть напряженности микроскопического электрического и магнитного поля соответственно, ρ и $\rho\vec{v}$ – микроскопические плотность заряда и плотность тока. А теперь усредним уравнения (3)–(6), используя тот факт, что операции усреднения и дифференцирования можно менять местами:

$$\langle \text{rot } \vec{e} \rangle = -\frac{1}{c} \left\langle \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \right\rangle, \quad \text{rot } \langle \vec{e} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial \langle \vec{h} \rangle}{\partial t},$$

$$\langle \text{div } \vec{h} \rangle = 0, \quad \text{div } \langle \vec{h} \rangle = 0,$$

$$\langle \text{rot } \vec{h} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \rho \vec{v} \rangle + \frac{1}{c} \left\langle \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right\rangle, \quad \text{rot } \langle \vec{h} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \rho \vec{v} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \langle \vec{e} \rangle}{\partial t},$$

$$\langle \operatorname{div} \vec{e} \rangle = 4\pi \langle \rho \rangle, \quad \operatorname{div} \langle \vec{e} \rangle = 4\pi \langle \rho \rangle.$$

Введем обозначение $\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle$ для напряженности макроскопического электрического поля. Напряженность макроскопического магнитного поля принято называть индукцией \vec{B} (так сложилось исторически), $\vec{B} = \langle \vec{h} \rangle$. Система уравнений, которой должно подчиняться макроскопическое электромагнитное поле в среде, выглядит следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \langle \rho \vec{v} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \langle \rho \rangle. \quad (10)$$

Для завершения вывода уравнений макроскопической электродинамики необходимо выяснить, из чего складывается полная макроскопическая плотность электрического заряда $\langle \rho \rangle$ и полная макроскопическая плотность тока $\langle \rho \vec{v} \rangle$.

§ 3. Полный заряд в среде. Вектор электрической поляризации

Полная плотность заряда в среде состоит из плотности сторонних зарядов $\rho_{\text{уст}}$ (эти заряды могут быть внесены в вещество «со стороны») и плотности поляризационных зарядов $\rho_{\text{пол}}$:

$$\langle \rho \rangle = \rho_{\text{уст}} + \rho_{\text{пол}} \quad (11)$$

Основная проблема состоит в определении плотности поляризационных зарядов. Понятно, что она должна быть связана со степенью поляризованности диэлектрика. Количественной характеристикой состояния поляризованности является вектор поляризации \vec{P} , который вводится как дипольный момент единицы объема:

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_V \vec{p}, \quad (12)$$

где \vec{p} – дипольный момент молекулярного диполя. Потенциал электрического поля, создаваемого поляризационными зарядами, определяется следующим выражением (см. рис. 1):

$$\varphi(\vec{R}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{R'} dV + \int_S \frac{\sigma(\vec{r})}{R'} dS. \quad (13)$$

Здесь $\rho(\vec{r})$ – объемная плотность поляризационных зарядов, а $\sigma(\vec{r})$ – поверхностная плотность, величина \vec{R}' определяется так:

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{r}. \quad (14)$$

С другой стороны, потенциал электрического поля связан с вектором поляризации:

$$\varphi(\vec{R}) = \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{R}'}{R'^3} dV. \quad (15)$$

Преобразуем последнее выражение:

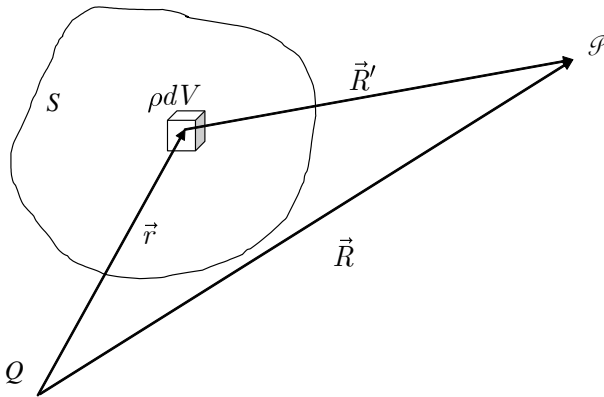


Рис.1. К вычислению потенциала поля поляризационных зарядов

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{R}) &= \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{R}'}{R'^3} dV = - \int_V \vec{P}(\vec{r}) \cdot \nabla_{\vec{R}'} \frac{1}{R'} dV = \int_V \vec{P}(\vec{r}) \cdot \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{R'} dV = (16) \\ &= \int_V \nabla_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r})}{R'} dV - \int_V \frac{1}{R'} \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}) dV = \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}}{R'} - \int_V \frac{\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r})}{R'} dV. \end{aligned}$$

Сравнивая выражения (15) и (16), получаем

$$\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad (17)$$

$$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n}. \quad (18)$$

Из формулы (17) следует, что отличная от нуля объемная плотность поляризационных зарядов может быть только в случае неоднородной поляризации (рис. 2).

В случае однородной поляризации объемная плотность поляризационных зарядов равна нулю, но согласно (18) на поверхности могут быть поверхностные поляризационные заряды (рис. 3).

Разумеется, поверхностные поляризационные заряды будут существовать и при неоднородной поляризации.

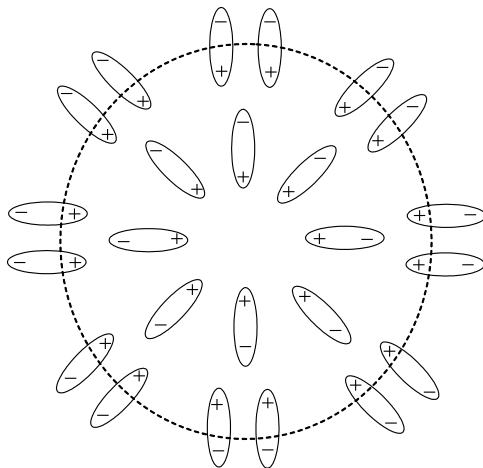


Рис. 2. Распределение молекулярных диполей при неоднородной поляризации

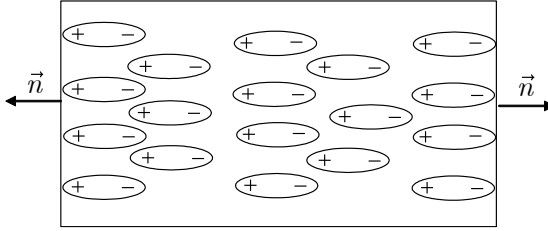


Рис. 3. Распределение молекулярных диполей при однородной поляризации

С учетом (17) уравнение для напряженности макроскопического электрического поля (10) примет вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho_{\text{вс}} - \operatorname{div} \vec{P}). \quad (19)$$

Если ввести вектор \vec{D} соотношением

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad (20)$$

то уравнение (19) переписывается так:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho_{\text{вс}}.$$

В дальнейшем, говоря об объемной плотности электрического заряда, мы всегда будем иметь в виду объемную плотность именно сторонних зарядов. Окончательно уравнение (19) таково:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho. \quad (21)$$

Вектор \vec{D} называют вектором индукции электрического поля.

§ 4. Полный ток в среде. Вектор магнитной поляризации

Как и полный заряд, полный ток в среде состоит из нескольких слагаемых различной природы, только теперь этих слагаемых три: истинный ток, т.е. ток, обусловленный движением свободных зарядов, молекулярный ток, связанный с движением зарядов внутри молекул, и поляризационный ток, связанный с нестационарным процессом электрической поляризации:

$$\langle \rho \vec{v} \rangle = \vec{j}_{\text{ист}} + \vec{j}_{\text{мол}} + \vec{j}_{\text{пол}}. \quad (22)$$

Рассмотрим эти слагаемые по отдельности, начиная с поляризационного тока. Нестационарный процесс поляризации, например, в переменном внешнем поле, связан с перераспределением зарядов внутри молекул (или с изменением ориентации молекулы). Эти движения зарядов происходят не за молекулярные времена, а за времена изменения внешнего поля, которые велики по сравнению с молекулярными (иначе все наше рассмотрение не годится). Отсюда следует, что среднее от скорости зарядов, т.е. от производной по времени от координат, не нуль. На этом основании можем сделать очень простую выкладку:

$$\vec{j}_{\text{пол}} = \frac{1}{V} \sum_{\nu} e \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{V} \sum_{\nu} e \vec{r} \right) = \dot{\vec{P}}. \quad (23)$$

Таким образом, получаем, что поляризационный ток определяется скоростью изменения поляризации. При стационарной поляризации, как и должно быть, поляризационный ток обращается в нуль.

Перейдем к рассмотрению молекулярных токов. Незатухающее движение зарядов внутри молекул совершается очень быстро, поэтому предыдущие рассуждения здесь не годятся. Однако усреднение микроскопических токов, связанных с этим движением, может дать отличный от нуля результат – так называемые амперовские токи.

По аналогии с поляризацией диэлектриков (§ 3) введем характеристику намагниченности магнетиков как магнитный момент единицы объема:

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_{\nu} \vec{m}, \quad (24)$$

где \vec{m} – магнитный момент молекулярного тока. Величина \vec{M} называется вектором магнитной поляризации, или вектором намагничивания.

Векторный потенциал магнитного поля, создаваемого молекулярными токами, связан с плотностью молекулярных токов так:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \int_{\nu} \frac{\vec{j}(\vec{r})}{cR'} dV + \oint_S \frac{\vec{i}(\vec{r})}{cR'} dS. \quad (25)$$

Здесь \vec{i} – плотность поверхностных молекулярных токов. На рис. 4 показано, как молекулярные токи приводят к появлению тока, текущего по поверхности магнетика (рисунок взят с сайта Wikipedia). Смысл величин \vec{r} и R' такой же, как и в § 3 (см. рис.1).

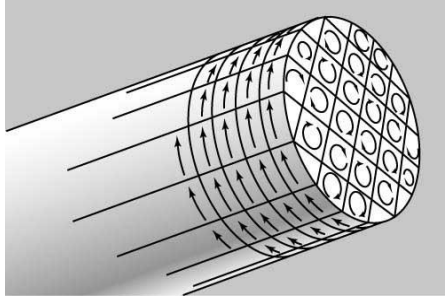


Рис. 4. Формирование поверхностных токов

С другой стороны, векторный потенциал магнитного поля молекулярных токов может быть выражен через вектор магнитной поляризации

$$\vec{A} = \int_V \frac{\vec{M} \times \vec{R}'}{R'^3} dV. \quad (26)$$

Преобразуем выражение (26):

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \int_V \frac{\vec{M} \times \vec{R}'}{R'^3} dV = - \int_V \vec{M} \times \nabla_{\vec{R}'} \frac{1}{R'} dV = \int_V \vec{M} \times \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{R'} dV = \\ &= - \int_V \text{rot}_{\vec{Q}} \frac{\vec{M}}{R'} dV + \int_V \frac{\text{rot}_{\vec{Q}} \vec{M}}{R'} dV = \int_V \frac{\text{rot}_{\vec{Q}} \vec{M}}{R'} dV - \oint_S \frac{\vec{n} \times \vec{M}}{R'} dS. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение и выражение (25), приходим к связи плотности объемных и поверхностных молекулярных токов с вектором магнитной поляризации:

$$\vec{j} = c \text{rot} \vec{M}, \quad \vec{i} = c \vec{M} \times \vec{n}. \quad (27)$$

Как видно, объемные молекулярные токи могут существовать только в случае неоднородной намагниченности магнетика. Поверх-

ностные токи будут существовать и при однородной, и при неоднородной намагниченности магнетика, причем их плотность выражается через составляющую вектора намагниченности, касательную к поверхности.

Подставим выражения (23), (27) в уравнение Максвелла (9):

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_{\text{ист}} + \vec{j}_{\text{мол}} + \vec{j}_{\text{пол}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j}_{\text{ист}} + c \operatorname{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Объединяя слагаемые, содержащие магнитные характеристики, и слагаемые, содержащие электрические характеристики, получаем:

$$\operatorname{rot} (\vec{B} - 4\pi \vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{ист}} + \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{E} + 4\pi \vec{P})}{\partial t},$$

или

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (28)$$

Здесь введено обозначение:

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}. \quad (29)$$

Величина \vec{H} называется напряженностью магнитного поля.

§ 5. Полная система уравнений Максвелла в среде. Материальные уравнения

Сведем вместе полученные результаты. Макроскопические электрическое и магнитное поля в среде подчиняются следующим уравнениям:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (30)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (31)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (32)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho. \quad (33)$$

Полученная система уравнений пригодна для описания электромагнитного поля в любой среде. Но эта система не замкнута. Так или иначе, электрические и магнитные процессы протекают по-разному в разных средах («чистые» магнетики, диэлектрики, проводники и т.д.). Поэтому для понимания электрических и магнитных явлений в средах обязательно необходим учет конкретных особенностей среды. С математической точки зрения нам необходима связь \vec{E} и \vec{D} , \vec{B} и \vec{H} , а также \vec{j} и \vec{E} . Формулы связи составляют то, что обычно называют материальными уравнениями. Из всего сказанного выше ясно, что материальные уравнения, к сожалению, не могут быть универсальными.

Поляризация диэлектриков вызвана действием электрического поля на связанные в молекулах электрические заряды. Поэтому и характеристика поляризованности диэлектрика, т.е. вектор поляризации, должна зависеть от силовой характеристики макроскопического электрического поля, т.е. от вектора напряженности \vec{E} :

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}). \quad (34)$$

Рассмотрим такие диэлектрики, которые в отсутствие электрического поля не поляризованы. Это ограничение исключает из рассмотрения такие диэлектрики, как, например, электреты. Если макроскопическое электрическое поле слабое, то связь (34) должна быть линейной. Ограничение, связанное с требованием малости напряженности \vec{E} (по сравнению с напряженностями внутримолекулярных полей), не является очень произвольным. Как видно из простых оценок, приведенных ниже (гл. 2), это требование справедливо для очень широкого класса веществ. Самая общая форма линейной связи двух векторов может быть только такой:

$$P_i = \alpha_{ij} E_j, \quad (35)$$

где α_{ij} – тензор электрической поляризуемости. Если диэлектрик является аморфным, поликристаллическим, монокристаллическим, но с кубической решеткой, то тензор электрической поляризуемости явля-

ется шаровым, для которого $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$. Способность таких диэлектриков поляризоваться под действием электрического поля характеризуется всего одной величиной α , которая называется электрической поляризуемостью, и

$$\vec{P} = \alpha\vec{E}. \quad (36)$$

Тогда связь между вектором электрической индукции и напряженностью электрического поля (20) оказывается очень простой:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1 + 4\pi\alpha)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}. \quad (37)$$

Величина $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$ называется диэлектрической проницаемостью.

