ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУ ВПО «Пермский государственный университет»

Д.В.Любимов

Электродинамика

Электромагнитное поле в вакууме

Учебное пособие

Пермь 2007

УДК 532.5.013.4
ББК 22.313
Л68

Любимов Д.В.
Л68 Электродинамика. Электромагнитное поле в вакууме: учеб. пособие/ Д.В.Любимов; Перм. ун-т. – Пермь, 2007. – 91 с.: ил.

ISBN5-7944-0811-1

В пособии излагается учебный материал, соответствующий первой части учебного курса «Электродинамика», читаемого на III курсе физического факультета. Показывается, как на основе обобщения опытных фактов строится электродинамика Максвелла. Рассматривается структура поля на больших расстояниях от системы зарядов и токов, разбираются некоторые вопросы теории излучения. Учебное пособие предназначено для студентов физических специальностей.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Пермского университета

Рецензент:
зав.каф. теоретической физики и компьютерного моделирования Перм. гос. пед. ун-та проф. ***Р.В.Бирих***

Данное пособие является победителем конкурса, проведенного Пермским государственным университетом в ходе реализации инновационной образовательной программы «Формирование информационно-коммуникационной компетентности выпускников классического университета в соответствии с потребностями информационного общества» в рамках приоритетного национального проекта «Образование».

УДК 532.5.013.4
ББК 22.313

ISBN5-7944-0811-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Излагаемый в пособии материал соответствует лекционному курсу, читаемому на протяжении ряда лет в первом семестре студентам III курса физического факультета ПГУ.

Хотя существуют прекрасные курсы электродинамики, в первую очередь «Теория поля» Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшица, они не вполне соответствуют программе и традициям преподавания электродинамики в Пермском университете. В частности, в упомянутом курсе изложение электродинамики ведется параллельно с изложением специальной теории относительности, что для первоначального изучения создает определенные трудности. В Пермском университете теория относительности изучается после электродинамики вакуума с широким использованием ее понятий и результатов. В большинстве других пособий либо чрезмерно дублируется общий курс электромагнетизма, либо изложение ведется с использованием системы единиц СИ, а не СГС, либо недостаточно применяется аппарат тензорного анализа.

Сила Лоренца. Действие поля на заряженную частицу.

Опыт говорит, что сила $\vec{F}$, действующая на помещенный в поле заряд, может быть разбита на две части:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \tag{1}$$

где $\vec{F}_1$ не зависит от характера движения частицы, а $\vec{F}_2$ зависит от ее скорости. Суммируем опытные факты

1) $\vec{F}_1$ пропорционально заряду частицы:

$$\vec{F}_1 = e\vec{E};$$

2) $\vec{F}_2$ зависит только от скорости, но не от ускорения;
3) $\vec{F}_2$ пропорционально скорости $\vec{v}$;
4) $\vec{F}_2$ ортогонально скорости;
5) $\vec{F}_2$ пропорционально заряду частицы.

Таким образом, можно записать такую формулу:

$$\vec{F} = e\vec{E} + ek\vec{v} \times \vec{H}. \tag{2}$$

Коэффициент k зависит от выбранных единиц измерения. Удобно считать, что размерности $\vec{E}$ и $\vec{H}$ совпадают. Это означает, что k имеет размерность обратной скорости, поэтому перепишем формулу (2) в виде

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}, \tag{3}$$

где c - константа размерности скорости, численное значение которой пока произвольно.

Закон сохранения заряда

Известен опытный факт – заряд нельзя создать или уничтожить, его можно лишь переносить с места на место. Наша задача сейчас – дать этому утверждению математическую формулировку. Для этого прежде всего введем понятие плотности заряда. На самом простом уровне плотность заряда – это заряд единицы объема. Но заряд может быть распределен в пространстве неоднородно. Поэтому более точная формулировка будет такой: плотность заряда – это заряд, приходящийся на единицу объема, или, немного математизируя формулировку,

$$\rho = \lim_{V \to 0} \frac{q_V}{V}, \quad (4)$$

где q_V – заряд в объеме V. Однако и такое определение не всегда достаточно. Оно непригодно в тех случаях, когда имеются точечные заряды. Поэтому примем еще более общую формулировку. Будем считать, что плотность заряда определяется формулой

$$q_V = \int_V \rho(\vec{r}) dV. \quad (5)$$

Эта формула работает и для точечных зарядов. Если заряд q находится в точке с координатами $\vec{r}_c$, то соответствующая плотность заряда может быть записана в виде

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_c), \quad (6)$$

где δ – это δ-функция Дирака. Введем также понятие плотности тока $\vec{j}$ – количество заряда, протекающее за единицу времени через единичную площадку, ортогональную вектору $\vec{j}$. Теперь мы можем дать математическую формулировку закона сохранения заряда:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}) dV = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (7)$$

Здесь S – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V.

Удобно переписать закон (7) в дифференциальной форме. Для этого в левой части (7) поменяем местами интегрирование и дифференцирование по времени, что можно сделать, если поверхность S неподвижна, а в правой части преобразуем интеграл по замкнутой поверхности в интеграл по объему, воспользовавшись теоремой Гаусса:

$$\int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV = -\int_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV. \quad (8)$$

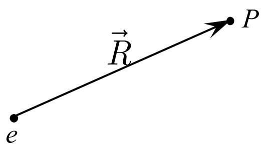
Поскольку соотношение (8) должно выполняться для любого объема, можно опустить знак интеграла:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0\,. \tag{9}$$

Уравнение (9) и представляет собой закон сохранения заряда в дифференциальной форме.

Электрическое поле неподвижных зарядов. Уравнения постоянного электрического поля

Действие поля на заряды полностью описывается двумя векторными полями, напряженностями электрического и магнитного поля[1]. Вообще говоря, ниоткуда не следует, что этих характеристик поля достаточно для описания законов поля, но опыт свидетельствует, что новых характеристик не требуется. Формулировку законов электродинамики мы начнем с рассмотрения простейшего случая поля, созданного неподвижными зарядами, то есть с законов электростатики. Рассмотрим поле, созданное точечным зарядом q, расположенным в начале координат. Опыт говорит, что поле, созданное этим зарядом в точке с координатами $\vec{R}$, во-первых, пропорционально заряду, во-вторых, направлено вдоль $\vec{R}$, в-третьих, его величина обратно пропорциональна квадрату расстояния до заряда. Совокупность этих утверждений и составляет закон Кулона, который может быть записан в виде формулы:



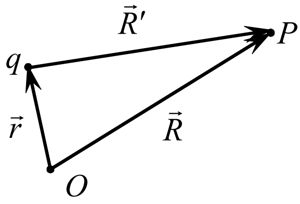
$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = k\,\frac{q}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}\,. \tag{10}$$

Поскольку мы еще не выбрали единицы заряда, то коэффициент k в этой формуле может быть выбран произвольно. В системе СГС этот коэффициент полагается равным единице, так что в дальнейшем будем использовать закон Кулона в виде

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{q}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}\,. \tag{11}$$

---

[1] Точнее говоря, напряженность магнитного поля является псевдовектором, но в данном контексте это несущественно.



Если заряд находится не в начале координат, то удобно выразить вектор, идущий от заряда к точке наблюдения, через $\vec{R}$ и $\vec{r}$: $\vec{R}' = \vec{R} - \vec{r}$. Тогда

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = q\frac{\vec{R}'}{R'^3} = q\frac{\vec{R}-\vec{r}}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|^3}.$$

Если зарядов несколько, то нужно просто сложить поля, созданные каждым зарядом:

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \sum_a q_a \frac{\vec{R}-\vec{r}_a}{\left|\vec{R}-\vec{r}_a\right|^3}$$

– эта формула объединяет закон Кулона и принцип суперпозиции.

Если заряд распределен непрерывно по некоторому объему, то вместо суммирования нужно произвести интегрирование:

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \int\limits_V \frac{\rho\left(\vec{r}\right)\left(\vec{R}-\vec{r}\right)}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|^3}dV$$

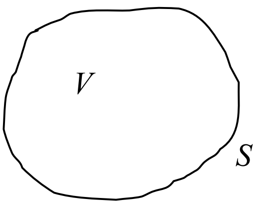
– так называемый кулоновский интеграл для напряженности.

Эта формула решает основную задачу электростатики, позволяет найти поле в любой точке пространства по заданному распределению заряда.

Вспомним элементарную формулу векторного анализа:

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\nabla r = -\frac{\vec{r}}{r^3},\ \nabla r = \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\nabla r\cdot\vec{r} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$$

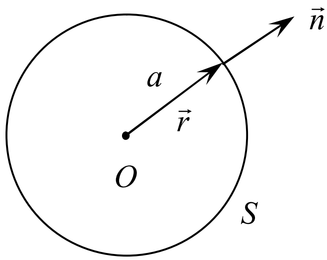


и применим ее к вычислению потока кулоновского поля через замкнутую поверхность.

Рассмотрим замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V. Вычислим поток кулоновского поля через эту поверхность, используя теорему Гаусса:

$$\oint\limits_S \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \int\limits_V \operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}dV = 0\,. \tag{12}$$

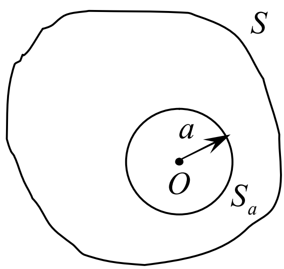
Попробуем теперь найти этот поток без применения теоремы Гаусса, но для частного случая поверхности S – сферы радиуса a .



$$\oint\limits_S \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \oint\limits_S \frac{rdS}{r^3} = \frac{1}{a^2}\oint\limits_S dS = \frac{1}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi \ .$$

Этот результат явно противоречит (12). В чем дело?

С точки зрения классической математики формула (12) справедлива лишь в том случае, когда внутри поверхности нет особых точек. В нашем случае ее применять нельзя, так как. начало координат внутри поверхности. Поэтому применять (12) можно, когда начало координат не принадлежит объему, ограниченному замкнутой поверхностью. В противном случае используем искусственный прием.



Окружим начало координат поверхностью S_a - сферическая поверхность радиуса a , которая лежит внутри нашей поверхности и содержит начало координат.

С одной стороны,

$$\oint\limits_{S+S_a} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = 0$$

– здесь теорема Гаусса применима.