Перейдем к магнитным характеристикам. Ограничимся рассмотрением магнетиков, которые в отсутствие внешнего магнитного поля не обладают намагниченностью. В приближении слабых магнитных полей связь между вектором намагничивания и вектором индукции магнитного поля должна быть линейной. Исторически сложилось так, что такая связь записывается для векторов \vec{B} и \vec{H} следующим образом:

$$M_i = \chi_{ij}H_j. \quad (38)$$

Тензор χ_{ij} называется тензором магнитной поляризуемости (магнитной восприимчивости). Для изотропных магнетиков $\chi_{ij} = \chi\delta_{ij}$, и

$$\vec{M} = \chi\vec{H}. \quad (39)$$

Величина χ называется магнитной поляризуемостью (магнитной восприимчивостью). Выражение (39) позволяет так записать связь (29) между индукцией и напряженностью магнитного поля:

$$\vec{B} = (1 + 4\pi\chi)\vec{H} = \mu\vec{H}. \quad (40)$$

Величина μ называется магнитной проницаемостью.

И, наконец, перейдем к обсуждению связи между плотностью тока проводимости и напряженностью электрического поля. Для широкого класса веществ такая связь является линейной:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}. \quad (41)$$

Величина σ называется удельной проводимостью, или электропроводностью среды. Выражение (41) называется законом Ома. Среды, для которых справедлив закон Ома, называются омическими.

§ 6. Условия для полей на границе раздела сред

Характеристики среды, входящие в материальные уравнения (37), (40), (41), т.е. ε , μ и σ , могут быть функциями пространственных координат и времени. На практике часто встречаются ситуации, когда эти функции координат являются кусочно-непрерывными, т.е. имеется контакт сред с отличающимися электропроводностями, электрической и магнитной проницаемостью. Решения уравнений Максвелла (30)-(33), как решения системы дифференциальных уравнений, можно получить лишь в тех областях пространства, где эти величины являются не непрерывными. Чтобы получить решения уравнений Максвелла, справедливые для всех граничащих сред, необходимы граничные условия. Они позволят «сшить» на границе решения в различных средах. Применять в пограничных областях уравнения Максвелла нельзя, так как на границах пространственные производные характеристик полей не определены.

Для решений подобных проблем существует стандартный прием. Искусственно вводится переходной слой «размазки» малой толщины Δ , в котором ε , μ и σ являются быстро меняющимися, но непрерывными функциями координат. На рис. 5 показана модельная ситуация с границей раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 . Зависимости проницаемостей от координаты x , которая отсчитывается в ортогональном к границе направлении, показаны тонкими сплошными линиями. Сглаженная зависимость $\varepsilon(x)$ показана жирной сплошной линией. Положения границы раздела сред и границ переходного слоя показаны вертикальными штриховыми линиями. Будем считать, что электрический заряд на границе сред (если есть) расположен в тонком поверхностном слое, что хорошо выполняется в реальных ситуациях. Точно так же будем считать, что поверхностные токи (если они есть) текут в этом тонком поверхностном слое.

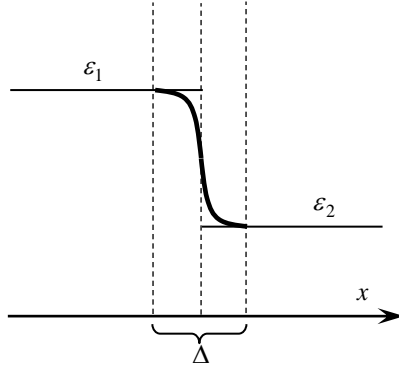


Рис. 5. Переходной слой

Уравнениями Максвелла в таком переходном слое пользоваться можно. Получим условия на границе сред для нормальных компонент электрического поля. Для этого уравнение Максвелла $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$ проинтегрируем по объему цилиндра. Основания цилиндра параллельны поверхности раздела, их площадь S мала; высота цилиндра равна толщине переходного слоя. Таким образом, фрагмент переходного слоя полностью расположен внутри цилиндра.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = 4\pi \int_V \rho dV .$$

Левый интеграл преобразуем по теореме Гаусса-Остроградского:

$$\oint_S D_n dS = 4\pi \int_V \rho dV .$$

Устремим толщину переходного слоя к нулю, сохраняя конечной величину заряда на вырезанном поверхностью цилиндра участке границы раздела сред. Тогда $(D_{2n} - D_{1n})S = 4\pi\sigma S$, или, окончательно,

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma . \quad (42)$$

Нормальная компонента индукции электрического поля на границе испытывает скачок в меру заряженности границы.

Точно также поступим и с уравнением $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. Проинтегрировав это уравнение по объему указанного цилиндра, получим

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (43)$$

Нормальная компонента индукции магнитного поля на границе сред непрерывна.

Для получения условий, которым подчиняются касательные к границе компоненты характеристик полей, проинтегрируем два других уравнения Максвелла по небольшой прямоугольной площадке, расположенной перпендикулярно поверхности раздела сред. Две его стороны прямоугольника параллельны границе раздела сред и имеют небольшую длину l . Две другие границы равны толщине переходного слоя. Таким образом, площадь прямоугольника равна $S = l\Delta$. Уравнение (30) после интегрирования принимает вид

$$\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Левую часть равенства преобразуем по теореме Стокса:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Здесь L – контур прямоугольника. В полученном уравнении перейдем к пределу $\Delta \rightarrow 0$. Тогда величина интеграла по площади прямоугольника тоже устремится к нулю, а циркуляция напряженности электрического поля по контуру прямоугольника будет равна циркуляции по двум оставшимся сторонам. В результате получим $(E_{2\tau} - E_{1\tau})l = 0$, или

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}. \quad (44)$$

Выполним такие операции с оставшимся уравнением (32):

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Интеграл в левой части равенства преобразуем по теореме Стокса:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

В последнем уравнении перейдем к пределу $\Delta \rightarrow 0$. В правой части

равенства останется только ток, текущий по поверхности через указанную площадку. В результате получим, что $(H_{2r} - H_{1r})l = \frac{4\pi}{c}il$, или

$$H_{2r} - H_{1r} = \frac{4\pi}{c}i, \quad (45)$$

где i – составляющая линейной плотности поверхностного тока проводимости, ортогональная нашей площадке.

§ 7. Энергия электромагнитного поля в среде

Система уравнений Максвелла представляет собой уравнения движения для электромагнитного поля. На очереди вопрос о мерах движения. Можно ли говорить об энергии и импульсе электромагнитного поля в среде? Ниже остановимся только на выводе выражения для энергии поля. С формальной точки зрения мы можем поступить так же, как и в случае поля в пустоте. Запишем четыре основных уравнения Максвелла и материальные уравнения:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (46)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (47)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (48)$$

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho; \quad (49)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (50)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}, \quad (51)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (52)$$

Умножим уравнение (46) скалярно на $-\vec{H}$, а уравнение (48) – на \vec{E} и сложим:

$$-\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} + \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}\vec{E} + \frac{1}{c} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (53)$$

Ограничимся случаем постоянных диэлектрической и магнитной проницаемостей. Тогда выражение в скобках в выражении (53) может быть преобразовано так:

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{E}\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H}\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right), \quad (54)$$

и формула (53) примет следующий вид:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) = 4\pi \vec{j}\vec{E} + c \left(\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} \right). \quad (55)$$

В полученном равенстве последнее слагаемое может быть записано в дивергентном виде. Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) &= \nabla_l e_{ikl} E_i H_k = (e_{ikl} \nabla_l E_i) H_k + E_{il} (e_{ikl} \nabla_l H_k) = \\ &= (e_{lik} \nabla_l E_i) H_k - E_{il} (e_{lki} \nabla_l H_k) = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}. \end{aligned} \quad (56)$$

Умножим уравнение (55) на 4π и проинтегрируем его по некоторому фиксированному объему:

$$-\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} \right) dV = \int_V \vec{j}\vec{E} dV + \frac{c}{4\pi} \int_V \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV.$$

В левой части полученного равенства изменим порядок интегрирования по объему и дифференцирования по времени, а интеграл от дивергенции преобразуем по теореме Остроградского-Гаусса в интеграл по поверхности Σ , ограничивающий объем. В результате получается выражение, которое есть ни что иное, как теорема Пойнтинга:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} dV = \int_V \vec{j}\vec{E} dV + \oint_{\Sigma} \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S}. \quad (57)$$

Первый интеграл в правой части уравнения (57) выражает джоулевы потери тепла вследствие протекания тока в среде. Понятно, что интеграл в левой части равенства описывает убыль энергии электромагнитного поля в выделенном объеме. Тогда

$$\epsilon = \int_V \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} dV \quad (58)$$

– это энергия поля, а $w = (\epsilon E^2 + \mu H^2)/8\pi$ – плотность энергии.

Интеграл по поверхности Σ в уравнении (57) есть поток энергии за пределы объема. Величина

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \quad (59)$$

является вектором плотности потока энергии и называется вектором Пойнтинга.

До сих пор мы предполагали, что справедливы соотношения (50) и (51), а проницаемости постоянны. Что будет, если поляризация среды не пропорциональна напряженности электрического поля, а намагниченность не пропорциональна индукции магнитного поля? В силу того, что материальные уравнения являются частными уравнениями, получить выражение для энергии магнитного поля в произвольной среде не удастся. Мы можем получить выражение для дифференциала плотности энергии – см. (54)

$$dw = \frac{\vec{E}d\vec{D} + \vec{H}d\vec{B}}{4\pi}, \quad (60)$$

но и только.

Эти трудности понятны. Нельзя получить замкнутое выражение для энергии поля, содержащее только его характеристики. Электромагнитное поле в среде не может быть «оторвано» от среды. Именно поэтому выражение для энергии (58) содержит как характеристики поля, так и характеристики среды.

Глава 2. ДИЭЛЕКТРИКИ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В главе 1 было показано, что поведение макроскопического поля в среде описывается осредненными уравнениями Максвелла. Эти уравнения содержат феноменологические параметры, которые характеризуют электрическую и магнитную поляризуемость среды, а также ее электропроводность. В простом случае линейных изотропных сред это три функции координат и времени – диэлектрическая проницаемость ε , магнитная проницаемость μ и проводимость σ . Теория Максвелла является феноменологической, она постулирует наличие таких параметров, не объясняя их различие у разных сред. Только молекулярная теория может связать свойства диэлектриков и магнетиков с их молекулярным строением. В данной главе мы размотрим некоторые положения молекулярной теории диэлектриков. При анализе будем пользоваться простыми классическими моделями, хотя, конечно, строгое рассмотрение проблемы требует последовательного квантовомеханического подхода.

Молекулы диэлектриков обладают электрическими дипольными моментами \vec{p} , которые зависят от действующего на молекулу электрического поля с напряженностью \vec{E}' . В общем случае поле \vec{E}' , которое часто называют локальным полем, отличается от среднего (т.е. макроскопического) поля \vec{E} в диэлектрике, совпадая с ним только в случае разреженных газов. В реальных ситуациях поле \vec{E}' мало по сравнению с внутримолекулярным полем. Действительно, в сухом воздухе происходит пробой при напряженности электрического поля $E \approx 30000 \text{ в/см} \approx 10^2$ ед.СГСЭ. Напряженность внутриаомного электрического поля $E_0 \sim 4.8 \cdot 10^{-10} / 10^{-16} \sim 10^6$ ед.СГСЭ. Видно, что самые сильные лабораторные поля на 4 порядка слабее внутримолекулярных.

В силу малости поля \vec{E}' функцию $\vec{p}(\vec{E}')$ можно разложить в ряд. Ограничиваясь линейным порядком, запишем

$$\vec{p}(\vec{E}') = \vec{p}(\vec{E}' = 0) + \left. \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{E}'} \right|_{\vec{E}'=0} \vec{E}' = \vec{p}_0 + \overline{\alpha} \vec{E}' . \quad (61)$$

Здесь $\overline{\alpha}$ – тензор поляризуемости молекулы с компонентами:

$$\alpha_{ik} = \left. \frac{\partial p_i}{\partial E'_k} \right|_{\vec{E}'=0} . \quad (62)$$

В результате дипольный момент молекулы может состоять из двух частей. Постоянная часть \vec{p}_0 не зависит от действующего поля. Она называется собственным дипольным моментом. Вторая часть линейно зависит от действующего поля. Она называется индуцированным дипольным моментом. В случае изотропных молекул $\alpha_{ik} = \alpha \delta_{ik}$, и дипольный момент молекулы таков:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \alpha \vec{E}' . \quad (63)$$

Природа индуцированного дипольного момента физически понятно. В отсутствие действующего поля заряды в молекуле находятся в состоянии энергии, их потенциальная энергия минимальна. При малом смещении относительно положения равновесия потенциальная энергия является квадратичной функцией смещения, т.е. на заряды действует квазиупругая сила.

Зависимость (63) позволяет рассмотреть две предельных ситуации.

1. Квазиупругие молекулы. У них собственный дипольный момент отсутствует, и $\vec{p} = \alpha \vec{E}'$. Диэлектрики, молекулы которых квазиупругие, называются неполярными диэлектриками или диэлектриками I рода. Такие вещества существуют: H_2 , O_2 , CO_2 , CH_4 , CCl_4 .

2. Дипольные молекулы. Они обладают собственным дипольным моментом, а индуцированный дипольный момент мал (жесткие диполи). Обычно это молекулы с ионным типом связи. Диэлектрики, состоящие из таких молекул, называются полярными диэлектриками или диэлектриками II рода. В качестве примера таких диэлектриков можно назвать H_2O , HCl , CH_3Cl , SO_2 , H_2S .

Поляризация неполярных диэлектриков объясняется «растяжением» молекул при действии поля \vec{E}' . Такой механизм поляризации называется деформационным (сдвиговым) – см. рис.6.

Поляризация полярных диэлектриков возникает при повороте молекулярных диполей к направлению действующего поля (рис. 7)..

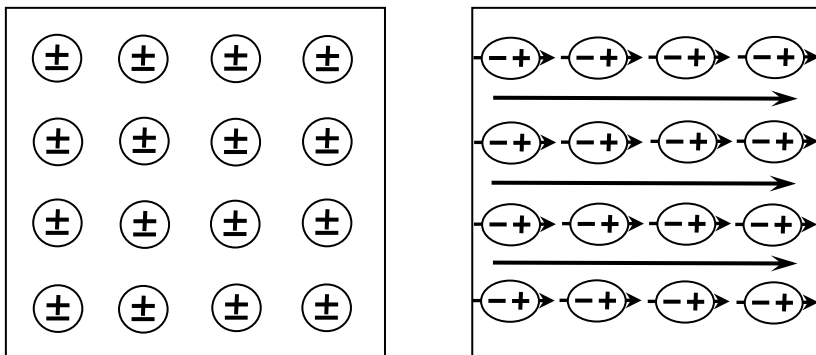


Рис. 6. Поляризация неполярного диэлектрика:
слева – действующее поле отсутствует, справа – поле включено

При включении поля появляется преимущественная ориентация молекулярных диполей. Механизм поляризации часто называют ориентационным.

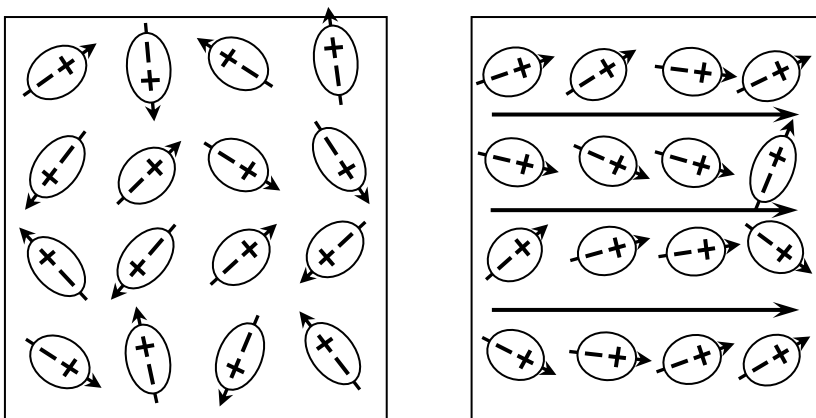


Рис. 7. Поляризация полярного диэлектрика:
слева – действующее поле отсутствует, справа – поле включено

§ 1. Поляризация диэлектриков I рода

Рассмотрим подробнее поляризацию неполярных диэлектриков. Величина индуцированного дипольного момента зависит от жесткости связи зарядов в молекуле. Будем считать все молекулы одинаковыми, поэтому

$$\vec{P} = n\vec{p}. \quad (64)$$

Здесь \vec{P} – вектор поляризации, \vec{p} – дипольный момент молекулы.

Если \vec{E}' – действующее поле, β – поляризуемость молекулы, то

$$\vec{p} = \beta\vec{E}', \quad \vec{P} = \alpha\vec{E} = n\beta\vec{E}'. \quad (65)$$

Будем считать, что действующее поле складывается из макроскопического поля в диэлектрике \vec{E} и поля, создаваемого молекулярными диполями. Естественно предположить, что такая добавка пропорциональна поляризации диэлектрика. Заметим, что такая идея была использована Вейссом для объяснения ферромагнетизма. Тогда

$$\vec{E}' = \vec{E} + \nu\vec{P}. \quad (66)$$

Подставляя выражение (66) в соотношение (65), получаем

$$\alpha\vec{E} = n\beta(\vec{E} + \nu\vec{P}) = n\beta(1 + \nu\alpha)\vec{E}.$$

Разрешая последнее равенство относительно поляризуемости, получим

$$\alpha = n\beta(1 + \nu\alpha),$$

откуда

$$\frac{\alpha}{1 + \nu\alpha} = n\beta. \quad (67)$$

Из каких соображений можно оценить величину ν ? Воспользуемся методом, предложенным Лоренцем. Окружим молекулу сферой радиуса a (рис. 8). Радиус сферы должен быть настолько велик, чтобы распределение молекул вне сферы можно было считать непрерывным. Тогда действующее поле будет состоять из трех составляющих:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (68)$$

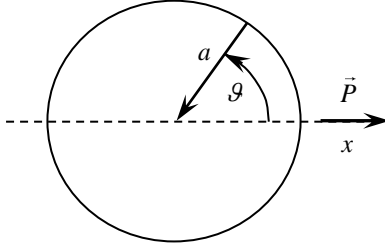


Рис. 8. К вычислению влияния дальних молекул

Здесь \vec{E} – напряженность макроскопического поля в диэлектрике, \vec{E}_1 – напряженность электрического поля, создаваемого молекулярными диполями внутри сферы, \vec{E}_2 – поле, создаваемое диполями, находящимися вне сферы.

Будем считать, что поляризация однородна и объемных поляризационных зарядов не будет. Тогда поле \vec{E}_2 можно вычислить, как поле, создаваемое зарядами, находящимися на поверхности сферы (поле внутри сферической полости). Поверхностная плотность поляризационных зарядов $\sigma' = P \cos \vartheta$.

$$E_{2x} = -\oint \frac{\sigma'}{a^2} \cos \vartheta dS = -\int_0^{2\pi} \int_0^\pi P \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4}{3} \pi P. \quad (69)$$

Ось x на рис. 8 направлена по вектору \vec{P} , поэтому получаем

$$\vec{E}_2 = \frac{4}{3} \pi \vec{P}.$$

Есть два частных случая, когда $\vec{E}_1 = 0$. Во-первых, это кристаллические диэлектрики с кубической кристаллической решеткой. Во-вторых, это случай, когда молекулярные диполи беспорядочно расположены (газы, жидкости). Тогда

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{4}{3} \pi \vec{P} = \left(1 + \frac{4\pi}{3} \alpha\right) \vec{E}. \quad (70)$$

Величина ν оказалась такой: $\nu = 4\pi/3$. Соотношение (67) примет вид:

$$\frac{\alpha}{1 + \frac{4\pi\alpha}{3}} = n\beta. \quad (71)$$

Так как $\alpha = (\varepsilon - 1)/4\pi$, то из (71) получаем

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = 4\pi n\beta. \quad (72)$$

Соотношение (72) называется формулой Клаузиуса-Мосотти.

Что можно сказать о поляризуемости молекулы β ? Для ее определения необходимы квантовомеханические расчеты. Тем не менее, можно привести некоторые соображения. Поляризуемость β имеет размерность объема. Так как она зависит только от структуры молекулы, то можно положить $\beta = \gamma r_0^3$, где r_0 – характерный размер молекулы, а γ – безразмерный параметр. Но тогда

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \sim nV_0, \quad (73)$$

где V_0 – объем молекулы. Если диэлектрик поляризуется слабо, то $\varepsilon \approx 1$. В этом случае соотношение (73) можно переписать так:

$$\varepsilon - 1 = bnV_0, \quad \varepsilon = 1 + bnV_0. \quad (74)$$

Последнее равенство в (74) позволяет сделать вывод, что для таких диэлектриков проникаемость прямо пропорциональна плотности, что уже поддается экспериментальной проверке.

§ 2. Поляризация диэлектриков II рода

Молекулы полярных диэлектриков обладают собственным дипольным моментом. Тем не менее, в отсутствие электрического поля неполярные диэлектрики не поляризованы. Это объясняется хаотической ориентацией молекулярных диполей. Рассмотрим процесс поляризации полярных диэлектриков используя подход, развитый Дебаем. При включении электрического поля молекулярный диполь приобретает энергию $\varepsilon = -\vec{p}_0 \vec{E}$. В результате появляется энергетически выгодная пространственная ориентация диполей.

Число диполей dn в единице объема, дипольный момент кото-

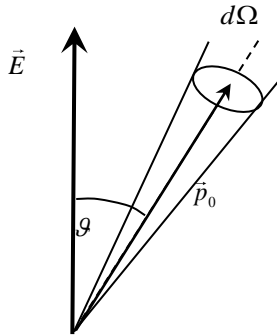


Рис. 9. К вычислению поляризации полярного диэлектрика

рых ориентирован внутри телесного угла $d\Omega$ (см. рис. 9) пропорционально концентрации диполей n и величине телесного угла: $dn = nwd\Omega$. Распределение ориентаций диполя определяется функцией Больцмана w :

$$w = Ce^{-\frac{\varepsilon}{kT}}. \quad (75)$$

Постоянная нормировки C определяется из условия нормировки

$$\int_{\Omega} wd\Omega = 1, \quad C = \frac{1}{\int_{\Omega} e^{-\frac{p_0 E \cos \vartheta}{kT}} d\Omega}. \quad (76)$$

Так как вклад в поляризацию одного диполя равен $p_0 \cos \vartheta$, то

$$dP = p_0 \cos \vartheta nwd\Omega. \quad (77)$$

Проинтегрировав выражение (77) по телесному углу, получим величину поляризации диэлектрика:

$$P = np_0 \frac{\int_{\Omega} \cos \vartheta e^{-\frac{p_0 E \cos \vartheta}{kT}} d\Omega}{\int_{\Omega} e^{-\frac{p_0 E \cos \vartheta}{kT}} d\Omega}. \quad (78)$$

Введем обозначение $x \equiv p_0 E / kT$. В случае сильных полей или (и) низких температур $x \gg 1$, малые значения x соответствуют слабым полям (большим температурам). Тогда

$$P = np_0 \frac{\int_{\Omega} \cos \vartheta e^{x \cos \vartheta} d\Omega}{\int_{\Omega} e^{x \cos \vartheta} d\Omega}. \quad (79)$$

Вычислим интеграл, находящийся в знаменателе выражения (79):

$$z = \int_{\Omega} e^{x \cos \vartheta} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} e^{x \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Введем замену переменной $u = \cos \vartheta$. Тогда

$$z = 2\pi \int_{-1}^1 e^{xu} du = 2\pi \frac{e^x - e^{-x}}{x}. \quad (80)$$

Числитель выражения (79) есть

$$\frac{dz}{dx} = 2\pi \frac{(e^x + e^{-x})x - (e^x - e^{-x})}{x^2}. \quad (81)$$

Тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial x} / z = \text{cth } x - \frac{1}{x}.$$

В результате величина вектора поляризации определяется так:

$$P = np_0 L(x), \quad (82)$$

где $L(x)$ – функция Ланжевена. В данном случае

$$L(x) = \text{cth } x - \frac{1}{x}. \quad (83)$$

Рассмотрим случай малых x (слабые поля). Так как при $x \ll 1$ $\text{th } x \approx x - x^3/3$, то

$$\operatorname{cth} x \approx \frac{1}{x - \frac{x^3}{3}} \approx \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^3}{3} \right).$$

В этом случае

$$L(x) \approx \frac{x}{3}. \quad P = np_0 \frac{x}{3} = \frac{np_0^2}{3kT} E \quad (84)$$

В сильных полях (низкие температуры) аргумент функции Ланжевена велик ($x \gg 1$) и $L(x) \approx 1$. При этом $P = np_0$.

Сделаем некоторые оценки. В реальных условиях величина дипольного момента молекулы в системе СГСЭ $p_0 \sim er_0 = 4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-8} \sim 10^{-18}$. В сухом воздухе энергия диполя в макроскопическом поле $\varepsilon \sim p_0 E = 10^{-18} \cdot 10^2 \sim 10^{-16}$ эрг. Энергия теплового движения молекул $\varepsilon_T \sim kT \sim 1.4 \cdot 10^{-16} \cdot 300 \approx 3 \cdot 10^{-14}$ эрг, т.е. в 300 раз больше. Таким образом, в реальных условиях $x \ll 1$.

Итак, в лабораторных условиях:

$$P = \frac{np_0}{3kT} E, \quad \alpha = \frac{np_0}{3kT}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{4\pi np_0}{3k} \frac{1}{T}.$$

Глава 3. МАГНЕТИКИ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Выше говорилось о том, что поляризация диэлектриков в электрическом поле объясняется поведением зарядов молекул. Намагничивание магнетиков связана с молекулярными токами (гипотеза Ампера). Существование молекулярных токов приводит к тому, что атомы и молекулы могут обладать магнитным моментом. Кроме того, при внесении магнетика в магнитное поле молекулы приобретают дополнительный магнитный момент. В результате формируется макроскопическая намагниченность, причем для многих магнетиков $\vec{M} = \chi \vec{H}$. Величина магнитной восприимчивости χ определяется свойствами магнетика, точнее, молекулярным строением. Существуют магнетики, которые намагничены только в присутствии стороннего магнитного поля. Их намагниченность исчезает при выключении этого поля. Такие магнетики принято делить на две большие группы.

Диамagnetики. Атомы в молекулах не имеют собственного магнитного момента, но возможен индуцированный магнитный момент. Для них характерна слабая намагниченность. Магнитная восприимчивость отрицательна $\chi < 0$, диамagnetики намагничиваются против приложенного поля. Диамagnetиками являются благородные газы, некоторые органические соединения, металлы (медь, серебро).