С другой стороны,

$$\oint_{S+S_a} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \oint_{S} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} - \oint_{S_a} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3}$$

(перед вторым интегралом знак минус, так как в теореме Гаусса фигурирует внешняя нормаль), следовательно,

$$\oint_{S} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \oint_{S_a} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = 4\pi\,.$$

Итак,

$\oint_{S} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = 0$, если начало координат не принадлежит объему,

$\oint_{S} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = 4\pi$, если начало координат принадлежит объему.

Было бы удобно использовать формулу

$$\oint_{S} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \int_{V} \operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}dV$$

во всех случаях. Для этого доопределим $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}$ в начале координат, используя дельта – функцию:

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\delta\left(\vec{r}\right).$$

Или, учитывая, что $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla\frac{1}{r}$, запишем нужную для дальнейшего формулу: $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta\left(\vec{r}\right)$. Теперь можно применять терему Гаусса всегда.

Применим полученные формулы к вычислению дивергенции электрического поля:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \int\limits_V \operatorname{div}_P\left(\frac{\rho(\vec{r})\vec{R}'}{R'^3}\right)dV = \int\limits_V \rho(\vec{r})\operatorname{div}_P\frac{\vec{R}'}{R'^3}dV =$$

$$\int\limits_V \rho(\vec{r})\operatorname{div}'\frac{\vec{R}'}{R'^3}dV = 4\pi\int\limits_V \rho(\vec{r})\delta\left(\vec{R}'\right)dV = 4\pi\rho(\vec{r}).$$

Здесь индекс P означает дифференцирование по координатам точки наблюдения, а штрих – дифференцирование по компонентам вектора $\vec{R}'$, $\vec{R}' = \vec{R} - \vec{r}$.

Итак, мы получили первое дифференциальное уравнение электростатики:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho\,. \tag{13}$$

Для получения еще одного уравнения сделаем преобразование кулоновского интеграла:

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r})\vec{R}'}{R'^3}dV = -\int\limits_V \rho(\vec{r})\nabla_P\frac{1}{R'}dV = -\nabla\int\limits_V \frac{\rho(\vec{r})}{R'}dV\,.$$

Здесь учтено, что $\dfrac{\vec{R}'}{R'^3} = -\nabla'\dfrac{1}{R'} = -\nabla_P\dfrac{1}{R'}$.

Введем функцию координат точки наблюдения

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r})}{R'}dV$$

– кулоновский интеграл для потенциала. Мы получили, что

$$\vec{E} = -\nabla\varphi\,. \tag{14}$$

Таким образом, электростатическое поле является потенциальным, следовательно, $\operatorname{rot}\vec{E} = -\operatorname{rot}\nabla\varphi = 0$, т.е. электростатическое поле – безвихревое. Уравнение

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0 \tag{15}$$

является вторым дифференциальным уравнением электростатики.

Подставляя (14) в (13), получаем

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \tag{16}$$

– уравнение Пуассона для потенциала.

Таким образом, существует четыре универсальных способа решения основной задачи электростатики, т.е. нахождения поля по зарядам:

1) вычисление кулоновского интеграла для напряженности

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \int\limits_V \frac{\rho\left(\vec{r}\right)\vec{R}'}{R'^3} dV \ ;$$

2) вычисление кулоновского интеграла для потенциала

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \int\limits_V \frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{R'} dV \ ;$$

3) решение дифференциальных уравнений для напряженности

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \, ,$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0 \, ;$$

4) решение уравнения Пуассона для потенциала

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \, .$$

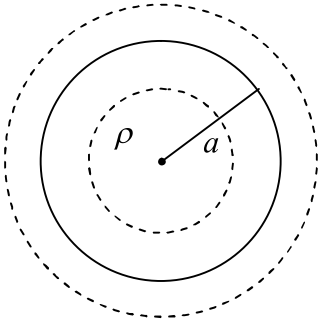
Имеется полезное следствие полученных уравнений, так называемая электростатическая теорема Гаусса:

$$\oint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int\limits_V \operatorname{div}\vec{E} dV = 4\pi\int\limits_V \rho dV = 4\pi Q_V \, , \tag{17}$$

где Q_V – заряд, находящийся внутри объема V. Иногда, когда из симметрии задачи ясна структура поля, оно может быть найдено с помощью этой теоремы, что проще, чем решение дифференциальных уравнений.

Задачи

Рассмотрим однородно заряженный шар. Полный заряд шара $Q = \frac{4}{3}\pi\rho a^3$. Требуется найти поле внутри и вне шара.



Распределение заряда обладает центральной симметрией, поэтому ищем решение в виде центрально-симметричного поля, т.е. $\vec{E} = E(R) \cdot \dfrac{\vec{R}}{R}$ (величина E не зависит от направления, а зависит только от величины R). Сначала решим задачу, используя теорему Гаусса.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi Q \,,$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E(R) \cdot dS = 4\pi R^2 E = 4\pi Q \,,$$

$E = \dfrac{Q}{R^2}$ ($R > a$), откуда

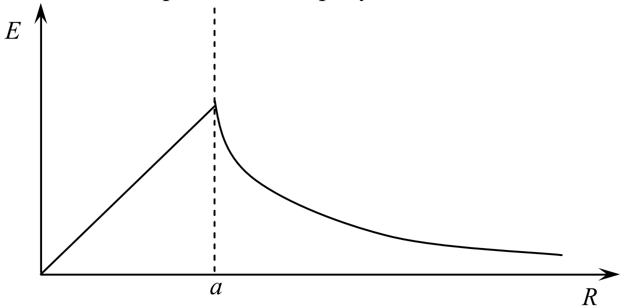
$\vec{E} = Q\dfrac{\vec{R}}{R^3}$ – поле снаружи.

$$4\pi R^2 E = 4\pi \frac{4}{3}\pi\rho R^3 = 4\pi Q\frac{R^3}{a^3} \,,$$

$E = \dfrac{QR}{a^3}$ (при $R < a$),

$\vec{E} = Q\dfrac{\vec{R}}{a^3}$ – поле внутри.

График зависимости модуля напряженности от расстояния имеет вид, изображенный на рисунке



Как видно, напряженность электрического поля максимальна на поверхности шара.

Эту задачу можно решить и другим способом – исходя из дифференциальных уравнений для напряженности. Конечно, при этом мы будем использовать те же свойства симметрии, что и при применении теоремы Гаусса, а значит, искать решение в виде сферически симметричного векторного поля. Как известно, ротор такого поля всегда равен нулю, так что нам остается исследовать уравнение, содержащее дивергенцию напряженности:

$$\operatorname{div}\left(E\frac{\vec{R}}{R}\right)=\nabla_i\left(E\frac{x_i}{R}\right)=\nabla_i E\frac{x_i}{R}+E\frac{\nabla_i x_i}{R}-E\frac{x_i}{R^2}\nabla_i R=$$
$$=\frac{dE}{dR}\frac{x_i}{R}\frac{x_i}{R}+\frac{3E}{R}-E\frac{x_i x_i}{R^2}=\frac{dE}{dR}+\frac{2E}{R}.$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dE}{dR}+\frac{2E}{R}=4\pi\rho\ .$$

Решаем его сначала во внешней области:

$$\rho=0,\ R>a\ ,$$

$$\frac{dE}{E}=-2\frac{dR}{R},$$

$$\ln E=-2\ln R+\ln C\ ,$$

$$E=\frac{C}{R^2}\ .$$

Здесь C – константа интегрирования.

Теперь решим неоднородное уравнение внутри шара.

$$\rho=const,\ R<a\ .$$

Ищем частное решение в виде $E=AR$:

$$A+2A=4\pi\rho\ ,$$

$$A=\frac{4}{3}\pi\rho\ ,$$

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho R\,,$$

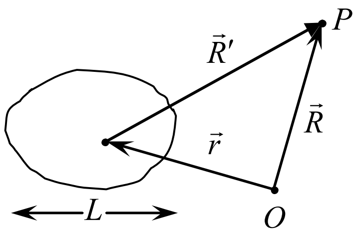
Сшивая решения на границе шара, т.е. на сфере $R = a$, находим $C = \dfrac{4}{3}\pi\rho R^3 = Q$.

Электростатическое поле на большом расстоянии от системы зарядов

Кулоновские интегралы позволяют в принципе найти поле любой системы зарядов в любой точке пространства. Однако их использование требует полной информации об устройстве системы зарядов. С другой стороны, ясно, что если точка наблюдения расположена далеко от системы зарядов, то такой подробной информации не требуется. В самом грубом приближении можно просто заменить всю систему зарядов одним точечным зарядом, равным сумме всех зарядов системы. В этом приближении требуется минимальная информация – знание одной величины, заряда. Ясно, что при попытке уточнить это приближение потребуется больший объем информации. Как мы сейчас увидим, чем больше точность приближения, тем больше информации о системе зарядов должно быть нам доступно.

Будем исследовать потенциал электрического поля, созданного системой зарядов. Точная формула для потенциала дается кулоновским интегралом

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \int\limits_V \frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{R'}dV \text{ , где } R' = \sqrt{\vec{R}'^2}\,,\ \vec{R}' = \vec{R} - \vec{r}\ .$$



Расстояние от точки наблюдения P до системы гораздо больше размеров системы. Это означает, что для всех точек системы зарядов, если начало координат выбрано в окрестности этой системы, имеет место неравенство

$$r \ll R\,.$$

Это дает возможность упростить выражение для расстояния от заряда до точки наблюдения:

$$R' = \sqrt{R^2 - 2\vec{R}\cdot\vec{r} + r^2}\,.$$

В первом приближении можно заменить систему одним точечным зарядом, равным сумме всех зарядов:

$$R' \approx R\,,$$

$$\varphi\left(\vec{R}\right) \approx \int\limits_V \frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{R} dV = \frac{1}{R}\int\limits_V \rho\left(\vec{r}\right) dV = \frac{Q}{R}\,.$$

Рассмотрим теперь 1-й порядок малости.

$$\frac{1}{R'} = \left(R^2 - 2\vec{R}\cdot\vec{r} + r^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2} + \ldots\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2} + \ldots\right),$$

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{R}\int\limits_V \rho\left(\vec{r}\right)\left(1 + \frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2} + \ldots\right) dV =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{R}\int\limits_V \rho\left(\vec{r}\right) dV}_{Q/R} + \frac{\vec{R}}{R^3}\cdot\underbrace{\int\limits_V \rho\left(\vec{r}\right)\vec{r}\, dV}_{\vec{P}} + \ldots\,.$$

Перепишем это разложение в виде

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \frac{Q}{R} + \frac{\vec{R}\cdot\vec{P}}{R^3} + \ldots,\ \text{где}\, Q = \int\limits_V \rho\, dV\,,\ \vec{P} = \int\limits_V \rho\left(\vec{r}\right)\vec{r}\, dV\,.$$

Здесь появился вектор $\vec{P}$ – так называемый вектор дипольного момента, который характеризует свойства системы зарядов.