Парамагнетики. Атомы парамагнетиком обладают магнитным моментом. Механизм намагничивания ориентационный, намагниченность слабая, $\chi > 0$. Магнитная восприимчивость может зависеть от температуры. Можно выделить три типа температурной зависимости восприимчивости парамагнетиков:

- зависимость типа Кюри $\chi = \frac{C}{T}$;
- зависимость типа Кюри-Вейсса $\chi = \frac{C}{T - \Theta}$;
- зависимость типа Паули $\chi = const > 0$.

Парамагнетиками являются некоторые газы (O_2), соли редкоземельных.

Кроме перечисленных магнетиков есть большая группа веществ, которые намагничены и в отсутствие внешнего поля (постоянные магниты). Они называются ферромагнетиками. Для них характерна сильная намагниченность, причем связь вектора намагничивания и напряженности магнитного поля может быть очень сложной. Нелинейный закон. Намагниченность может быть очень чувствительна к изменениям температуры. К ферромагнетикам относятся многие металлы (например, железо, никель).

§ 1. Диамагнетизм

Оставаясь в рамках классического подхода (точнее, квазиклассического) можно получить вполне удовлетворительное объяснение диамагнетизма. В теории Лармора вся электронная оболочка под действием силы Лоренца прецессирует с угловой скоростью

$$\vec{\omega}_L = \frac{e}{2mc} \vec{H}. \quad (85)$$

вокруг направления магнитного поля в веществе. Здесь $e > 0$ – элементарный заряд. Величина $\vec{\omega}_L$ называется Ларморовой частотой.

Магнитный момент одного электрона

$$\vec{M} = -\frac{e}{2mc} \vec{L} = -\frac{e}{2\mu c} \mu \vec{r} \times \vec{v}. \quad (86)$$

Магнитный момент системы движущихся зарядов есть

$$\vec{M} = -\frac{e}{2c} \sum_i \overline{\vec{r}_i \times \vec{v}_i}. \quad (87)$$

Здесь суммирование производится по электронам, а усреднение – по времени. Скорость электрона при эго движении в атоме может быть представлена формулой

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i0} + \vec{\omega}_L \times \vec{r}_i. \quad (88)$$

Первое слагаемое в (88) описывает движение по орбите, второе – движение в результате ларморовой прецессии орбиты. Тогда в формуле

(87) можно выполнить следующие преобразования:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= -\frac{e}{2c} \overline{\sum_i \vec{r}_i \times (\vec{v}_{i0} + \vec{\omega}_L \times \vec{r}_i)} = -\frac{e}{2c} \overline{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{v}_{i0}} - \frac{e}{2c} \overline{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{\omega}_L \times \vec{r}_i} = (89) \\ &= -\frac{e^2}{4mc^2} \overline{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{H} \times \vec{r}_i}.\end{aligned}$$

Расписывая двойное векторное произведение, получим

$$\vec{M} = -\frac{e^2}{4mc^2} \overline{\sum_i \left\{ \vec{H} (\vec{r}_i \vec{r}_i) - \vec{r}_i (\vec{r}_i \vec{H}) \right\}}. \quad (90)$$

Полагая в (90) $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\vec{H} = (0, 0, H)$, получаем

$$\begin{aligned}M_z &= -\frac{e^2}{4mc^2} \overline{\sum_i \left\{ H (x_i^2 + y_i^2 + \cancel{z_i^2}) - \cancel{z_i} (z_i H) \right\}} = (91) \\ &= -\frac{e^2}{4mc^2} H \overline{\sum_i (x_i^2 + y_i^2)}.\end{aligned}$$

Атомы диамагнетика имеют симметричную структуру, поэтому $\overline{r_i^2} = \overline{x_i^2} + \overline{y_i^2} + \overline{z_i^2}$, а поэтому $\overline{x_i^2} = \overline{y_i^2} = \overline{z_i^2} = \overline{r_i^2}/3$. Вводя обозначение a^2 для среднего квадрата радиуса атома:

$$\frac{\sum_i \overline{r_i^2}}{Z} = a^2,$$

получаем вклад атома в намагниченность:

$$M_z = -\frac{e^2 Z a^2}{6mc^2} H. \quad (92)$$

Таким образом, магнитная восприимчивость оказывается такой:

$$\chi = -\frac{e^2 Z a^2}{6mc^2} n. \quad (93)$$

Видим, что температурная зависимость отсутствует, есть зависимость от плотности. Оценим величину восприимчивости

$$|\chi| \sim \frac{25 \cdot 10^{-20} \cdot 10 \cdot 10^{-16} \cdot 10^{19}}{6 \cdot 1.7 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{21}} \sim 10^{-10}$$

Теория Лармора справедлива только для слабых полей, потому что скорость движения электрона по орбите должна быть много больше скорости ларморовой прецессии.

§ 2. Парамагнетики

Парамагнетик – вещество, намагничивающееся во внешнем магнитном поле по направлению поля. В отсутствие внешнего магнитного поля парамагнетик не намагничен. Атомы (ионы) парамагнетика обладают собственным магнитным моментом. Под действием внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов (ионов) парамагнетика (у парамагнитных металлов – спины части электронов проводимости) ориентируются преимущественно по направлению поля. В результате парамагнетик приобретает суммарный магнитный момент, пропорциональный напряжённости поля и направленный по полю. Магнитная восприимчивость парамагнетика всегда положительна. Её абсолютное значение невелико, в слабых полях она не зависит от напряжённости магнитного поля, но очень сильно от температуры.

В предположении возможности произвольной ориентации магнитного момента получаем для намагниченности выражение, аналогичное выражению для поляризации полярных диэлектриков (78):

$$M = n\mu \frac{\int \cos \vartheta e^{\frac{p_m E \cos \vartheta}{kT}} d\Omega}{\int_{\Omega} e^{\frac{p_m E \cos \vartheta}{kT}} d\Omega}.$$

Обозначая $x = p_m H / kT$, получаем

$$M = np_m L(x), \quad L(x) = \text{cth } x - \frac{1}{x}. \quad (94)$$

В слабых полях (высокие температуры) связь намагниченности и напряженности линейная:

$$M = np_m \frac{x}{3} = \frac{np_m^2}{3kT} H.$$

Таким образом, приходим к закону Кюри:

$$\chi = \frac{C}{T},$$

где $C = np_m^2/3k$ – постоянная Кюри.

Квантовая механика вносит свои коррективы в эту простую теорию: число проекций магнитного момента на направление магнитного поля определяется величиной азимутального квантового числа l и равно $2l+1$. Выражение (94) справедливо асимптотически – для бесконечно больших значений момента импульса (и, следовательно, магнитного момента).

Рассмотрим противоположный предельный случай: атом имеет наименьший из возможных магнитный момент, спиновый по происхождению (равен магнетону Бора). В этом случае возможны только две проекции магнитного момента на направление напряженности магнитного поля: по направлению и навстречу магнитному полю.

Тогда число магнитных моментов в единице объема, имеющих положительную проекцию на \vec{H} , равно $w_+ = Ce^{\frac{p_m H}{kT}}$, а отрицательную проекцию – $w_- = Ce^{-\frac{p_m H}{kT}}$. Для постоянной нормировки получаем $C = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ и для намагниченности $M = np_m \operatorname{th} x$. Мы получили закон намагниченности электронного парамагнитного газа.

§ 3. Ферромагнетизм

Ферромагнетизм – совокупность магнитных свойств и явлений в магнитных кристаллических веществах (ферромагнетиках), обладающих самопроизвольной намагниченностью.

Ферромагнетизм обусловлен наличием у электронов устойчивой параллельной ориентации спиновых магнитных моментов. Тепловое движение атомов кристалла разрушает параллельную ориентацию спинов, поэтому при высоких температурах ферромагнетизм отсут-

ствует.

Ферромагнетики – вещества (как правило, в твёрдом кристаллическом или аморфном состоянии), в которых ниже определённой критической температуры (точки Кюри) устанавливается дальний ферромагнитный порядок магнитных моментов атомов, или ионов (в немагнитных кристаллах), или моментов коллективизированных электронов (в металлических кристаллах). Ферромагнетики обладают сильными магнитными свойствами:

- сильно втягиваются в область более сильного магнитного поля;
- магнитная восприимчивость значительно выше нуля;
- при не слишком высоких температурах они обладают самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий.

Среди химических элементов ферромагнитны переходные элементы Fe, Co и Ni и редкоземельные металлы Gd, Tb, Dy, Ho, Er. Ферромагнитны также многочисленные металлические бинарные и более сложные (многокомпонентные) сплавы и соединения упомянутых металлов между собой.

При температурах ниже точки Кюри в ферромагнетиках энергетически выгодной оказывается параллельная ориентация магнитных моментов атомов или молекул в макроскопических областях материала – доменах. Направление намагниченности в разных доменах различно (рис.). Характерные размеры доменов в отсутствие внешнего поля примерно $10^{-3} - 10^{-2}$ см.

При включении поля начинается перестройка магнитной структуры. По мере усиления поля можно выделить три процесса перемаг-

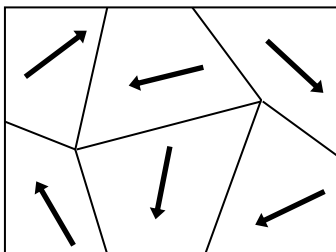


Рис. 10. Доменная структура не намагниченного ферромагнетика

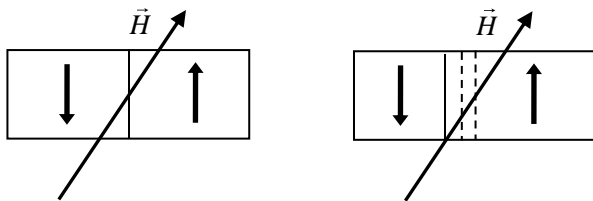


Рис. 11. Смещение границы домена

ничивания:

- слабые поля – обратимое смещение границы (рис. 11): домен с энергетически выгодной ориентацией намагниченности увеличивает свой размер; с уменьшением поля границы возвращаются на прежнее место;

- по мере усиления поля наступают необратимые смещения границ доменов: домен с выгодной ориентацией поглощает домен с энергетически невыгодной ориентацией магнитного момента;

- в сильных полях происходит доворот магнитных моментов доменов до наступления насыщения.

Магнитная восприимчивость ферромагнетиков положительна и

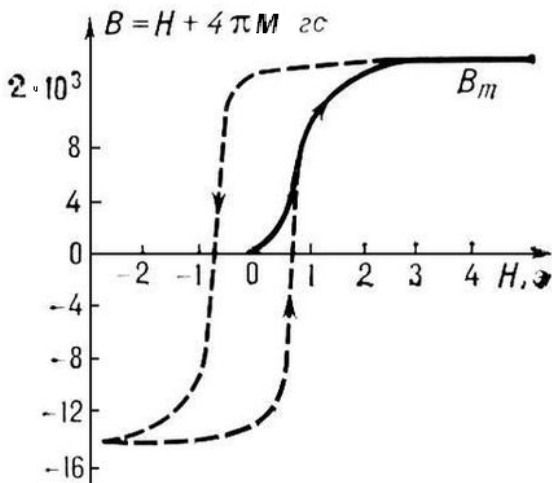


Рис. 12. Магнитный гистерезис

достигает значений 10^4 - 10^5 гс/э, их намагниченность M растет с увеличением напряжённости магнитного поля H нелинейно и в полях 1-100 э достигает предельного значения M_s – магнитного насыщения. Значение M зависит также от "магнитной предыстории" образца, это делает зависимость M от H неоднозначной. На рис.12 показано формирование петли гистерезиса.

§ 4. Феноменологическая теория Вейсса

Перейдем к рассмотрению теории молекулярного поля, предложенной П.Вейссом в 1907 г. для описания температурной зависимости спонтанной намагниченности ферромагнетиков.

При температуре ниже точки Кюри (для железа 720°C) у магнетика появляются ферромагнитные свойства. Аккуратное и полное рассмотрение этого процесса возможно только с позиций квантовой механики. Тем не менее оказалось возможным разобраться в основных особенностях ферромагнетизма, оставаясь в рамках классической физики.

Для того, чтобы учесть взаимодействие спинов между собой, Вейсс ввел молекулярное поле H_m , считая, что на каждый отдельный спин кроме внешнего поля \vec{H} действует еще молекулярное поле H_m , создаваемое магнитными моментами всех остальных атомов: $\vec{H}_{эфф} = \vec{H} + H_m$. Далее следует вполне естественное предположение о том, что молекулярное поле H_m пропорционально средней намагниченности. Таким образом, для учета взаимодействия спинов вводится молекулярное поле $\vec{H}_m = \alpha \vec{M}$. Коэффициент пропорциональности α называется параметром молекулярного поля (постоянная Вейсса).

В основе дальнейших рассуждений лежит теория Ланжевена для намагниченности парамагнетиков. Носителями магнетизма являются электроны. Поэтому функция Ланжевена принимается такой: $L(x) = \text{th } x$. Подставляя вместо внешнего магнитного поля сумму внешнего и внутреннего полей, получаем нелинейное уравнение для нахождения самосогласованного значения намагниченности:

$$M = p_m n \operatorname{th} \left(\frac{p_m H}{kT} + \frac{p_m \alpha M}{kT} \right). \quad (95)$$

Обозначим

$$x = \frac{p_m H}{kT} + \frac{p_m \alpha M}{kT}. \quad (96)$$

Учтем, что $p_m n = M_\infty$ (намагниченность в состоянии насыщения). Тогда уравнение (95) запишется в виде

$$\frac{M}{M_\infty} = \operatorname{th} x. \quad (97)$$

Разрешая (96) относительно M , получим

$$M = \frac{kT}{p_m \alpha} x - \frac{H}{\alpha}. \quad (98)$$

Разделив (98) на M_∞ , получим

$$\frac{M}{M_\infty} = \frac{kT}{p_m \alpha M_\infty} x - \frac{H}{\alpha M_\infty}. \quad (99)$$

Решение системы уравнений (97), (99) позволяет определить

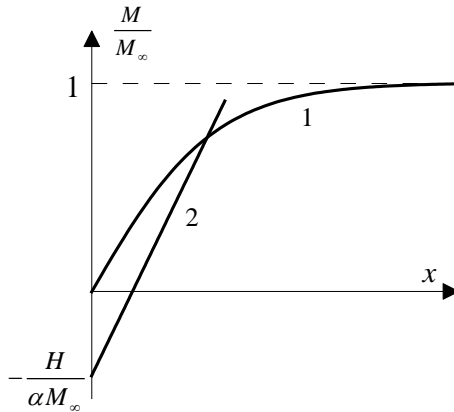


Рис. 13. Намагниченность ферромагнетика

намагниченность ферромагнетика (рис. 13).

Спонтанная намагниченность. Рассмотрим случай когда $H = 0$, $M = M_s$. Уравнения(97), (99) приобретают вид

$$\frac{M}{M_\infty} = \text{th } x, \quad (100)$$

$$\frac{M}{M_\infty} = \frac{kT}{p_m \alpha M_\infty} x. \quad (101)$$

Рассмотрим случай низких температур (T_1): $M_s \approx M_\infty$. При увеличении температуры $M_s/M_\infty \rightarrow 0$ и при $T = \Theta$ (температура Кю-

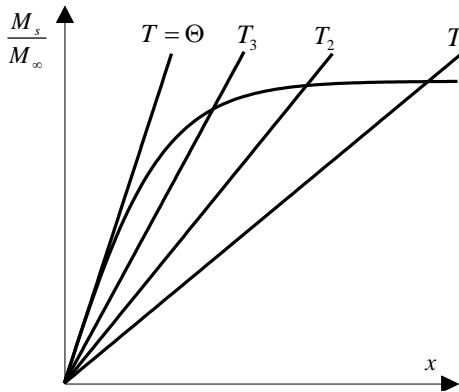


Рис. 14. Температура Кюри и спонтанная намагниченность

ри) спонтанная намагниченность пропадает (рис. 14). Область I – ферромагнетизм, область II – парамагнетизм (рис. 15)

Температура Кюри может быть найдена из того факта, что при низких температурах спонтанная намагниченность порядка намагниченности насыщения:

$$\frac{k\Theta}{\alpha p_m M_\infty} = 1. \quad (102)$$

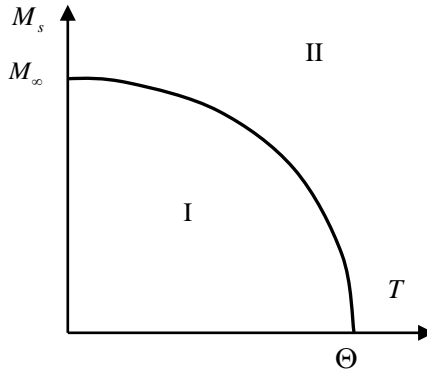


Рис. 15. Области ферромагнитного и парамагнитного состояний

При известной величине α можно определить температуру Кюри.

Поступим иначе. Величина α имеет порядок

$$\alpha = \frac{k\Theta}{p_m M_\infty} \sim \frac{10^{-16} \cdot 10^3}{10^{-20} \cdot 10^3} \sim 10^4 \quad (103)$$

– очень сильное взаимодействие. Какие силы позволяют реализовать такое взаимодействие? Диполь-дипольное взаимодействие $\frac{p_m^2}{a^3} \sim k\Theta$,

т.е. $\Theta \sim \frac{p_m^2}{a^3 k} = \frac{10^{-40}}{10^{-24} \cdot 10^{-16}} = 1K$. Температура Кюри оказывается очень низкой. Таким образом, взаимодействие магнитных моментов не может объяснить существование спонтанной намагниченности.

Обсудим поведение намагниченности вблизи температуры Кюри.

$$\frac{M_s}{M_\infty} = \text{th } x \approx x - \frac{x^3}{3}, \quad (104)$$

$$\frac{M_s}{M_\infty} = \frac{T}{\Theta} x. \quad (105)$$

Из (105) получаем $x = \frac{M_s \Theta}{M_\infty T}$. Подставляя в (104), имеем

$$\frac{M_s}{M_\infty} = \frac{M_s \Theta}{M_\infty T} - \frac{1}{3} \left(\frac{M_s}{M_\infty} \right)^3 \left(\frac{\Theta}{T} \right)^3,$$

$$1 - \frac{\Theta}{T} = -\frac{1}{3} \left(\frac{M_s}{M_\infty} \right)^2 \left(\frac{\Theta}{T} \right)^3.$$

В правой части последнего равенства положим $T/\Theta \approx 1$. Тогда

$$\left(\frac{M_s}{M_\infty} \right)^2 = \frac{3\Theta}{T} - 3, \quad \frac{M_s}{M_\infty} = \sqrt{\frac{3\Theta}{T} - 3}.$$

Ферромагнетик в парамагнитной области. Пусть температура больше температуры Кюри $T > \Theta$. Рассматривая малые x , так что $\text{th } x \approx x$, имеем

$$\frac{M}{M_\infty} = x,$$

$$\frac{M}{M_\infty} = \frac{T}{\Theta} x - \frac{H}{\alpha M_\infty}.$$

Тогда

$$\frac{M}{M_\infty} = \frac{T}{\Theta} \frac{M}{M_\infty} - \frac{H}{\alpha M_\infty}, \quad M \left(1 - \frac{\Theta}{T} \right) = -\frac{H}{\alpha},$$

$$M = \frac{H}{\alpha \left(\frac{T}{\Theta} - 1 \right)} = H \frac{\Theta}{\alpha (T - \Theta)}.$$

Тогда

$$\chi = \frac{\Theta}{\alpha (T - \Theta)} = \frac{C}{(T - \Theta)}.$$

Мы получили закон Кюри-Вейсса.

Глава 4. ПЛОСКИЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Электромагнитные волны могут распространяться не только в вакууме, но и внутри вещества, однако их свойства при этом зависят от свойств вещества. Данная глава посвящена анализу особенностей распространения волн в среде. Рассмотрено затухание таких волн вследствие диссипативных процессов (процессы передачи энергии от волн в тепло).

§ 1. Дисперсионное соотношение

Будем исходить из общих уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (106)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (107)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (108)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho. \quad (109)$$

Для простоты будем считать среду однородной, $\varepsilon, \mu, \sigma = \text{const}$, безграничной и незаряженной. Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (110)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (111)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (112)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (113)$$

Решение этих уравнений ищем в виде плоской волны:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (114)$$

где \vec{k} – волновой вектор, направление которого задает направление распространения волны, а модуль связан с длиной волны соотношением $k = 2\pi/\lambda$. Действие операторов дифференцирования на такую волну сводится к заменам $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$, $\nabla \rightarrow -i\vec{k}$. Тогда получаем

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{E} = -i\vec{k} \times \vec{E},$$

и аналогичные уравнения для магнитного поля. Из (110)-(113) имеем

$$-i\vec{k} \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c} i\omega \vec{H}, \quad (115)$$

$$-i\vec{k} \cdot \vec{H} = 0, \quad (116)$$

$$-i\vec{k} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{\varepsilon\omega i}{c} \vec{E}, \quad (117)$$

$$-i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0. \quad (118)$$

После сокращения на общие множители приходим к алгебраической системе

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\mu\omega}{c} \vec{H}, \quad (119)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0, \quad (120)$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = \frac{4\pi\sigma i}{c} \sigma \vec{E} - \frac{\varepsilon\omega}{c} \vec{E}, \quad (121)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0. \quad (122)$$

Уравнение (122) выполняется, если а) $\vec{E} = 0$; но тогда из (119) и $\vec{H} = 0$; б) $\vec{k} = 0$, т.е. $\lambda = \infty$ – однородное поле, т.е. нет волн. Остается

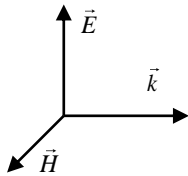


Рис. 16. Поперечность плоской электромагнитной волны

нетривиальный случай $\vec{k} \perp \vec{E}$. Аналогично, из (120) получаем $\vec{k} \perp \vec{H}$. Это означает, что, как и в вакууме, электромагнитная волна в веществе является поперечной (рис. 16).

Из (119) следует связь между магнитным и электрическим полем:

$$\vec{H} = \frac{c}{\mu\omega} \vec{k} \times \vec{E}. \quad (123)$$

Подставим выражение (123) в (121):

$$\frac{c}{\mu\omega} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \left(\frac{4\pi\sigma i}{c} - \frac{\varepsilon\omega}{c} \right) \vec{E}. \quad (124)$$

Так как $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B})$, то

$$\begin{aligned} \frac{c}{\mu\omega} \left[\cancel{k(\vec{k}\vec{E})} - \vec{E}(\vec{k}\vec{k}) \right] &= \left(\frac{4\pi\sigma i}{c} - \frac{\varepsilon\omega}{c} \right) \vec{E}, \\ -\frac{c}{\mu\omega} k^2 \vec{E} &= \left(\frac{4\pi\sigma i}{c} - \frac{\varepsilon\omega}{c} \right) \vec{E}. \end{aligned} \quad (125)$$

Сравнивая коэффициенты в левой и правой частях, получаем связь частоты и волнового числа, т.е. дисперсионное соотношение для волн в однородной среде:

$$k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} - \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} i. \quad (126)$$

§ 2. Идеальный диэлектрик

Пусть диэлектрик идеальный, т.е. $\sigma = 0$. Тогда из (126) получаем дисперсионное соотношение

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (127)$$

Фазовая скорость волны $v_p = \frac{\omega}{k}$, групповая скорость $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

Так как волновое число оказалось пропорциональным циклической частоте, то фазовая и групповая скорости равны, причем

$$v_p = v_g = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (128)$$

Таким образом, волна распространяется со скоростью, отличной от скорости света в вакууме, причем амплитуда волны не меняется в пространстве, т.е. волна распространяется без поглощения. Найдем соотношение между амплитудами колебаний электрического и магнитного поля. Из (123) и (114) получаем

$$H_0 = \frac{c}{\omega\mu} kE_0.$$

Подставляя выражение для волнового числа (127), приходим к следующему соотношению:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0, \text{ или } \sqrt{\mu} H_0 = \sqrt{\varepsilon} E_0 \quad (129)$$

Итак, в идеальном диэлектрике волна очень похожа на волну в вакууме – она поперечная и распространяется без затухания. Влияние среды заключается в отличиях в скорости и в соотношении амплитуд магнитной и электрической компонент.

§ 3. Проводящая среда

Перейдем к более общему случаю проводящей среды. Теперь $k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon\mu}{c^2} - \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} i$. Квадрат волнового числа комплексный, поэтому $k = k' - ik''$.

Что означает комплексность волнового числа? Пусть волна распространяется вдоль оси x . Тогда

$$\vec{E} = \vec{E}_0 = \vec{E}_0 e^{i\omega t} e^{-i(k' - ik'')x} = \vec{E}_0 e^{-ik''x} e^{i(\omega t - k'x)}.$$

Получили плоскую монохроматическую волну, амплитуда которой убывает при распространении. Проводящая среда отличается от диэлектрика тем, что в проводнике есть свободные заряды, следовательно, при распространении волны появятся токи, возбуждается волна тока $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Тогда в единице объема выделяется в единицу времени энергия $\vec{j} \vec{E}$, что и приводит к затуханию волны.

Пусть среда очень хорошо проводит

$$\frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \gg \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}, \text{ т.е. } \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1.$$

Смысл этого условия легко понять, обратившись к уравнению Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \left(\frac{4\pi\sigma}{c} + \frac{i\omega\varepsilon}{c} \right) \vec{E}:$$

плотность тока проводимости много больше плотности тока смещения.

Для металлических проводников $\sigma \sim 10^{17} \text{ c}^{-1}$, $\varepsilon \approx 1$. Поэтому

$$\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \sim \frac{10^{18}}{\omega} \gg 1$$

для частот волны, включая даже оптический диапазон.

§ 4. Волны в хорошо проводящей среде. Скин-эффект

Пренебрегая токами смещения, получаем дисперсионное соотношение

$$k^2 = -i \frac{4\pi\sigma\omega\mu}{c^2}. \quad (130)$$

Возможны две точки зрения на дисперсионное соотношение (130).

1. Рассматриваем монохроматическую волну, которая проникает в проводник. В этом случае частота фиксирована. Тогда ω вещественная, а k – комплексная.

2. В среде есть возмущение электромагнитного поля. Оно имеет характерные пространственные размеры. Тогда необходимо считать

вещественным волновое число, а частота будет комплексной.

Рассмотрим случай 1:

$$k = \sqrt{\frac{4\pi\sigma\omega\mu}{c^2}} \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{4\pi\sigma\omega\mu}{c^2}} \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega\mu}{c^2}} (1-i),$$

$$k = k' - ik'', \quad k' = k'' = \sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega\mu}{c^2}},$$

$$E = E_0 e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)}.$$

Волна проникает на глубину

$$\delta = \frac{1}{k''} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}}. \quad (131)$$

Это так называемый скин-эффект (рис. 17). Для идеального проводника $\delta = 0$. Электропроводность меди в системе СГСЭ $\sigma = 10^{15}$. Поэтому

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad \delta = \frac{c\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi\sigma \cdot 2\pi c}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{c\sigma}} \sim \sqrt{\lambda} \cdot 10^{-12} \text{ см.}$$

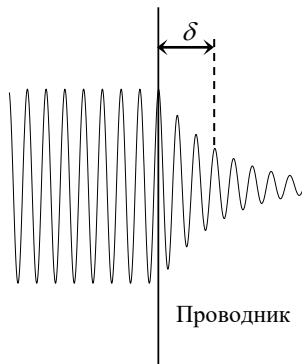


Рис. 17. Скин-эффект

Случай 2. В среде есть возмущение электромагнитного поля. Его характерные размеры $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Тогда частота

$$\omega = -\frac{1}{i} \frac{k^2 c^2}{4\pi\sigma\mu} = i|\omega|.$$

$$E = E_0 e^{i(\omega k - kx)} = E_0 e^{-|\omega|t} e^{-ikx}.$$

Возмущение затухает с характерным временем

$$\tau = \frac{1}{|\omega|} = \frac{4\pi\sigma\mu}{k^2 c^2} = \frac{\sigma\mu\lambda^2}{\pi c^2}.$$

Для меди

$$\tau \sim \frac{10^{15}}{3 \cdot 10^{21}} \lambda^2 \sim 10^{-6} \lambda^2 \text{ с.}$$

Метровые возмущения «расплываются» практически мгновенно.