Свойства дипольного момента

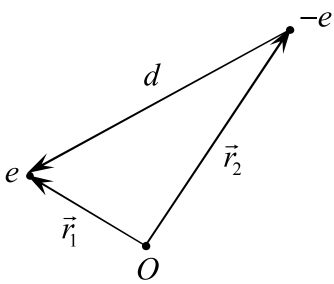
Покажем, что $\vec{P} = \int\limits_V \rho \vec{r} dV$ является аддитивной величиной. Действительно, если разделить систему зарядов на две подсистемы, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, то

$$\vec{P} = \int\limits_V (\rho_1 + \rho_2) \vec{r} dV = \int\limits_V \rho_1 \vec{r} dV + \int\limits_V \rho_2 \vec{r} dV = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 .$$

Для системы точечных зарядов имеем

$$\rho(\vec{r}) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a),$$

где a - номер заряда. Подставляя в определение $\vec{P}$ это распределение плотности заряда, получаем $\vec{P} = \sum\limits_a e_a \vec{r}_a$.



В случае двух точечных зарядов получаем

$$\vec{P} = e\vec{r}_1 - e\vec{r}_2 = e(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \ \vec{P} = e\vec{d} .$$

Как видно, $\vec{P}$ не зависит от того, где находится начало координат. Это свойство допускает обобщение. Удобно ввести понятие центра зарядов. Воспользуемся аналогией с центром масс.

Из механики известно, что

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum\limits_a m_a \vec{r}_a}{\sum\limits_a m_a} = \frac{\int\limits_V \rho \vec{r} dV}{\int\limits_V \rho dV} .$$

По аналогии запишем

$$\vec{R}_{\text{cqé}} = \frac{\int\limits_V \rho \vec{r} dV}{\int\limits_V \rho dV} .$$

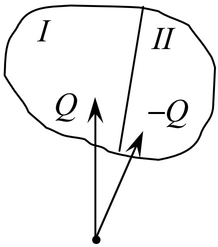
В отличие от механики, где все массы положительны, понятие центра зарядов применимо не к любой ситуации. Если полный заряд системы равен нулю, то формула теряет смысл. Но в тех случаях, когда ею можно пользоваться, имеем $\vec{R}_{cq} = \dfrac{\vec{P}}{Q}, \quad Q \neq 0$. Отсюда получаем полезное соотношение $\vec{P} = Q\vec{R}_{cq}$.

Пусть система зарядов разбита на несколько подсистем так, что заряд каждой подсистемы отличен от нуля. Тогда, пользуясь аддитивностью дипольного момента, можно записать:

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n,$$

$$\vec{P} = Q_1\vec{R}_1 + Q_2\vec{R}_2 + \ldots + Q_n\vec{R}_n.$$

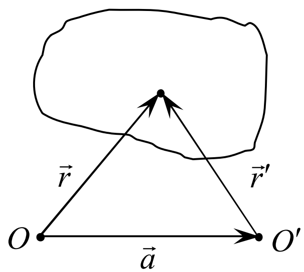
В частном случае нейтральной в целом системы, при разбиении ее на две части с отличным от нуля зарядом, имеем $\vec{P} = Q_1\vec{R}_1 - Q_2\vec{R}_2 = Q\left(\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right)$ – формула, аналогичная выражению для дипольного момента двух точечных зарядов.



Дипольный момент $\vec{P}$, вообще говоря, зависит от того, где взято начало координат. Рассмотрим преобразование дипольного момента при переносе начала координат для произвольной системы зарядов. Пусть мы сдвигаем начало координат на вектор $\vec{a}$: $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a}$. Тогда

$$\vec{P} = \int_V \rho\vec{r}dV = \underbrace{\int_V \rho\vec{r}\,'dV}_{\vec{P}'} + \vec{a}\underbrace{\int_V \rho dV}_{Q},$$

т.е. $\vec{P} = \vec{P}' + \vec{a}Q$. Как видно, вообще говоря дипольный момент меняется при переносе начала координат, но в важном случае нейтральной системы, когда $Q = 0$, мы получаем $\vec{P} = \vec{P}'$, т.е. инвариантность дипольного момента.



Структура поля, созданного дипольной системой

Как мы уже получили, потенциал электростатического поля, созданного нейтральной системой зарядов с отличным от нуля дипольным моментом, на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы, дается формулой

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \frac{\vec{R}\cdot\vec{P}}{R^3}. \qquad (18)$$

Как видно, у дипольной системы поле убывает с расстоянием быстрее, чем у точечного заряда. Найдем напряженность поля, используя (18):

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\vec{P}}{R^3} + 3\frac{\vec{R}\cdot\vec{P}}{R^4}\frac{\vec{R}}{R} = \frac{3\left(\vec{R}\cdot\vec{P}\right)\vec{R} - R^2\vec{P}}{R^5}. \qquad (19)$$

Введем систему координат так, что диполь расположен в начале координат, ось z направлена вдоль дипольного момента. Найдем сначала компоненты поля на оси z:

$$E_z = \frac{3Pz^2 - z^2P}{z^5} = \frac{2P}{z^3},$$

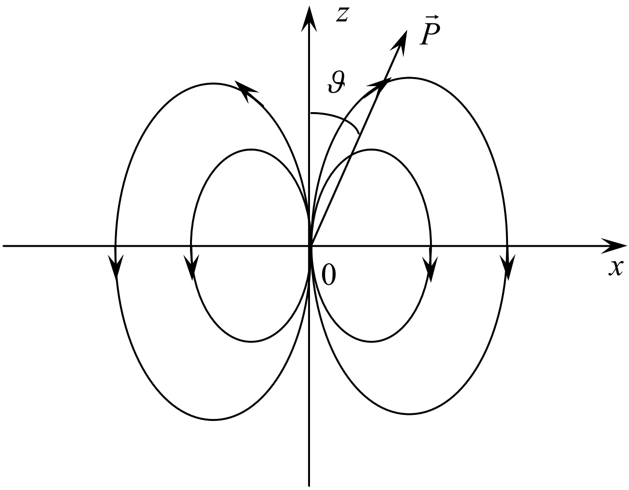
$E_x = \dfrac{3xzP}{R^5} = 0$ на оси x, так как $x = 0$,

$$E_y = \frac{3yzP}{R^5} = 0.$$

Таким образом, ось z сама является одной из силовых линий поля.
В произвольной точке

$$E_z = \frac{3z^2P - R^2P}{R^5} = \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{R^3}P,$$

где ϑ - угол между направлением на данную точку и осью z, и учтено, что $z = R\cos\vartheta$. В частности, в экваториальной плоскости, на оси x, то есть при $z = 0, y = 0$ $\quad E_z = -\dfrac{P}{x^3}$.



Силы, действующие на дипольную систему

Рассмотрим силы, действующие на нейтральную систему, $Q = 0$, помещенную во внешнее поле. Если поле однородно, то $\vec{F} = \sum\limits_a e_a \vec{E} = \vec{E} \sum\limits_a e_a = \vec{E}Q = 0$.

Для того чтобы сила возникла, поле должно быть неоднородным. Пусть поле зависит от координат, но слабо, в том смысле, что мало меняется на масштабах системы зарядов. Тогда его можно разложить в ряд по координатам.

Пусть φ – потенциал внешнего поля. Тогда имеем

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + \ldots,$$

$$E_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = E_k^0 + \frac{\partial E_k^0}{\partial x_i} x_i + \ldots,$$

$$F_k = \sum_a e_a \left(E_k^0 + \frac{\partial E_k^0}{\partial x_i} x_i + \ldots \right) = \frac{\partial E_k^0}{\partial x_i} \sum_a e_a x_i = P_i \frac{\partial E_k^0}{\partial x_i}.$$

Таким образом, сила, действующая на нейтральную систему в слабо неоднородном поле, дается выражением

$$\vec{F} = \left(\vec{P} \cdot \nabla\right)\vec{E} = -\nabla\left(\vec{P} \cdot \nabla\varphi\right) = \nabla\left(\vec{P} \cdot \vec{E}\right).$$

Заметим, что эта сила потенциальна, это позволяет утверждать, что существует энергия диполя во внешнем поле:

$$\vec{F} = \nabla\left(\vec{P} \cdot \vec{E}\right) = -\nabla U, \quad U = -\vec{P} \cdot \vec{E} .$$

Квадрупольные моменты

До сих пор в разложении потенциала мы учитывали только слагаемые не старше первой степени по отношению к относительному размеру системы зарядов:

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \frac{Q}{R} + \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} + \ldots ,$$

Теперь учтем квадратичные слагаемые. Выпишем снова кулоновский интеграл для потенциала:

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \int\limits_V \frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{R'} dV .$$

Входящее сюда выражение для обратного расстояния от зарядов до точки наблюдения представим в виде

$$\frac{1}{R'} = \left(R^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R} + r^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$\varepsilon = -\frac{2\vec{r} \cdot \vec{R}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2},$$

причем $|\varepsilon| \ll 1$. Используя разложение в ряд Тейлора, имеем

$$(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \ldots = 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{R^2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{2}\frac{\left(\vec{r} \cdot \vec{R}\right)^2}{R^4} + \ldots ,$$

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \frac{Q}{R} + \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} + \frac{1}{2R}\int\limits_V \rho\left(\vec{r}\right)\left(\frac{3\left(\vec{r} \cdot \vec{R}\right)^2}{R^4} - \frac{r^2}{R^2}\right) dV + \ldots ,$$

$$\frac{3\left(\vec{r}\cdot\vec{R}\right)^2}{R^4}-\frac{r^2}{R^2}=\frac{3x_iX_ix_jX_j-r^2R^2}{R^4}=\frac{X_iX_j\left(3x_ix_j-r^2\delta_{ij}\right)}{R^4},$$

$$R^2=X_iX_i=X_iX_j\delta_{ij},$$

$$\varphi\left(\vec{R}\right)=\frac{Q}{R}+\frac{\vec{P}\cdot\vec{R}}{R^3}+\frac{1}{2}\frac{X_iX_j}{R^5}\int\limits_V\rho\left(\vec{r}\right)\left(3x_ix_j-r^2\delta_{ij}\right)dV+\dots.$$

Величины $\int\limits_V\rho\left(\vec{r}\right)\left(3x_ix_j-r^2\delta_{ij}\right)dV$ характеризуют систему зарядов, они не зависят от того, где выбрана точка наблюдения.