§ 5. Условия на границе идеального проводника

Рассмотрим граничные условия для поля на границе идеального проводника

Будем использовать общие граничные условия: $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$ (σ – поверхностная плотность заряда), $E_{2\tau} = E_{1\tau}$, $B_{2n} = B_{1n}$,

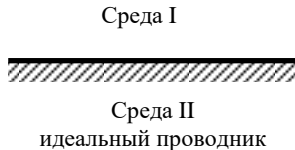


Рис. 18. К выводу условий на границе идеального проводника

$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i$ (i – линейная плотность поверхностных токов проводимости).

Внутри идеального проводника поле отсутствует: $D_{1n} = 0$, $E_{1\tau} = 0$, $B_{1n} = 0$, $H_{1\tau} = 0$. Тогда $D_{2n} = 4\pi\sigma$, $E_{2n} = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$, $E_{2\tau} = 0$.

Электрическое поле над поверхностью идеального проводника имеет только нормальную составляющую в меру заряженности поверхности.

$B_{2n} = 0$, $H_{2n} = 0$, $H_{2\tau} = \frac{4\pi}{c} i$ – магнитное поле имеет только тангенциальную составляющую.

§ 6. Распространение света. Законы отражения и преломления

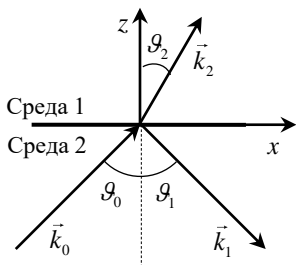


Рис. 19. Отражение и преломление света

При падении плоской волны на поверхность раздела сред с разными свойствами нужно, кроме падающей волны, рассматривать волны преломленную и отраженную. В силу линейности уравнений Максвелла комбинация решений есть опять решение, поэтому нам нужно заботиться лишь о выполнении граничных условий на поверхности раздела (плоскость $z = 0$ на рис. 19). Однородность в плоскости xu приводит к одинаковости проекций волнового вектора k_x и k_y для трех волн. Это означает,

что направления распространения всех волн лежат в одной плоскости, выберем ее в качестве плоскости xz .

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x}. \quad (132)$$

Магнитную проницаемость сред принимаем равной единице. Пусть первая среда прозрачна. Для такой среды дисперсионное соотношение вещественно $k = n \frac{\omega}{c}$, где показатель преломления среды

$n = \sqrt{\varepsilon}$. Так как $k_0^2 = k_1^2$, т.е. $k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2 = k_{1x}^2 + k_{1y}^2 + k_{1z}^2$, то

$$k_{1z} = -k_{0z} = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0, \quad (133)$$

$$k_{2x}^2 + k_{2y}^2 + k_{2z}^2 = \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2},$$

$$\begin{aligned} k_{2z}^2 &= \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - k_{2x}^2 - k_{2y}^2 = \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - k_{0x}^2 - k_{0y}^2 = \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - (k_0^2 - k_{0z}^2) = \\ &= \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} + k_{0z}^2 = \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} + \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} \cos^2 \vartheta_0 = \\ &= \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} (1 - \cos^2 \vartheta_0), \end{aligned}$$

$$k_{2z} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_0}. \quad (134)$$

Векторы \vec{k}_0 и \vec{k}_1 в силу предположения о прозрачности первой среды вещественны. В поглощающей среде величина k_{2z} комплексна, ее вещественная часть положительна, поэтому в (134) и выбран такой знак. Если и вторая среда прозрачна, то составляющая k_{2z} вещественна. Так как $k_{0x} = k_{1x}$ и $k_{1z} = -k_{0z}$, то $\vartheta_0 = \vartheta_1$. Мы получили закон отражения.

$$\begin{aligned} k_{2x} = k_{0x}, \quad k_2 \sin \vartheta_2 = k_0 \sin \vartheta_0, \quad \sqrt{\varepsilon_2} \sin \vartheta_2 = \sqrt{\varepsilon_1} \sin \vartheta_1, \\ \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2} \end{aligned} \quad (135)$$

– закон преломления.

§ 7. Формулы Френеля

Для определения амплитуд необходимо обратиться к условиям

на границе сред. Рассмотрим отдельно случай, когда вектор напряженности электрического поля в падающей волне лежит в плоскости падения, и случай, когда \vec{E} ортогонален плоскости падения.

Пусть в падающей волне вектор \vec{E}_0 перпендикулярен к плоскости падения. Очевидно, это относится и к векторам \vec{E}_1 и \vec{E}_2 . Предполагаем, что поверхность раздела сред не заряжена и по ней не текут токи проводимости. На границе y -компонента напряженности электрического поля непрерывна. Так как в плоской волне выполняется соотношение (123), то можно записать

$$H_x = \frac{c}{\omega\mu} (\cancel{k_y E_z} - k_z E_y) = -\frac{c}{\omega} k_z E_y$$

(в последнем равенстве положено $\mu = 1$). Поле в среде 1 есть сумма полей в падающей и отраженной волне:

$$E_0 + E_1 = E_2, \quad H_{0x} + H_{1x} = H_{2x},$$

$$\frac{c}{\omega} k_{0z} E_0 + \frac{c}{\omega} k_{1z} E_1 = \frac{c}{\omega} k_{2z} E_2.$$

Учитывая, что $k_{1z} = -k_{0z}$, получаем

$$k_{0z} E_0 - k_{0z} E_1 = k_{2z} E_2, \quad (136)$$

$$E_0 + E_1 = E_2.$$

Подставляя из второго равенства из (136) выражение для E_2 в первое равенство, получаем

$$k_{0z} E_0 - k_{0z} E_1 = k_{2z} E_0 + k_{2z} E_1,$$

откуда

$$E_1 = \frac{k_{0z} - k_{2z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0, \quad E_2 = \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0. \quad (137)$$

Это и есть формулы Френеля. Пусть теперь среды прозрачны. Тогда в силу (127) и (134)

$$E_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_0}} E_0, \quad (138)$$

$$E_2 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_0}} E_0.$$

Формулы (137) могут быть записаны и в другом виде:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{k_{0z} - k_{2z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0 = \frac{k_0 \cos \vartheta_0 - k_2 \cos \vartheta_2}{k_0 \cos \vartheta_0 - k_2 \cos \vartheta_2} E_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta_2}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta_2} E_0 = \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_0} \cos \vartheta_0 - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta_2}{\sqrt{\varepsilon_2} \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_0} \cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta_2} E_0 = \frac{\sin \vartheta_2 \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_2 \cos \vartheta_0 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_0} E_0. \end{aligned}$$

$$E_1 = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_0)}{\sin(\vartheta_2 + \vartheta_0)} E_0; \quad (139)$$

$$E_2 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta_2} E_0 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_2} \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_0} \cos \vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon_2} \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_0} \cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta_2} E_0,$$

$$E_2 = \frac{2 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_0}{\sin(\vartheta_2 + \vartheta_0)} E_0. \quad (140)$$

Случай 2. В падающей волне \vec{E} лежит в плоскости падения. Тогда вектор \vec{H} ортогонален этой плоскости:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Полагая $E, H \sim e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$, получаем

$$-i\vec{k} \times \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} i\omega \vec{E}, \quad \vec{E} = -\frac{c}{\varepsilon\omega} \vec{k} \times \vec{H},$$

$$E_x = -\frac{c}{\varepsilon\omega} \left(k_y H_z - k_z H_y \right) = \frac{c}{\varepsilon\omega} k_z H_y. \quad (141)$$

Тогда имеем

$$H_0 + H_1 = H_2, \quad (142)$$

$$E_{0x} + E_{1x} = E_{2x}.$$

Подставляя выражение (141), получаем

$$H_0 + H_1 = H_2, \quad (143)$$

$$\frac{k_{0z}}{\varepsilon_1} H_0 + \frac{k_{1z}}{\varepsilon_1} H_1 = \frac{k_{2z}}{\varepsilon_2} H_2.$$

Решая систему (143), получаем

$$H_1 = \frac{k_{0z}\varepsilon_2 - k_{2z}\varepsilon_1}{k_{0z}\varepsilon_2 + k_{2z}\varepsilon_1} H_0, \quad (144)$$

$$H_2 = \frac{2k_{0z}\varepsilon_2}{k_{0z}\varepsilon_2 + k_{2z}\varepsilon_1} H_0,$$

$$H_2 = \frac{2\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_0}{\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2}\cos\vartheta_2 + \varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_0} H_0.$$

Подставим в последнее равенство $\sqrt{\varepsilon_2} = \sqrt{\varepsilon_1}\sin\vartheta_0/\sin\vartheta_2$:

$$H_2 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_2}\cos\vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_2 + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\vartheta_0}.$$

Еще одна такая подстановка:

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0}{\sin\vartheta_2 \left(\sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_2 + \sqrt{\varepsilon_1}\frac{\sin\vartheta_0}{\sin\vartheta_2}\cos\vartheta_0 \right)} H_0 = \\ &= \frac{2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0} H_0. \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\sin(\vartheta_0 + \vartheta_2) \cos(\vartheta_0 - \vartheta_2) = \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2.$$

Поэтому

$$H_2 = \frac{\sin 2\vartheta_0}{\sin(\vartheta_0 + \vartheta_2) \cos(\vartheta_0 - \vartheta_2)} H_0; \quad (145)$$

$$H_1 = \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 - \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta_2}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 + \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta_2} H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta_0 - \sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_2}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_2} H_0 =$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_2} \cos \vartheta_0 - \sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_2}{\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_2} \cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_2} H_0 = \frac{\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_2} H_0 =$$

$$= \frac{\sin(\vartheta_0 - \vartheta_2) \cos(\vartheta_0 + \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_0 + \vartheta_2) \cos(\vartheta_0 - \vartheta_2)};$$

$$H_1 = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_0 - \vartheta_2)}{\operatorname{tg}(\vartheta_0 + \vartheta_2)} H_0. \quad (146)$$

Сведем вместе полученные формулы

$$E_{1\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_0}} E_{0\perp} = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_0)}{\sin(\vartheta_2 + \vartheta_0)} E_{0\perp}; \quad (147)$$

$$E_{2\perp} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_0}} E_{0\perp} = \frac{2 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_0}{\sin(\vartheta_2 + \vartheta_0)} E_{0\perp}; \quad (148)$$

$$H_{1\perp} = \frac{\varepsilon_2 \cos \vartheta_0 - \sqrt{\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_0)}}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_0)}} H_{0\perp} = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_2 - \vartheta_0)}{\operatorname{tg}(\vartheta_2 + \vartheta_0)} H_{0\perp}; \quad (149)$$

$$H_{2\perp} = \frac{2\varepsilon_2 \cos \vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_0)}} H_{0\perp} =$$

$$= \frac{\sin 2\vartheta_0}{\sin(\vartheta_2 + \vartheta_0)\cos(\vartheta_2 - \vartheta_0)} H_{0\perp}. \quad (150)$$

Полученные формулы позволяют найти коэффициент отражения волны при падении ее на поверхность раздела.

Вектор плотности потока энергии $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$. Так как $\vec{E} \perp \vec{H}$ и $\sqrt{\varepsilon} E = H$, то $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon} E^2 \vec{k}$. При нормальном падении коэффициент отражения

$$R = \frac{\langle S_{1z} \rangle}{\langle S_{0z} \rangle} = \left| \frac{E_1^2}{E_2^2} \right|.$$

Используя формулу (147), получаем

$$R = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \right|^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2.$$

Пусть $n_1 = 1$, а $n_2 = \frac{4}{3}$. Тогда

$$R = \left(\frac{1 - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}} \right)^2 = \left(\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 7} \right)^2 = \frac{1}{49} \approx 2\%.$$

Обсудим величины фаз волн. При отражении от прозрачных сред коэффициенты, связывающие E_0 , E_1 и E_2 , вещественны. Это значит, что фаза волны при отражении либо не меняется, либо меняется на π .

Пусть $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Согласно (148)

$$E_{2\perp} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_0}{n_1 \cos \vartheta_0 + n_1 \sqrt{\frac{n_2}{n_1} - \sin^2 \vartheta_0}} E_{0\perp}.$$

Аналогично и для $H_{2\perp}$. Подкоренное выражение в знаменателе

положительно, положителен и весь коэффициент перед $E_{0\perp}$. Это означает, что фазы падающей и проходящей волн совпадают.

Отражение может произойти с изменением фазы. Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ (случай полного внутреннего отражения пока не рассматриваем). Тогда $\vartheta_2 > \vartheta_0$. Но тогда в (147) $\sin(\vartheta_2 - \vartheta_0) > 0$ и при отражении нет изменения фазы (аналогично и для (149)). Если же $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $\vartheta_2 < \vartheta_0$ и коэффициент перед $E_{0\perp}$ в (147) – коэффициент перед $H_{0\perp}$ в (149) отрицателен. В результате этого при отражении фаза волны скачком меняется на π , и это происходит при любой величине угла падения ϑ_0 .

При наклонном падении коэффициенты отражения таковы:

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\vartheta_2 - \vartheta_0)}{\sin^2(\vartheta_2 + \vartheta_0)}, \quad R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\vartheta_2 - \vartheta_0)}{\operatorname{tg}^2(\vartheta_2 + \vartheta_0)}. \quad (151)$$

Пусть волна падает на границу сред под углом $\vartheta_0 = \vartheta_B$ таким, что $\vartheta_2 + \vartheta_B = \frac{\pi}{2}$. При этом условии отраженный луч и преломленный взаимно перпендикулярны. Тогда

$$\frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \vartheta_B}{\sin \vartheta_2} = \frac{\sin \vartheta_B}{\sin\left(\vartheta_B + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin \vartheta_B}{\cos \vartheta_B},$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_B = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (152)$$

Угол падения ϑ_B называется углом Брюстера. При этом в (151) $\operatorname{tg}(\vartheta_2 + \vartheta_B) = \infty$. Коэффициент $R_{\parallel} = 0$ – отраженный свет полностью поляризован так, что в нем вектор напряженности электрического поля ортогонален плоскости падения. Проходящая волна при этом частично поляризована:

$$\frac{R_{\parallel}}{R_{\perp}} = \frac{\cos^2(\vartheta_2 + \vartheta_B)}{\cos^2(\vartheta_2 - \vartheta_B)} < 1$$

Интересен случай полного внутреннего отражения. Отражающая среда менее плотная:

$$\vartheta_0 = \vartheta_r, \quad \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \vartheta_r = \frac{n_2}{n_1};$$

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_r\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_r\right)} = R_{\parallel} = 1.$$

Световая волна от границы отражается полностью, хотя это не означает, что во второй среде поле отсутствует. Попробуйте сами показать, что при полном внутреннем отражении поле во второй среде экспоненциально убывает при удалении от поверхности раздела.

§ 8. Поляризация в быстропеременном электрическом поле

Из теории Максвелла следует, что в диэлектрике $v_p = c/n$, дисперсия отсутствует. Теория Максвелла феноменологическая. Для описания дисперсии необходимо рассмотреть взаимодействие световой волны с молекулами вещества.

Рассмотрим модель квазиупругого электрона (модель атома Томпсона). На электрон в атоме действует упругая возвращающая сила. Модель является чрезвычайно грубой, но даже она позволяет описать дисперсию света. Уравнение движения электрона:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{r}} + e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}. \quad (153)$$

В правой части этого равенства первое слагаемое описывает упругую силу, второе – силу радиационного торможения. Магнитной составляющей силы Лоренца пренебрежем в силу малости множителя v/c . Тогда в электрическом поле плоской волны

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{m}\vec{r} + \frac{2e^2}{3mc^3}\ddot{\vec{r}} + \frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (154)$$

Так как $k/m = \omega_0^2$ – собственная частота колебаний электрона, получа-

ем уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} - \frac{2e^2}{3mc^3} \dddot{\vec{r}} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (155)$$

Решение уравнения (155) ищем в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$:

$$(i\omega)^2 \vec{r}_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 \vec{r}_0 e^{i\omega t} - \frac{2e^2}{3mc^3} (i\omega)^2 (i\omega) \vec{r}_0 e^{i\omega t} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{i\omega t},$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2e^2}{3mc^3} \omega^2 i\omega \right) \vec{r}_0 = \frac{e}{m} \vec{E}_0.$$

Введем обозначение

$$\gamma = \frac{2e^2 \omega^2}{3mc^3}.$$

Тогда

$$\vec{r}_0 = \frac{\frac{e}{m} \vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}.$$

Умножая обе части равенства на $e^{i\omega t}$, получаем

$$\vec{r} = \frac{\frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}, \quad \vec{p} = \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \vec{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Так как $\vec{p} = \beta \vec{E}$, то для поляризуемости молекулы получаем

$$\beta = \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}; \quad (156)$$

$$\alpha = n_0 \beta = \frac{\frac{n_0 e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 + \frac{4\pi n_0 e^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}, \quad (157)$$

где n_0 – концентрация. Полагая показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ и учитывая, что в последнем равенстве дробь мала, имеем

$$n \approx 1 + \frac{2\pi n_0 e^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (158)$$

Показатель преломления оказывается комплексной величиной. Так как в плоской волне, распространяющейся вдоль оси x , напряженность электрического поля меняется по закону

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} = \vec{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)} = \vec{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{nx}{c}\right)},$$

то, полагая $n = n' - in''$, получаем

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega n' x}{c}\right)} e^{-\frac{\omega n'' x}{c}}.$$

Мы видим, что мнимая часть показателя преломления описывает поглощение света средой. Выполняя в (157) суммирование по различным «сортам» осцилляторов, запишем

$$\varepsilon = 1 + 4\pi \sum_k \frac{n_k \frac{e^2}{m}}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i\omega\gamma},$$

$$n = 1 + 2\pi \sum_k \frac{n_k \frac{e^2}{m}}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = 1 + 2\pi \sum_k \frac{n_k \frac{e^2}{m} (\omega_{0k}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} = n' - in'',$$

$$n' = 1 + 2\pi \sum_k \frac{n_k \frac{e^2}{m} (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}, \quad (159)$$

$$n'' = 2\pi \sum_k \frac{n_k \frac{e^2}{m} \omega\gamma}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}. \quad (160)$$

Глава 5. ВОЛНОВОДЫ

§ 1. Передача электромагнитной энергии вдоль линий передач

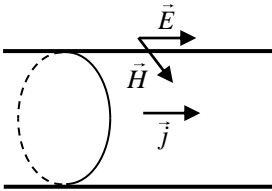


Рис. 20. Поле около круглого провода

Вдоль прямого провода течет постоянный ток плотностью \vec{j} . Провод имеет форму кругового цилиндра, радиус сечения R (рис. 20). Если в проводе отсутствуют сторонние силы, то напряженность электрического поля в проводе $\vec{E} = \vec{j}/\sigma$ и направлена вдоль оси провода. Так как на границе сред тангенциальная составляющая напряженности электрического поля непрерывна, то и над поверхностью провода напряженность \vec{E} будет такой же. Тогда напряженность магнитного поля будет ортогональна вектору плотности тока и направлена по касательной к поверхности провода. Используя теорему о циркуляции, получим величину напряженности магнитного поля вблизи поверхности провода $H = 2\pi R j/c$. Вектор плотности потока энергии направлен к оси провода, и его величина равна

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{j^2 R}{2\sigma}. \quad (161)$$

Электромагнитная энергия втекает из окружающего пространства в проводник через его боковую поверхность. На участке длиной l за единицу времени втекает энергия

$$w = S \cdot 2\pi R l = \frac{j^2}{\sigma} \pi R^2 l.$$

Но согласно закону Джоуля-Ленца именно такая мощность выделяется в проводнике при протекании в нем тока.

Таким образом, при протекании тока вся выделяемая в виде тепла энергия в проводнике поступает в проводник из окружающего пространства. Таким образом приходим к выводу: энергия передается не по проводам, а в пространстве, окружающем эти провода. Провода играют роль направляющих.

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется коаксиальный кабель, состоящий из центрального провода (жилы) и оболочки, между которыми расположен изолятор (рис. 21).

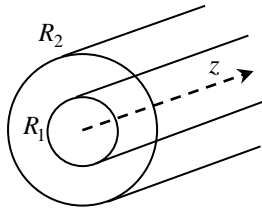


Рис. 21

Пусть радиус сечения жилы R_1 , оболочки – R_2 . По жиле и оболочке текут постоянные токи $I_1 = I_2 = I$ в противоположных направлениях. Для упрощения примем, что материал оболочки и жилы не обладает электрическим сопротивлением, так что энергия передается по кабелю без потерь. Тогда электрический потенциал вдоль кабеля не меняется, все падение напряжения U происходит на потребителе. Отсюда следует, что между оболочкой и жилой разность потенциалов равна U . Введем полярные координаты (r, α) в плоскости сечения кабеля. В силу аксиальной симметрии компонента напряженности электрического поля $E_\alpha = 0$. Линии напряженности магнитного поля являются окружностями. Так как потерь энергии в проводе нет, то радиальная компонента вектора Умова-Пойнтинга отсутствует $S_r = 0$. Но тогда компонента $E_z = 0$. Отсюда

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rE_r) = 0, \quad E_r = \frac{a_0}{r},$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = a_0 \ln \frac{R_2}{R_1},$$

$$E_r = \frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r}, \quad H_\alpha = \frac{2I}{cr}.$$

Тогда

$$S = S_z = \frac{c}{4\pi} E_r H_\alpha = \frac{IU}{2\pi \ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r^2}.$$

Электромагнитная энергия передается между жилой и оболочкой вдоль провода. Вне кабеля поле отсутствует, нет и потока энергии. Полный поток через поперечное сечение провода

$$w = \int_{R_1}^{R_2} S_z 2\pi r dr = IU.$$

А это и есть мощность, выделяемая на потребителе. Таким образом, энергия доставляется потребителю вне проводов.

Выше токи полагались постоянными. Такое ограничение рассмотрения процесса не является принципиальным. При протекании переменного тока напряженности \vec{E} и \vec{H} меняют знак одновременно, поэтому вектор плотности потока энергии направления не меняет.

§ 2. Переменный ток в проводнике

Рассмотрим распределение тока по сечению однородного проводника в случае протекания переменного тока. Проводник прямой, тонкий, его поперечные размеры много меньше его длины. Сечение круговое. В плоскости сечения введем полярные координаты r, α , вдоль оси проводника направим ось z . Напряженность электрического поля внутри проводника имеет только проекцию на ось z : $\vec{E} = (0, 0, E_z = E)$, а напряженность магнитного поля $\vec{H} = (0, H_\alpha, 0)$. Поля подчиняются уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (162)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} \quad (163)$$

(током смещения пренебрегаем в силу его малости). В силу однородности проводника объемные заряды отсутствуют и $\operatorname{div} \vec{E} = 0$. Применим к (162) операцию вычисления rot . Учтывая, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E},$$

получаем

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}.$$

Поставляя $\operatorname{rot} \vec{H}$ из (163), получим

$$\Delta \vec{E} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (164)$$

Для определения напряженности поля получаем гиперболическое уравнение. Предполагая, что $E \sim \exp(-i\omega t)$ и используя цилиндрические координаты, получаем из (164)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE}{dr} \right) = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} i\omega E$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE}{dr} \right) + k^2 E = 0, \quad (165)$$

где

$$k^2 = \frac{2i}{\delta}, \quad k = \frac{\sqrt{2i}}{\delta} = \frac{1+i}{\delta}, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}},$$

δ – толщина скин-слоя. Произведем замену переменной $x = kr$. Тогда уравнение (165) примет вид

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dE}{dx} \right) + E = 0. \quad (166)$$

Уравнение (166) есть уравнение Бесселя нулевого порядка. Таким образом,

$$E = E_z = aJ_0(kr)e^{-iot}. \quad (167)$$

В случае малых частот толщина скин-слоя велика и $|kr| \ll 1$. Воспользуемся представлением функций Бесселя в виде степенного ряда:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}. \quad (168)$$

При $\nu = 0$ получаем

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[\Gamma(n+1)]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \quad (169)$$

Учитывая малость модуля аргумента, получим

$$J_0 \approx \frac{1}{\Gamma(1)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^0 - \frac{1}{\Gamma(2)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{\Gamma(3)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4.$$

Так как $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2! = 2$, то последнее выражение примет вид

$$J_0 \approx 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^4.$$

Так как

$$x = \frac{\sqrt{2i}}{\delta} r, \quad \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{i}{2}} \frac{r}{\delta},$$

то

$$E \approx a \left[1 - \frac{i}{2} \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{r}{\delta}\right)^4 \right] e^{-iot}.$$

Амплитуда напряженности электрического поля

$$\begin{aligned}
 E_m &= a \left| 1 - \frac{i}{2} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 \right| = \\
 &= a \sqrt{\left[1 - \frac{1}{16} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 - \frac{i}{2} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 \right] \cdot \left[1 - \frac{1}{16} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 + \frac{i}{2} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 \right]} = \\
 &= a \sqrt{\left[1 - \frac{1}{16} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 \right]^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4} = a \sqrt{1 - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 + \frac{1}{256} \left(\frac{r}{\delta} \right)^8 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4}, \\
 E_m &\approx a \sqrt{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4} \approx a \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 \right].
 \end{aligned}$$

В силу закона Ома плотность тока незначительно ($r/\delta \ll 1$) увеличивается с удалением от оси провода.

Если частоты достаточно велики, то толщина скин-слоя может быть много меньше поперечных размеров провода. Тогда $r/\delta \gg 1$, $|kr| \gg 1$ и можно воспользоваться асимптотическим порядком функций Бесселя

$$\begin{aligned}
 J_0 \left(\sqrt{2i} \frac{r}{\delta} \right) &\sim \sqrt{\frac{\delta}{r}} e^{(1-i)\frac{r}{\delta}}, \quad E_z \sim e^{(1-i)\frac{r}{\delta}} e^{-i\omega t}, \\
 |E_z| &\sim e^{\frac{r}{\delta}} \sim e^{\sqrt{\omega} r}.
 \end{aligned}$$

Плотность тока резко увеличивается к границе. Фактически весь ток течет в слое толщиной δ , что приводит к резкому увеличению сопротивления.

§ 3. Распространение электромагнитных волн в волноводах

Волновод представляет собой полую трубу. Рассмотрим прямолинейный цилиндрический волновод с односвязной формой поперечного сечения. Стенки волновода идеально проводящие. Рассмотрим

распространение волн, бегущих вдоль волновода, полагая

$$\vec{E}, \vec{H} \sim e^{i(\omega t - k_z z)}$$

(ось z направлена вдоль волновода).