Итак, в главном порядке нам нужно знать лишь одну величину, характеризующую свойства системы зарядов, а именно, скаляр, равный полному заряду:

$$Q=\int\limits_V\rho dV.$$

В следующем порядке нужно знать векторную величину – дипольный момент:

$$P_i=\int\limits_V\rho x_i dV.$$

Наконец, в третьем порядке потребовалась тензорная величина $Q_{ij}=\int\limits_V\rho\left(3x_ix_j-r^2\delta_{ij}\right)dV$ – тензор квадрупольных моментов системы зарядов.

Свойства тензора квадрупольных моментов

1. Тензор симметричен, $Q_{ij}=Q_{ji}$ – очевидно из определения.
2. Шпур его равен нулю:

$$Q_{ii}=\int\limits_V\rho\left(3r^2-3r^2\right)dV=0.$$

Таким образом, тензор квадрупольных моментов имеет всего пять независимых компонент.

Если имеется система точечных зарядов, то $Q_{ij} = \sum e\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)$. Выпишем независимые компоненты тензора квадрупольных моментов:

$$Q_{xx} = \sum e\left(2x^2 - y^2 - z^2\right),$$

$$Q_{xy} = 3\sum exy\,,$$

$$Q_{xz} = 3\sum exz\,,$$

$$Q_{yy} = \sum e\left(2y^2 - x^2 - z^2\right),$$

$$Q_{yz} = 3\sum eyz\,.$$

Для дальнейшего изложения нам потребуются некоторые сведения из теории собственных векторов симметричных тензоров.

$T_{ij}A_j = B_i$ – свертка тензора с вектором – вектор, вообще говоря, не параллельный вектору $\vec{A}$. Но пусть есть такой вектор, что

$$T_{ij}A_j = \lambda A_i\,. \tag{20}$$

Тогда мы говорим, что λ – собственное число, A_i – собственный вектор.

Условие существования собственного вектора:

$$\det\left(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right) = 0\,,$$

или, в развернутом виде:

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{23} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

В общем случае собственные числа могут быть комплексными, но, как мы сейчас покажем, для симметричного тензора все собственные числа действительны. Умножим (20) на A_i^*, где звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения:

$$A_i^* T_{ij} A_j = \lambda A_i^* A_i\,. \tag{21}$$

Применяя к (21) операцию комплексного сопряжения, получим

$$A_i T_{ij} A_j^* = \lambda^* A_i A_i^* ,$$

откуда

$$A_i T_{ij} A_j^* = A_j T_{ij} A_i^* = A_i^* T_{ij} A_j ,$$

$$\left(\lambda - \lambda^*\right) A_i A_i^* = 0 .$$

И, наконец, поскольку вектор A отличен от нуля, то $\lambda = \lambda^*$, т. е. λ является вещественным.

Мы доказали, что у симметричного тензора все собственные числа вещественные.

Покажем теперь, что собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны друг другу.

Пусть A – собственный вектор, соответствующий собственному числу λ, B – собственный вектор, соответствующий собственному числу κ. Запишем для каждого из векторов задачу на собственные значения и умножим скалярно первую на B, вторую – на A:

$$T_{ij} A_j = \lambda A_i \Big| \cdot B_i ,$$

$$T_{ij} B_j = \kappa B_i \Big| \cdot A_i .$$

Учитывая симметричность тензора и вычитая из первой строчки вторую, получим

$$0 = (\lambda - \kappa) A_i B_i .$$

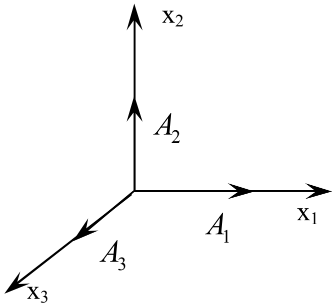
Так как $\lambda \neq \kappa$, получаем отсюда

$$A_i B_i = 0 ,$$

следовательно, собственные векторы ортогональны.

Могут быть различные собственные векторы, соответствующие одному собственному числу. Тогда говорят, что имеется вырождение. Вырождение может быть двух- или трехкратным. Если вырождение трехкратное, любой вектор будет собственным. При наличии вырождения собственные векторы не обязаны быть ортогональными, но их можно выбрать ортогональными.

Для симметричного тензора имеется три ортогональных собственных вектора, их можно нормировать, таким образом они образуют ортонормированный базис. Отсюда следует, что всегда можно выбрать систему координат, оси которой совпадают с собственными векторами. Ее называют главной системой координат тензора.



Установим вид компонент тензора в главной системе координат.

Если занумеровать оси так же, как собственные векторы, то компоненты этих векторов можно записать в виде $A_i^s = \delta_{is}$, где s – номер собственного вектора. Подставляя это выражение в задачу на собственные значения (по s суммирование не производится)

$$T_{ij} A_j^s = \lambda_s A_i^s ,$$

получим

$$T_{ij} \delta_{js} = \lambda_s \delta_{is} ,$$

откуда

$$T_{is} = \lambda_s \delta_{is} .$$

Таким образом, в главной системе координат

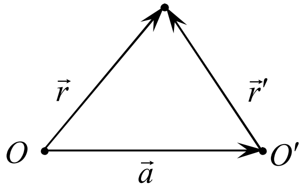
$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} .$$

Для тензора квадрупольных моментов также существует главная система координат. Поскольку для него след равен нулю, то $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Запишем квадрупольную часть потенциала в главной системе координат:

$$\varphi = \frac{X_i X_j Q_{ij}}{2R^5} = \frac{X_1^2 \lambda_1 + X_2^2 \lambda_2 + X_3^2 \lambda_3}{2R^5}.$$

Рассмотрим преобразование компонент тензора квадрупольных моментов при переносе начала системы координат.



Пусть вектор $\vec{a}$ соединяет начала двух систем координат, тогда для координат любой точки пространства имеем

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a},$$

$$x_i = x_i' + a_i.$$

Подставляя это преобразование координат в формулу для компонент тензора квадрупольных моментов, получим

$$Q_{ij} = \int_V \rho\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)dV =$$

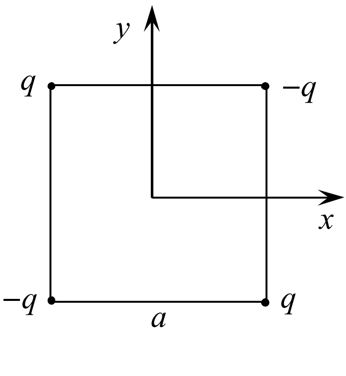
$$= \int_V \rho\left(3x_i' x_j' + 3a_i x_j' + 3x_i' a_j + 3a_i a_j - r'^2\delta_{ij} - 2\vec{r}'\cdot\vec{a}\delta_{ij} - a^2\delta_{ij}\right)dV =$$

$$= Q_{ij}' + 3a_i P_j' + 3P_i' a_j - 2\vec{a}\cdot\vec{P}'\delta_{ij} + Q\left(3a_i a_j - a^2\delta_{ij}\right).$$

Заметим, что тензор квадрупольных моментов нейтральной системы с нулевым дипольным моментом не преобразуется. Можно показать, что в общем случае таким свойством обладает первый отличный от нуля мультипольный момент.

Примеры для конкретных систем зарядов

Рассмотрим изображенную на рисунке систему зарядов.



Полный заряд $Q = 0$, $\vec{P} = 0$.

$Q_{xx} = \sum e\left(3x^2 - r^2\right) = 3\sum ex^2 = 0$,

$Q_{xy} = 3\sum exy = 3q\left(-\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) = -3qa^2$,

$Q_{xz} = 3\sum exz = 0$,

$Q_{yy} = 0$, $Q_{yz} = 0$.

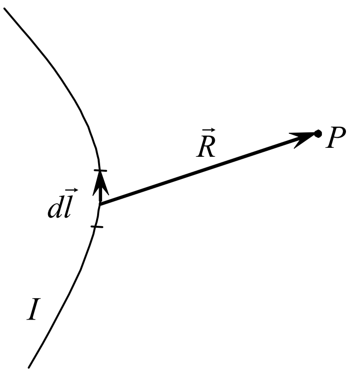
$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -3qa^2 & 0 \\ -3qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом выбранная система координат не является главной.

Легко убедиться, что главной будет система, две оси которой параллельны диагоналям квадрата. В этой системе матрица компонент принимает вид

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 3qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3qa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Магнитное поле постоянного тока



Рассмотрим линейный проводник с током. Сразу воспользуемся принципом суперпозиции и сформулируем закон для поля, созданного током, не для всего проводника, а лишь для малого элемента $d\vec{l}$. Поле, созданное этим элементом в точке наблюдения P, обозначим $d\vec{H}$.

Из опыта известно, что $d\vec{H} \sim \dfrac{1}{R^2}$, $d\vec{H} \sim I$, $d\vec{H} \sim dl$, $d\vec{H} \perp d\vec{l}$, $d\vec{H} \perp \vec{R}$. Все эти факты можно выразить одной формулой:

$d\vec{H} = \alpha \dfrac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \cdot I$ – закон Био-Савара.

Поскольку мы уже выбрали коэффициенты в законе Кулона $\vec{E} = \dfrac{e\vec{R}}{R^3}$ и в силе Лоренца $\vec{F} = e\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\vec{V} \times \vec{H}\right)$, то теперь не можем назначить коэффициент α по собственному произволу. Выясним размерность коэффициента α:

$[I] = \dfrac{e}{t}$, $\left[\vec{E}\right] = \left[\vec{H}\right] = \dfrac{e}{L^2}$, $\vec{F} = \dfrac{M \cdot L}{t^2} = e \cdot [E] = \dfrac{e^2}{L^2}$, $e^2 = \dfrac{M \cdot L^3}{t^2}$,

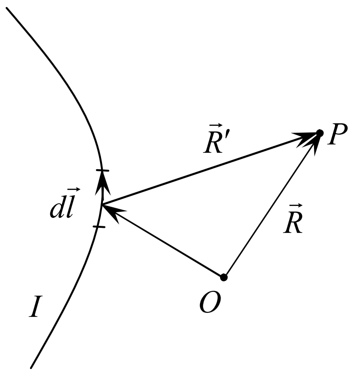
$[\alpha] = \dfrac{[H] \cdot L \cdot t}{e} = \dfrac{t}{L}$ – размерность обратной скорости.

Коэффициент α должен определяться опытным путем, если c выбрано. Можно не назначать c, а потребовать $c = \alpha$ и определить значение из опыта. Оказывается, что c совпадает со скоростью света в вакууме. Этот поразительный факт не может быть объяснен с точки зрения классической физики. Лишь в теории относительности ему нашлось удовлетворительное объяснение.

Итак, для элемента тока имеем

$$d\vec{H} = \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{cR^3} I .$$

Чтобы найти полное поле, прежде всего перепишем полученный результат для произвольного выбора системы координат. Перенесем начало координат в точку O, как указано на рисунке. Тогда $d\vec{H} = \dfrac{d\vec{l} \times \vec{R}'}{cR'^3} I$, где $\vec{R}' = \vec{R} - \vec{r}$.



Разобьем объемный проводник на струйки тока:

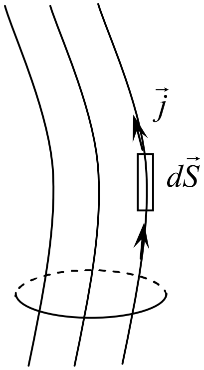
$I d\vec{l} = \vec{j}\, dl dS = \vec{j} dV$,

где $\vec{j}$ – плотность тока, dS – площадь поперечного сечения струйки тока.

$d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{j}$,

$d\vec{H} = \dfrac{\vec{j} \times \vec{R}'}{cR'^3} dV$ – вклад в поле отдельного кусочка струйки тока.

Полное поле в точке наблюдения, согласно принципу суперпозиции, теперь можно записать в виде:



$$\vec{H}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\right)\times\vec{R}'}{R'^3} dV .$$

Учтем, что $\dfrac{\vec{R}'}{R'^3} = -\nabla_P \dfrac{1}{R'}$ (дифференцирование по координатам точки наблюдения),

$\operatorname{rot}\left(f\vec{s}\right) = \nabla f \times \vec{s} + f \operatorname{rot} \vec{s}$,

$\nabla f \times \vec{s} = \operatorname{rot}\left(f\vec{s}\right) - f \operatorname{rot} \vec{s}$,

$f = \dfrac{1}{R'}$, $\vec{s} = \vec{j}$,

$$\vec{H}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{c}\int\limits_V \nabla_P \frac{1}{R'} \times \vec{j} dV = \frac{1}{c}\int\limits_V \operatorname{rot}_P \left(\frac{\vec{j}}{R'}\right) dV = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\vec{j}}{R'} dV\right).$$

Плотность тока $\vec{j}$ от координат точки наблюдения не зависит.

$\vec{H}\left(\vec{R}\right) = \operatorname{rot} \vec{A}$,	$\vec{E} = -\nabla\varphi$,
$\vec{A} = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int\limits_V \dfrac{\vec{j}\left(\vec{r}\right)}{R'} dV$ – векторный потенциал магнитного поля	$\varphi = \displaystyle\int\limits_V \dfrac{\rho\left(\vec{r}\right)}{R'} dV$,
	$\Delta\varphi = -4\pi\rho$.

Из закона Био – Савара следует, что магнитное поле имеет векторный потенциал. Итак, мы вычислили дивергенцию магнитного поля:

$\operatorname{div} \vec{H} = 0$.

Перейдем к вычислению ротора:

$\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \operatorname{div} \vec{A} - \Delta\vec{A}$,

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{c}\int_V \operatorname{div}_P\frac{\vec{j}\,(\vec{r})}{R'}dV=\frac{1}{c}\int_V \vec{j}\cdot\nabla_P\frac{1}{R'}dV=-\frac{1}{c}\int_V \vec{j}\cdot\nabla_T\frac{1}{R'}dV=$$

$$-\frac{1}{c}\int_V \operatorname{div}_T\frac{\vec{j}}{R'}dV+\frac{1}{c}\int_V \frac{1}{R'}\cdot\operatorname{div}_T\vec{j}dV=-\frac{1}{c}\oint\frac{\vec{j}\cdot d\vec{S}}{R'}=0\,,$$

$\int\limits_V \frac{1}{R'}\cdot div_T\vec{j}dV=0$ в силу закона сохранения заряда.

Здесь ∇_T – дифференцирование по координатам тока.

Мы показали, что $div\,\vec{A}=0$, следовательно, $rot\,\vec{H}=-\Delta\,\vec{A}$.

Заметим, что интеграл для векторного потенциала заменой $j\to\rho c$ переводится в интеграл для скалярного потенциала системы зарядов, действие оператора Лапласа на скалярный потенциал было уже нами изучено. Используя этот известный нам результат, получаем, что

$$\Delta\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}\;.$$

Таким образом, мы получили дифференциальные уравнения магнитного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}\;,$$

$$\operatorname{div}\vec{H}=0\,.$$

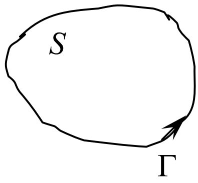
Рассмотрим интегральную форму уравнений магнитного поля.

$\int\limits_V \operatorname{div}\vec{H}dV=0\,.$

Применяя теорему Гаусса, получаем:

$\oint\limits_S \vec{H}\cdot d\vec{S}=0$ – теорема о потоке магнитного поля: поток магнитного поля через замкнутую поверхность равен нулю, т.е. силовые линии не имеют начала и конца, они либо замкнуты, либо уходят в бесконечность.

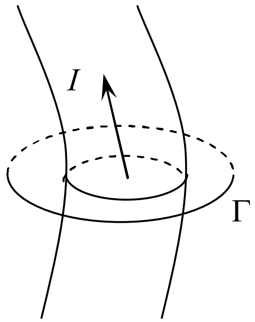
Выберем некоторую незамкнутую поверхность, ограниченную контуром Γ.



На поверхности S выбрано поле нормалей, согласованное с направлением обхода контура. Применяя теорему Стокса, имеем

$$\int_S \left(\operatorname{rot}\vec{H}\right)\cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{H} d\vec{\Gamma} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} I_S ,$$

где I_S - ток, протекающий через поверхность S .



Таким образом, циркуляция магнитного поля $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{\Gamma} = \dfrac{4\pi}{c} I_S$.

Обобщим:

$$\vec{H}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{c}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\right)\times\vec{R}'}{R'^3} dV ,$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} ,$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0 ,$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} ,$$

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} ,$$

$$\vec{A}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{c}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\right)}{R'} dV .$$

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{c}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\right)\vec{R}'}{R'^3} dV ,$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0 ,$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho ,$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi ,$$

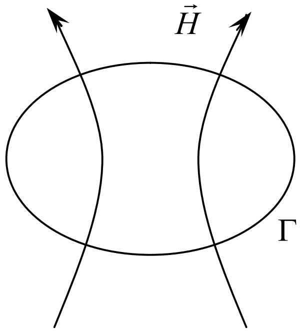
$$\Delta\varphi = -4\pi\rho ,$$

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{R'} dV .$$

Заметим в заключение, что заряд принято считать скаляром, поэтому электрическое поле считают истинным вектором, магнитное – псевдовектором (если бы заряд был псевдоскаляром, то наоборот).

Закон электромагнитной индукции

Закон электромагнитной индукции относится к переменным полям. Магнитное поле $\vec{H}$ пронизывает замкнутый контур Γ. Если оно переменное, то возникает ЭДС.



Опыт говорит, что

$$\varepsilon_{ind} \sim \frac{d}{dt} H$$

$$\varepsilon_{ind} \sim S ,$$

где S – поверхность, натянутая на контур. Форма контура может быть любой.

$$\varepsilon_{ind} \sim \frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \vec{H} d\vec{S}}_{\Phi} ,$$

Φ – поток магнитного поля.

ЭДС – работа по перемещению единичного заряда по замкнутому контуру.

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{V} \times \vec{H} ,$$

$\frac{e}{c} \vec{V} \times \vec{H}$ не совершает работы.

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = e \oint_{\Gamma} \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{r} \,,$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{r} = \varepsilon_{ind} \,,$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{r} = k \frac{d}{dt} \int_{S} \vec{H} \cdot d\vec{S} \,.$$

k определяется из опыта, $k = -\dfrac{1}{c}$, c – скорость света в вакууме.

Закон электромагнитной индукции Фарадея в интегральной форме имеет вид:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{S} \vec{H} \cdot d\vec{S} \,.$$

Воспользуемся теоремой Стокса для преобразования интеграла в левой части. Тогда имеем:

$$\int_{S} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E}_{ind} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \,.$$

Это равенство справедливо для любой поверхности, поэтому отсюда следует закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \,.$$

Гипотеза Максвелла. Ток смещения

Соберем вместе все соотношения, известные до Максвелла.

Уравнения электростатики:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \,,$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \,.$$

Уравнения магнитостатики:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\ ,$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0\ .$$

Закон сохранения заряда:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0\ .$$

Закон электромагнитной индукции связал электрическое и магнитное поля:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\ .$$

Для постоянных полей получаем $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$.

Получаем девять уравнений, 7 неизвестных (плотность тока считаем заданной). Эта система противоречива. Действительно, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j}$, но $\operatorname{div}\operatorname{rot}$ всегда равна нулю, а $\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t}$,
$0 = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t}$, то есть $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, но это не так, плотность заряда может меняться.

Уравнения оказались несовместны. Чтобы устранить противоречие, нужно изменить закон Био – Савара или закон сохранения заряда.

Закон Био – Савара был получен для постоянных полей. Вместо него напишем закон

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{\partial\vec{K}}{\partial t}\ .$$

В стационарном случае слагаемое $\frac{\partial\vec{K}}{\partial t}$ исчезнет.

$$0 = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{K}\ .$$

Воспользовавшись законом сохранения заряда, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{K} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{E}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\left(\vec{K} - \frac{1}{c}\vec{E}\right) = 0\,.$$

Этому равенству можно удовлетворить, если выбрать

$$\vec{K} = \frac{1}{c}\vec{E}\,.$$

Таким образом, противоречие исчезло. Мы получили систему, которую принято называть системой Максвелла уравнений электромагнитного поля:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \operatorname{div}\vec{H} = 0. \end{cases}$$

Система уравнений Максвелла описывает всю совокупность известных электромагнитных явлений.