1. В волне $H_z = 0$, магнитное поле чисто поперечное. Такие волны называются волнами электрического типа или E -волнами.

$$\text{rot } \vec{E} = -i \frac{\omega}{c} \vec{H}, \quad (170)$$

$$\text{rot } \vec{H} = i \frac{\omega}{c} \vec{E}. \quad (171)$$

Проекции уравнений на оси x и y :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i \frac{\omega}{c} H_x, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -i \frac{\omega}{c} H_x, \quad (172)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i \frac{\omega}{c} H_y, \quad ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = i \frac{\omega}{c} H_y, \quad (173)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} E_x, \quad ik_z H_y = i \frac{\omega}{c} E_x, \quad (174)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i \frac{\omega}{c} E_y, \quad -ik_z H_x = i \frac{\omega}{c} E_y. \quad (175)$$

Соотношения (172)-(175) позволяют выразить E_x, E_y, H_x, H_y через E_z . Умножим (173) на ik_z , уравнение (174) умножим на $i\omega/c$:

$$-k_z^2 E_x + ik_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = -k_z \frac{\omega}{c} H_y, \quad (176)$$

$$k_z \frac{\omega}{c} H_y = \frac{\omega^2}{c^2} E_x. \quad (177)$$

Подставляя из (177) H_y в (176), получим

$$-k_z^2 E_x + ik_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_x, \quad \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) E_x = -ik_z \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

$$E_x = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2. \quad (178)$$

Умножим уравнение (172) на ik_z , а уравнение (175) – на $i\omega/c$:

$$ik_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - k_z^2 E_y = k_z \frac{\omega}{c} H_x, \quad (179)$$

$$k_z \frac{\omega}{c} H_x = -\frac{\omega^2}{c^2} E_y, \quad (180)$$

и подставим выражение для H_x из (180) в (179):

$$ik_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - k_z^2 E_y = -\frac{\omega^2}{c^2} E_y, \quad (181)$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) E_y = ik_z \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}. \quad (182)$$

Теперь умножим уравнение (172) на $i\omega/c$, а уравнение (175) – на: ik_z :

$$i \frac{\omega}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y} - k_z \frac{\omega}{c} E_y = \frac{\omega^2}{c^2} H_x, \quad (183)$$

$$k_z^2 H_x = -k_z \frac{\omega}{c} E_y. \quad (184)$$

Подставим выражение для E_y из (184) в (183):

$$i \frac{\omega}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y} + k_z^2 H_x = \frac{\omega^2}{c^2} H_x, \quad i \frac{\omega}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) H_x, \quad (185)$$

$$H_x = i \frac{\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}. \quad (186)$$

Теперь умножим уравнение (173) на $i\omega/c$, а уравнение (174) – на: ik_z :

$$-k_z \frac{\omega}{c} E_x + i \frac{\omega}{c} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\omega^2}{c^2} H_y, \quad (187)$$

$$k_z^2 H_y = k_z \frac{\omega}{c} E_x. \quad (188)$$

Подставляя выражение для E_x из (188) в (187), получаем

$$\begin{aligned} -k_z^2 H_y + i \frac{\omega}{c} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\omega^2}{c^2} H_y, & \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) H_y &= -i \frac{\omega}{c} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ H_y &= -i \frac{\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (189)$$

Сведем вместе полученные выражения:

$$E_x = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (190)$$

$$H_x = \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (191)$$

Для определения продольной компоненты напряженности электрического поля запишем проекцию на ось z уравнения (171):

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i \frac{\omega}{c} E_z.$$

После подстановки выражений для H_x и H_y получаем

$$\begin{aligned} -i \frac{\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - i \frac{\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} &= i \frac{\omega}{c} E_z, \\ \Delta_2 E_z + \kappa^2 E_z &= 0. \end{aligned} \quad (192)$$

На границе с идеальным проводником тангенциальная компонента электрического поля отсутствует, поэтому граничное условие для уравнения (192) имеет вид

$$E_z|_S = 0. \quad (193)$$

2. В волне $E_z = 0$, электрическое поле чисто поперечное. Такие волны называются волнами магнитного типа, или H -волнами. Проекция уравнений (170)-(171) на оси x , y теперь таковы:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i \frac{\omega}{c} H_x, \quad ik_z E_y = -i \frac{\omega}{c} H_x, \quad (194)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i \frac{\omega}{c} H_y, \quad ik_z E_x = i \frac{\omega}{c} H_y, \quad (195)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} E_x, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} + ik_z H_y = i \frac{\omega}{c} E_x, \quad (196)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i \frac{\omega}{c} E_y, \quad -ik_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i \frac{\omega}{c} E_y. \quad (197)$$

Умножая уравнение (194) на $i\omega/c$, а уравнение (197) – на ik_z , получаем

$$-k_z \frac{\omega}{c} E_y = \frac{\omega^2}{c^2} H_x, \quad (198)$$

$$k_z^2 H_x - ik_z \frac{\partial H_z}{\partial x} = -k_z \frac{\omega}{c} E_y. \quad (199)$$

Подставляя выражение для E_y из (198) в (199), получаем

$$k_z^2 H_x - ik_z \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\omega^2}{c^2} H_x, \quad H_x = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (200)$$

Умножая уравнение (195) на $i\omega/c$, а уравнение (196) – на ik_z , получаем

$$k_z \frac{\omega}{c} E_x = \frac{\omega^2}{c^2} H_y, \quad (201)$$

$$ik_z \frac{\partial H_z}{\partial y} - k_z^2 H_y = -k_z \frac{\omega}{c} E_x. \quad (202)$$

Подставляя выражение для E_x из (201) в (202), получаем

$$ik_z \frac{\partial H_z}{\partial y} - k_z^2 H_y = -\frac{\omega^2}{c^2} H_y, \quad H_y = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (203)$$

Умножая уравнение (194) на ik_z , а уравнение (197) – на $i\omega/c$, получаем

$$-k_z^2 E_y = k_z \frac{\omega}{c} H_x, \quad (204)$$

$$k_z \frac{\omega}{c} H_x - i \frac{\omega}{c} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_y. \quad (205)$$

Подставляя выражение для H_x из (204) в (205), получаем

$$-k_z^2 E_y - i \frac{\omega}{c} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_y, \quad E_y = i \frac{\omega}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (206)$$

Умножая уравнение (195) на ik_z , а уравнение (196) – на $i\omega/c$, получаем

$$k_z^2 E_x = k_z \frac{\omega}{c} H_y, \quad (207)$$

$$i \frac{\omega}{c} \frac{\partial H_z}{\partial y} - k_z \frac{\omega}{c} H_y = -\frac{\omega^2}{c^2} E_x. \quad (208)$$

Подставляя выражение для H_y из (207) в (208), получаем

$$i \frac{\omega}{c} \frac{\partial H_z}{\partial y} - k_z^2 E_x = -\frac{\omega^2}{c^2} E_x, \quad E_x = -i \frac{\omega}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (209)$$

Сведем вместе полученные выражения:

$$E_x = -\frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (210)$$

$$H_x = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (211)$$

Компоненты электрического и магнитного поля являются функциями H_z . Для определения величины H_z запишем проекцию уравнения (170) на ось z :

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i \frac{\omega}{c} H_z.$$

После подстановки из (210) величин E_x и E_y получаем

$$\frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -i \frac{\omega}{c} H_z,$$

$$\Delta_2 H_z + \kappa^2 H_z = 0. \quad (212)$$

Компоненты H_x и H_y согласно (211) оказались соответствующими компонентами плоского (в плоскости поперечного сечения волновода) градиента H_z . Но тогда нормальная к поверхности составляющая напряженности магнитного поля

$$H_n = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial n}.$$

Так как на границе идеального проводника нормальная компонента поля должна обращаться в ноль, то граничным условием для уравнения (212) будет условие

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (213)$$

Мы видим, что задача об определении поля в волноводе сводится к решению двумерного уравнения (в плоскости сечения волновода) вида $\Delta_2 f + \kappa^2 f = 0$ с дополнительным условием на контуре сечения $f = 0$ или $\partial f / \partial n = 0$. При заданном контуре решение этого уравнения

существует лишь для определенных значений $\kappa^2 > 0$. Каждому собственному значению κ^2 соответствует своя зависимость

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2.$$

Отсюда получаем выражение для частоты волн, распространяющихся по волноводу:

$$\omega^2 = c^2 (\kappa^2 + k_z^2). \quad (214)$$

Фазовая скорость волн при изменении волнового числа k_z от 0 до ∞

$$c_z = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c\sqrt{\kappa^2 + k_z^2}}{k_z} \geq c. \quad (215)$$

Групповая скорость

$$u = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{ck_z}{\sqrt{\kappa^2 + k_z^2}} \leq c. \quad (216)$$

Обращаем внимание, что есть дисперсия, т.е. только гармоническая волна распространяется без искажения своей формы. Поскольку гармоническая волна не несет информации, то любая передача сигнала с помощью волновода, имеющего односвязное сечение, неизбежно связана с искажениями, которые нарастают с увеличением дальности передачи сигнала.

Обратим внимание на то, что согласно (214) имеется минимальное возможное значение частоты, соответствующее $k_z = 0$:

$$\omega_i = c\kappa_i, \quad (217)$$

где i – номер собственного значения κ . При данном κ_i распространение волн с частотами $\omega < \omega_i$ невозможно. Действительно, при $\omega < \omega_i$ величина

$$k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_i^2}{c^2}$$

становится отрицательной. Волновое число k_z становится мнимым, что приводит к затуханию волн.

Так как спектр собственных значений κ_i ограничен снизу, то имеется нижняя граница частот волн, за которой никакие волны вдоль волновода не могут распространяться. Такая пороговая частота называется граничной частотой.

§ 4. Главная волна

Как мы видели, в волноводе с односвязным поперечным сечением могут распространяться волны, частота которых не меньше граничной. Если поперечное сечение многосвязное, то возможно распространение еще одного типа волн. Для них $k_z = \pm k$. В этом случае

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = k^2 - k_z^2 = 0.$$

Но тогда по волноводу могут распространяться любые волны и их скорость совпадает со скоростью света в вакууме. Такая волна называется главной волной. Для главной волны

$$\Delta_2 E_z = 0.$$

Так как на границе области $E_z = 0$, то (согласно принципу максимального значения для эллиптических уравнений) единственным решением, регулярным во всей области, является решение $E_z = 0$. Итак, в главной волне продольная компонента напряженности электрического поля отсутствует. Значит ли это, что главная волна является H -волной? Для H -волны задача определения H_z такова:

$$\Delta_2 H_z = 0, \tag{218}$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_L = 0.$$

Но тогда регулярное решение задачи (218) будет таким: в плоскости (x, y) величина $H_z = const$. Запишем в компонентах уравнение $\operatorname{div} \vec{H} = 0$:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} - ik_z H_z = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение по поперечному сечению S волновода:

$$\int_S \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) dS - ik_z \int_S H_z dS = 0. \quad (219)$$

С помощью двумерной теоремы Гаусса первый интеграл может быть преобразован:

$$\int_S \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) dS = \int_L H_n dl = 0,$$

так как на контуре сечения волновода $H_n = 0$. Но тогда равен нулю и второй интеграл в уравнении (219):

$$\int_S H_z dS = 0.$$

Вместе с условием постоянства H_z это означает, что $H_z = 0$. Таким образом, в главной волне отсутствует и продольная составляющая напряженности магнитного поля. Главная волна является строго поперечной волной! Рассмотрим ее характеристики. Запишем проекции на оси x и y уравнения (170):

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -\frac{i\omega}{c} H_x, \quad (220)$$

$$ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{i\omega}{c} H_y. \quad (221)$$

Если $k_z = \omega/c$, то из этих уравнений следует, что

$$E_y = -H_x, \quad E_x = H_y.$$

Отсюда следует, что векторы \vec{E} и \vec{H} равны по величине и взаимно перпендикулярны. Спроектируем на ось z уравнение (170):

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i \frac{\omega}{c} H_z = 0.$$

Электрическое поле в плоскости сечения волновода является безвихревым, а поэтому $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Так как $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, то для потенциала получаем уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

с дополнительным условием

$$\varphi|_L = \text{const}$$

(в силу того, что тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на стенке волновода отсутствует). В односвязной области полученная краевая задача имеет только решение $\varphi = \text{const}$, а следовательно, $E = H = 0$. Если поперечное сечение волновода является многосвязной областью, то значения потенциала на разных границах этой области могут быть разными и тогда существует нетривиальное решение.

Подчеркнем еще раз основное свойство главной волны – она распространяется без дисперсии и, следовательно, нет искажения сигнала. Именно по этой причине в технике широко используют коаксиальные волноводы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ландау Л.Д.* Теория поля / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. М.: Наука, 2006.
2. *Ландау Л.Д.* Электродинамика сплошных сред / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. М.: Наука, 2005.
3. *Батыгин В.В.* Сборник задач по электродинамике / В.В.Батыгин, И.Н.Топтыгин. Ижевск: РХД, 2002.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества / И.Е.Тамм. М.: Наука, 1978.
5. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика / Дж.Джексон. М.: Мир, 1965.
6. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны / Л.А.Вайнштейн. М.: Сов.Радио, 1988.
7. *Пановский В.* Классическая электродинамика / В.Пановский, М.Филипс. М.: ГИФМЛ, 1963.
8. *Терлецкий Я.П.* Электродинамика / Я.П. Терлецкий, Ю.П. Рыбаков. М.: Высшая школа, 1990.

Учебное издание

Лобов Николай Иванович
Любимов Дмитрий Викторович

Электродинамика сплошных сред

Учебно-методическое пособие

Редактор *Г.В.Тулякова*
Корректор *И.А.Михина*
Компьютерная верстка *Н.И.Лобова*

Подписано в печать 25.05.2012. Формат 60x84/16.

Усл.печ.л. 4,64. Уч.-изд.л. 4,28.

Тираж 100 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел Пермского государственного национального исследовательского университета
614990, Пермь, ул. Букирева,15

Типография Пермского государственного национального исследовательского университета
614990, Пермь, ул. Букирева,15