Закон сохранения заряда можно получить из той же системы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\frac{\partial \rho}{\partial t}\,,$$

$$\operatorname{div}\left(c\operatorname{rot}\vec{H} - 4\pi\vec{j}\right) = 4\pi\frac{\partial \rho}{\partial t}\,,$$

$$-\operatorname{div}\vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\,.$$

Это и есть закон сохранения заряда.

Перепишем немного третье уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right).$$

Эта запись подчеркивает, что переменное электрическое поле, как и ток, способно порождать вихревое магнитное поле.

Слагаемое $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_{sm}$ традиционно называется током смещения. В экспериментах, проводившихся до Максвелла, ток смещения не был обнаружен, так как он много меньше токов, текущих по проводникам. Чтобы обнаружить ток смещения, надо производить эксперименты с переменным полем в пустом пространстве.

Если зарядов нет, то система Максвелла принимает вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем следствие:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

В данное уравнение не входит магнитное поле.

С другой стороны

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}.$$

Но $\nabla \operatorname{div} \vec{E} = 0$, поэтому

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

Аналогично находим

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Эти уравнения описывают распространение волн со скоростью света. Таким образом, уравнения Максвелла предсказывают существование электромагнитных волн. Чтобы проверить гипотезу

Максвелла, Герц поставил эксперименты по обнаружению электромагнитных волн. Эти эксперименты увенчались успехом. Таким образом, впервые существование нового физического явления было предсказано теоретически. Недаром часто говорят, что с теории Максвелла началась теоретическая физика.

В системе Максвелла уравнений больше, чем неизвестных (8 уравнений, 6 неизвестных). Чтобы разобраться с этим кажущимся противоречием, вспомним понятие динамической системы: динамическая система – система, состояние которой в какой-то момент времени однозначно определяет ее будущее.

Представим уравнения Максвелла как динамическую систему в отсутствие пространственных зарядов и токов:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \vec{E}, \\ \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \vec{H}. \end{cases}$$

Если в начальный момент времени известно распределение полей, то можно найти поля в любой момент времени.

Следствия этих уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{E} = const(t) \,,$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = const(t) \,.$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{H} = -c \cdot \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0 \,, \quad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \,.$$

Рассмотрим случай, когда есть пространственные заряды и токи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \cdot \operatorname{rot} \vec{E}, \\ \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - 4\pi \vec{j}, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}. \end{cases}$$

Если распределение токов задано, то система является динамической.

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{E} = -4\pi\operatorname{div}\vec{j} = 4\pi\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{E} - 4\pi\rho\right) = 0,$$

$$\operatorname{div}\vec{E} - 4\pi\rho = const(t).$$

Если в начальный момент времени $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$, то так будет в любой другой момент времени.

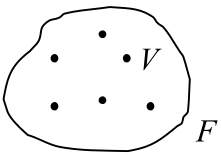
Избыточность уравнений к противоречиям не приводит, а является «воспоминанием» о начальных условиях.

Система была бы еще более симметричной, если бы мы ввели магнитные заряды и магнитные токи, но до сих пор они в эксперименте не найдены, возможно, их не существует.

Закон сохранения энергии для электромагнитного поля

Электромагнитное поле является самостоятельным физическим объектом, следовательно, оно должно обладать такими же мерами движения, как и другие физические объекты, то есть энергией и импульсом.

Будем исходить из того, что электромагнитные поля определяются системой уравнений Максвелла, значит, и закон сохранения энергии, если он существует, должен получаться из этой системы.



Обозначим W энергию поля, заключенного в некотором объеме V, ограниченном поверхностью F.

Изменения энергии могут происходить только за счет перетекания через границу объема и взаимодействия с другими объектами внутри объема:

$$-\frac{dW}{dt} = \oint\limits_F \vec{S}\cdot d\vec{F} + A, \tag{22}$$

где через $\vec{S}$ мы обозначили плотность потока энергии, A – работа поля над зарядами в объеме. Перепишем уравнение (22) в дифференциальной форме. Прежде всего, введем интегральную запись для полной энергии:

$$W = \int\limits_V w dV \ ,$$

где w – плотность энергии.

Найдем работу, совершаемую над частицами:

$$A = \sum \vec{f}_n \cdot \vec{\mathrm{v}} = \sum \vec{\mathrm{v}} \cdot \left(e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{\mathrm{v}} \times \vec{H} \right) = \sum e\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{E} = \int\limits_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV \ ,$$

Теперь мы можем переписать (22) в виде

$$-\frac{d}{dt} \int\limits_V w dV = \oint\limits_S \vec{S} \cdot d\vec{F} + \int\limits_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV \ ,$$

откуда

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0 \, . \tag{23}$$

Если закон сохранения энергии существует, то из уравнений Максвелла мы должны получить соотношение вида (23).

Возьмем уравнение

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \, .$$

Чтобы появилось слагаемое с работой поля, умножим это уравнение на $\vec{E}$:

$$\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \, .$$

Последнее слагаемое в правой части преобразуем к виду производной по времени:

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^2 \, ,$$

преобразуем также левую часть:

$$\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = E_i e_{ijk} \nabla_j H_k = \nabla_j \left(e_{ijk} E_i H_k \right) - H_k e_{ijk} \nabla_j E_i =$$

$$= \operatorname{div}\left(\vec{H}\times\vec{E}\right)+\vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{div}\left(\vec{H}\times\vec{E}\right)-\frac{1}{c}\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

Собирая все вместе, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2+H^2}{2c}+\operatorname{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)+\frac{4\pi}{c}\vec{j}\cdot\vec{E}=0\,\Big|\cdot\frac{c}{4\pi},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2+H^2}{8\pi}+\operatorname{div}\left(c\frac{\vec{E}\times\vec{H}}{4\pi}\right)+\vec{j}\cdot\vec{E}=0\,.$$

Сравнивая полученный результат с (23), заключаем, что

$$w=\frac{E^2+H^2}{8\pi},$$

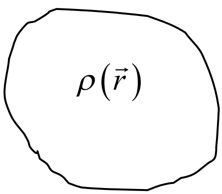
$$\vec{S}=c\frac{\vec{E}\times\vec{H}}{4\pi}.$$

Мы получили выражения для плотности энергии w и плотности потока энергии $\vec{S}$, его часто называют еще вектором Умова-Пойнтинга.

Энергия статических полей

Рассмотрим энергию электростатического поля, созданного заданным распределением зарядов

$$W=\int\limits_{V_\infty}\frac{E^2}{8\pi}dV\,. \tag{24}$$



Поле на бесконечности будем предполагать ослабевающим достаточно быстро, чтобы интеграл сходился. Например, так будет, если заряды занимают ограниченную область.

Преобразуем выражение для энергии:

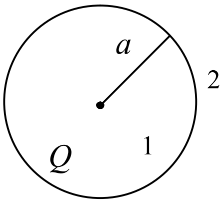
$$W=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V_\infty}\vec{E}\cdot\vec{E}dV=-\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V_\infty}\vec{E}\cdot\nabla\varphi dV=$$
$$=-\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V}\operatorname{div}\left(\vec{E}\varphi\right)dV+\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V_\infty}\varphi\operatorname{div}\vec{E}dV=$$
$$-\frac{1}{8\pi}\oint\limits_{F}\vec{E}\cdot d\vec{F}+\frac{1}{2}\int\limits_{V}\varphi\rho dV=\frac{1}{2}\int\limits_{V}\varphi\rho dV$$

Здесь использовано то, что $\oint\limits_{F}\vec{E}\cdot d\vec{F}=0$ вследствие затухания поля на бесконечности (поверхность бесконечно удаленная, интеграл имеет смысл, если область интегрирования «раздуваем» до бесконечности).

Таким образом, получаем для полной энергии поля простую формулу

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_{V}\varphi\rho dV\ . \qquad (25)$$

В качестве примера рассмотрим задачу об энергии поля однородно заряженного шара.



$$\rho=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3},$$

$$\vec{E}=E(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r},$$

$$\vec{E}(r)=\begin{cases}\dfrac{Q}{r^2},\ r>a\\ \dfrac{Qr}{a^3},\ r<a\end{cases}$$

$$\varphi=\varphi(r)$$

$$\nabla\varphi=\frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{d\varphi}{dr}=-E\ .$$

При $r>a$ $\varphi=\dfrac{Q}{r}$.

При $r<a$ $\dfrac{d\varphi}{dr}=-\dfrac{Qr}{a^3}$, $\varphi=\dfrac{Qr^2}{2a^3}+C_1$.

Потребуем, чтобы потенциал был непрерывен на поверхности шара: $\frac{Q}{a} = -\frac{Q}{2a} + C_1$. Отсюда $C_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{a}$, тогда

$$\varphi = \frac{Q}{r} \text{ вне шара}$$

$$\varphi = Q \cdot \left(\frac{3}{2a} - \frac{r^2}{2a^3} \right) \text{ внутри шара.}$$

Вычислим энергию, заключенную внутри шара (1) и снаружи (2), используя напряженность поля, в соответствии с формулой (24).

$$W_2 = \frac{1}{8\pi} Q^2 \int_V \frac{dV}{r^4}.$$

Поскольку подынтегральная функция сферически симметрична, то $dV = 4\pi r^2 dr$.

$$W_2 = \frac{Q^2}{8\pi} \cdot 4\pi \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{2a}$$

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{a^3} \cdot 4\pi \int_0^a r^4 dr = \frac{Q^2}{10a}.$$

Полная энергия получается сложением энергий внутри и снаружи шара:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{a}.$$

Теперь вычислим полную энергию через потенциал, по формуле (25):

$$W = \frac{1}{2} \rho Q \cdot 4\pi \int_0^a \left(\frac{3}{2a} - \frac{r^2}{2a^3} \right) r^2 dr = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{a}.$$

Результат, естественно, совпадает с предыдущим. Подчеркнем еще раз, что через потенциал можно найти только полную энергию.

Полная энергия прямо пропорциональна заряду, но обратно пропорциональна размеру системы зарядов. При $r \to 0$ полная энергия неограниченно растет, т.е. для точечного заряда получаем бесконечную энергию. Ясно, что эта ситуация неудовлетворительна. Что же делать? Ссылка на конечность размеров всех реальных зарядов не помогает, так как в этом случае мы придем в противоречие с требованиями теории относительности. Одна из попыток выйти из трудного положения основана на том соображении, что мы никогда не имеем дело с полной энергией, а лишь с изменениями энергии. На этом пути было выработано понятие энергии взаимодействия, к обсуждению которой мы сейчас и переходим.

Энергия взаимодействия

Будем называть энергией взаимодействия ту часть полной энергии поля, которая исчезает при удалении систем на бесконечно большое расстояние друг от друга.

Рассмотрим поле, созданное двумя недеформируемыми системами зарядов.

Согласно принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

Найдем полную энергию:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V E^2 dV = \underbrace{\frac{1}{8\pi}\int\limits_V E_1^2 dV}_{W_1} + \underbrace{\frac{1}{8\pi}\int\limits_V E_2^2 dV}_{W_2} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV}_{W_{12}} .$$

Если будем менять взаимное расположение систем, то, так как перераспределения зарядов внутри них не происходит, будет меняться только последнее слагаемое. Значит, именно оно описывает взаимодействие двух недеформируемых систем.

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \vec{E}_1 \cdot \nabla\varphi_2 dV = \int\limits_V \rho_1\varphi_2 dV = \int\limits_V \rho_2\varphi_1 dV . \quad (26)$$

Рассмотрим эту формулу для случая, когда первая система зарядов дискретна, то есть плотность заряда для нее можно написать в виде

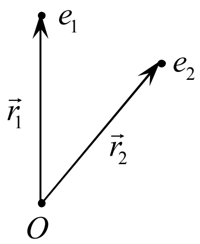
$$\rho_1(\vec{r}) = \sum_a e_a \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_a),$$

где e_a - величина заряда номер a.

Подставляя это в (26), получим

$$W = \sum_a e_a \cdot \varphi_2(\vec{r}_a).$$

Если в дискретной системе только один заряд, получаем, что энергия взаимодействия равна $W = e_1\varphi$



Если вторая система также представляет собой точечный заряд, то потенциал ее поля в месте расположения первого заряда имеет вид $\varphi_2 = \dfrac{e_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$, откуда получаем известную формулу для энергии взаимодействия двух точечных зарядов $W = \dfrac{e_1 e_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$

Полученные результаты легко обобщить на случаи, когда имеется несколько систем зарядов. Полная энергия

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_V E^2 dV,$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n,$$

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_V \left(\vec{E}_1^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_3 + 2\vec{E}_2 \cdot \vec{E}_3 + \vec{E}_3^2 + \ldots\right) dV.$$

Системы зарядов не деформируются, тогда для энергии взаимодействия получаем:

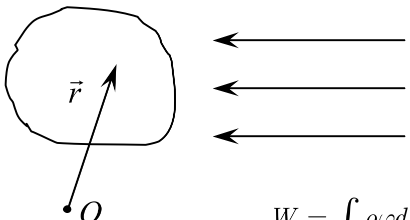
$$W = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 + \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_3 + \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_3 + \ldots\right) dV,$$

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{23}.$$

Как видно, в отличие от полной энергии энергия взаимодействия в некотором смысле аддитивна.

Энергия взаимодействия зарядов со слабым неоднородным полем

Пусть поле незначительно меняется на масштабах системы зарядов.



$$W = \int\limits_V \rho\varphi dV \ ,$$

φ - потенциал внешнего поля. Разложим в ряд:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \varphi(0) + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}\right|_0 \cdot \vec{r} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vec{r}^2}\right|_0 : \vec{r}\vec{r} + \ldots,$$

или, в индексной записи,

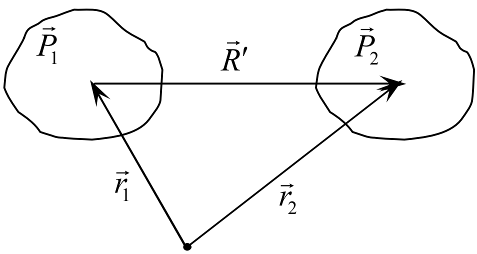
$$\varphi = \varphi(0) + \nabla_i\varphi \cdot x_i + \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j\varphi \cdot x_i x_j + \ldots .$$

Энергия взаимодействия:

$$W = \varphi_0 \underbrace{\int\limits_V \rho_0 dV}_{Q} + \nabla_i\varphi \underbrace{\int\limits_V \rho x_i dV}_{\vec{P}} + \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j\varphi \underbrace{\int\limits_V \rho x_i x_j dV}_{T_{ij}} + \ldots,$$

$$W = \varphi Q + \nabla_i\varphi P_i + \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j\varphi T_{ij} = \varphi Q - \vec{P}\cdot\vec{E} - \frac{1}{2}\nabla_i E_j T_{ij} \ ,$$

где $\vec{E}$ – напряженность внешнего электрического поля.



При $Q = 0$ $W = -\vec{P}\cdot\vec{E}$ – получаем формулу для взаимодействия диполей.

Пусть имеется две системы зарядов на большом расстоянии друг от друга. Системы нейтральны, но обладают дипольным моментом.

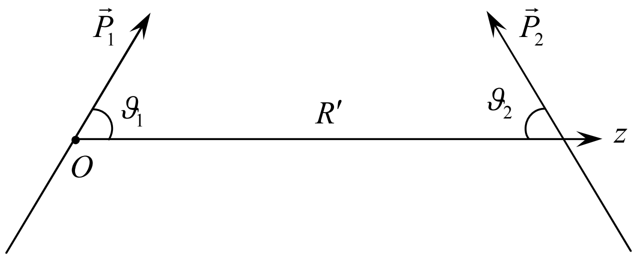
Первой системой зарядов создается поле

$$\varphi\left(\vec{r}_1\right) = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{r}}{r^3},$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\vec{P}_1}{r^3} + 3\frac{\left(\vec{P}_1 \cdot \vec{r}\right) \cdot \vec{r}}{r^5}.$$

Энергия взаимодействия:

$$W = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{R'^3} - 3\frac{\left(\vec{P}_1 \cdot \vec{R}'\right)\left(\vec{P}_2 \cdot \vec{R}'\right)}{R'^5}.$$



Дипольные моменты двух систем могут быть ориентированы по-разному. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Параллельны друг другу и перпендикулярны оси Oz.

$$W = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{R'^3} - 3\frac{\left(\vec{P}_1 \cdot \vec{R}'\right)\left(\vec{P}_2 \cdot \vec{R}'\right)}{R'^5} = -2\frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{R'^3}.$$

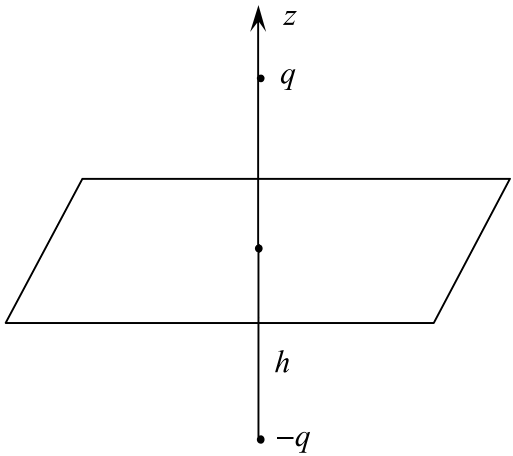
2. Антипараллельны и параллельны оси Oz.

$$W = -\frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{R'^3} + 3\frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{R'^3} = -2\frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{R'^3}.$$

Это состояние энергетически невыгодное.

3. Параллельны друг другу, но перпендикулярны оси Oz.

$$W = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{R'^3},$$



$$1 < W < 2\,.$$

4. Антипараллельны и перпендикулярны оси Oz

$$W = -\frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{R'^3},$$

Можно показать, что если рассмотреть все возможные конфигурации, минимальная энергия будет как в первом случае.

Энергия взаимодействия точечных зарядов и бесконечной проводящей плоскости

Поскольку плоскость проводящая, на ней будут индуцированные заряды. Поле над плоскостью – поле заряда q и фиктивного заряда $-q$. «$-q$» обеспечивает правильное граничное условие на плоскости.

Потенциал поля, созданного зарядом $-q$ в точке, где находится заряд q:

$$\varphi_{-q} = -\frac{q}{2h}\,.$$

Если формально применить выражение для энергии взаимодействия заряда с внешним полем, получим

$$W = -\frac{q^2}{2h}.$$

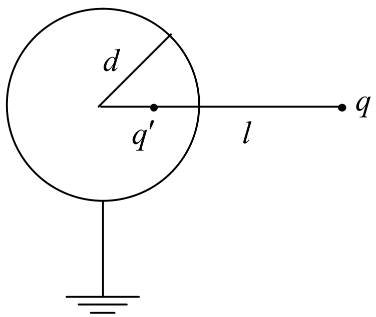
В действительности, однако, этот результат неверный. Дело в том, что при изменении положения заряда меняется конфигурация зарядов на плоскости. Найдем энергию взаимодействия непосредственно из определения. «Унесем» заряд q на бесконечность. Сила, действующая на заряд:

$$F = -\frac{q^2}{4z^2}.$$

Найдем работу – это и будет энергия взаимодействия.

$$W = \int_h^\infty F dz = -\frac{q^2}{4}\int_h^\infty \frac{dz}{z^2} = -\frac{q^2}{4h}.$$

Другой пример. Рассмотрим проводящую заземленную сферу. Используем метод зеркальных отображений.



q' - фиктивный заряд

Проведите сами рассмотрение на основе формального подхода и исходя непосредственно из подсчета работы.

Импульс электромагнитного поля

Перейдем теперь к обсуждению векторной меры движения – импульса электромагнитного поля. Рассуждая по аналогии со случаем закона сохранения энергии, запишем уравнение баланса:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}\int\limits_V \vec{q}dV = \oint\limits_F \Pi\cdot d\vec{F} + \int\limits_V \rho\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{H}\right)dV = \\
&= \oint\limits_F \Pi\cdot d\vec{F} + \int\limits_V \left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{H}\right)dV
\end{aligned}.
$$

Здесь $\vec{q}$ – плотность импульса, Π – тензор второго ранга, имеющий смысл плотности потока импульса, $\vec{j}$ – плотность тока.

Запишем уравнение баланса импульса в индексной форме записи:

$$
-\frac{d}{dt}\int\limits_V q_i dV = \oint\limits_F \Pi_{ij}dF_j + \int\limits_V \left(\rho E_i + \frac{1}{c}e_{ijk}j_j H_k\right)dV .
$$

Используя теорему Гаусса и произвольность объема, получим

$$
\frac{\partial q_i}{\partial t} + \nabla_j \Pi_{ij} + \rho E_i + \frac{1}{c}e_{ijk}j_j H_k = 0 . \qquad (27)
$$

Как и в случае обсуждавшегося выше закона сохранения энергии, будем стремиться получить такое соотношение из уравнений Максвелла.

Вспомним систему уравнений Максвелла:

$$
\begin{cases}
\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\
\operatorname{div}\vec{H} = 0 \\
\operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\
\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho
\end{cases} \qquad (28)
$$

или, в индексной форме записи:

$$\begin{cases} e_{ijk}\nabla_j E_k = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_i}{\partial t} \\ \nabla_i H_i = 0 \\ e_{ijk}\nabla_j H_k = \dfrac{4\pi}{c} j_j + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_i}{\partial t} \\ \nabla_i E_i = 4\pi\rho \end{cases}$$

С помощью уравнений Максвелла преобразуем силу Лоренца, входящую в (27):

$$\rho E_i + \frac{1}{c} e_{ijk} j_j H_k = \frac{1}{4\pi} E_i \operatorname{div}\vec{E} + \frac{1}{c} e_{ijk} H_k \frac{c}{4\pi}\left(e_{jmn}\nabla_m H_n - \frac{1}{c}\frac{\partial E_j}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} E_i \operatorname{div}\vec{E} + \frac{1}{4\pi}\left(H_k\nabla_k H_i - H_k\nabla_i H_k\right) - \frac{1}{4\pi c} e_{ijk} H_k \frac{\partial E_j}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\nabla_k\left(H_k H_i\right) - \nabla_i\frac{H^2}{2} - \frac{1}{c} e_{ijk}\frac{\partial}{\partial t}\left(H_k E_j\right) + e_{ijk} E_j e_{kmn}\nabla_n E_m + E_i \operatorname{div}\vec{E}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\nabla_k\left(H_k H_i - \delta_{ik}\frac{H^2}{2}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)_i + E_j\nabla_j E_i - E_j\nabla_i E_j + E_i \operatorname{div}\vec{E}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\nabla_k\left(H_k H_i - \delta_{ik}\frac{H^2}{2}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)_i + \nabla_j\left(E_j E_i\right) - \nabla_i\frac{E^2}{2}\right) =$$

$$= \nabla_k\frac{H_k H_i + E_k E_i - \left(H^2 + E^2\right)^{\delta_{ik}}\!/2}{4\pi} - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) = -\frac{\partial q_i}{\partial t} - \nabla_k \Pi_{ik}$$

Здесь

$$\vec{q} = \frac{\vec{E}\times\vec{H}}{4\pi c},\ \Pi_{ik} = w\delta_{ik} - \frac{H_k H_i + E_k E_i}{4\pi},$$

w – плотность энергии.

При выводе учтено, что

$$H_k\nabla_i H_k = \nabla_i\frac{H^2}{2},\quad H_k\nabla_k H_i = \nabla_k\left(H_k H_i\right),$$

$$H_k\frac{\partial E_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(H_k E_j\right) - E_j\frac{\partial H_k}{\partial t}.$$

Таким образом, мы показали, что закон сохранения импульса для поля действительно имеет место. Это, в частности, означает, что на тело, помещенное в электромагнитное поле, действует сила (не кулоновская) из-за того, что электромагнитная волна падает на тело и отдает ему свой импульс.

Электромагнитный потенциал

Первая пара уравнений Максвелла, не содержащая источников поля, может быть решена в общем виде. Для этого прежде всего заметим, что из соленоидальности магнитного поля

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0 \tag{29}$$

следует, что магнитное поле обладает векторным потенциалом:

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{30}$$

Это означает, что для любого $\vec{H}$ существует (в односвязной области) потенциал $\vec{A}$ и, наоборот, при любом $\vec{A}$ поле $\vec{H}$, вычисленное по формуле (30), удовлетворяет условию соленоидальности (30).

Перейдем к нахождению электрического поля. Подставим (30) в первое уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A},$$

или, перегруппируя слагаемые:

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Поскольку ротор скобки равен нулю, ее можно представить в виде градиента скаляра (в односвязных областях), т.е.

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi,$$

откуда

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Итак, напряженности электрического и магнитного полей могут быть выражены через скалярный и векторный потенциалы, при этом первая пара уравнений Максвелла удовлетворяется автоматически.

Калибровочная инвариантность

Предположим, что у одного и того же электромагнитного поля существуют два набора потенциалов: $\varphi, \vec{A}$ и $\varphi', \vec{A}'$. Выясним, насколько они могут отличаться. Запишем условия совпадения полей:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{A}', \\ \nabla\varphi + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \nabla\varphi' + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}'}{\partial t}. \end{cases}$$

Из первого условия следует, что

$$\operatorname{rot}\left(\vec{A} - \vec{A}'\right) = 0.$$

Это означает, в свою очередь, что

$$\vec{A} - \vec{A}' = \nabla f\,,$$

где f – произвольная скалярная функция. Аналогично условие неизменности электрического поля приводит к соотношению

$$\nabla\left(\varphi - \varphi'\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}' - \vec{A}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla f\,,$$

откуда

$$\nabla\left(\varphi - \varphi' + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0\,,$$

$$\varphi - \varphi' = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} + F(t)\,,$$

где $F(t)$ – произвольная функция времени, которую можно без ограничения общности положить равной нулю.

Таким образом, получаем связь между старыми и новыми потенциалами:

$$\vec{A} = \vec{A}' + \nabla f\,,$$

$$\varphi = \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Эти соотношения носят название калибровочных преобразований.

Тот факт, что электромагнитное поле не меняется при калибровочных преобразованиях, получил название калибровочной инвариантности.

Наличие калибровочной инвариантности позволяет наложить на потенциалы дополнительное скалярное условие.

Рассмотрим некоторые часто применяемые условия калибровки.

1. $$\varphi = 0$$

Для выполнения этого условия функция f должна быть найдена из уравнения

$$\varphi' = \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\,,$$

которое всегда имеет решение. В результате получаем, что и электрическое и магнитное поля выражаются через один и тот же векторный потенциал:

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A},$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,.$$

2. Можно наложить какое-либо скалярное условие на векторный потенциал. Пусть $\vec{q}$ – постоянный вектор. Потребуем ортогональности векторного потенциала и вектора $\vec{q}$:

$$\vec{A}\cdot\vec{q} = 0\,.$$

Уравнение для калибровочной функции в этом случае имеет вид

$$\vec{q}\cdot\vec{A}' + \vec{q}\cdot\nabla f = 0\,,$$

откуда, направив ось x вдоль вектора $\vec{q}$, получаем уравнение

$$qA'_x + q\,\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -A'_x\,.$$

3. Можно потребовать, чтобы во всем пространстве выполнялось условие

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0\,.$$

Для выполнения этого условия нужно найти калибровочную функцию из уравнения Пуассона

$$\Delta f = -\operatorname{div}\vec{A}'\,.$$

Это так называемая поперечная калибровка.

Наиболее употребительной является так называемая калибровка Лоренца, которую мы подробно обсудим в следующем параграфе.

Уравнение Даламбера и калибровка Лоренца

С точки зрения первой пары уравнений Максвелла, скалярный и векторный потенциалы совершенно произвольны. Однако, для того, чтобы удовлетворялась вторая пара уравнений, потенциалы должны подчиняться определенным соотношениям, вид которых зависит от выбранной калибровки. В этом параграфе мы получим уравнения для потенциалов и выберем наиболее подходящую калибровку. В предыдущем пункте было показано, что

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}\,,$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,.$$

Подставим эти выражения во вторую пару уравнений Максвелла:

$$\nabla\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j} - \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\,,$$

$$\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -4\pi\rho\ .$$

Эти уравнения сильно упрощаются, если потребовать выполнения условия

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

– это и есть так называемая калибровка Лоренца.

С ее использованием получаем для потенциалов уравнения Даламбера:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\ ,$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho\ .$$

Удобно ввести обозначение для комбинации производных по координатам и времени в левой части полученных уравнений:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

– так называемый оператор Даламбера (даламбертиан). В этих обозначениях уравнения Даламбера записываются особенно компактно.

$$\begin{cases} \Box\vec{A} = -\dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \Box\varphi = -4\pi\rho \end{cases}$$

Хотя для векторного и скалярного потенциалов получились независимые уравнения, потенциалы должны быть связаны условием калибровки Лоренца. Это означает, что правые части уравнений Даламбера не могут быть заданы независимо. Применяя дивергенцию к первому уравнению и умножая на c^{-1} и дифференцируя по времени второе, складывая получившиеся скалярные выражения, получаем:

$$-\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j} - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0\ ,$$

или, сокращая на общий множитель,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0\,.$$

Полученное соотношение представляет собой ничто иное, как закон сохранения заряда. Таким образом, закон сохранения заряда является условием совместности уравнений Даламбера.

Всегда ли можно удовлетворить калибровке Лоренца? Пусть $\vec{A}', \varphi'$ не удовлетворяют этой калибровке, а потенциалы $\vec{A}, \varphi$ удовлетворяют. Уравнение для калибровочной функции f будет иметь вид:

$$\operatorname{div} \vec{A}' + \Delta f + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0\,,$$

или, в другой форме записи,

$$\Box f = \Phi = -\operatorname{div} \vec{A}' - \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t}\,.$$

Таким образом, нужно найти функцию f, удовлетворяющую неоднородному уравнению Даламбера. В методах математической физики доказывается, что такое уравнение имеет решение, значит, условию Лоренца удовлетворить можно.

Плоские электромагнитные волны

Исследуем решения уравнений Даламбера в пустом пространстве. В отсутствие зарядов и токов уравнения принимают вид

$$\Box \vec{A} = 0\,,$$

$$\Box \varphi = 0\,,$$

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0\,.$$

Рассмотрим решение в виде плоских волн. Напомним, что так называют волны, любая характеристика которых сохраняет постоянное значение на плоскостях, перпендикулярных некоторому выделенному направлению. Иными словами, поля, описывающие волну, зависят только от одной пространственной координаты. Пусть это будет координата x, тогда

$$\varphi = \varphi\left(x, t\right),$$

$$\vec{A} = \vec{A}\left(x, t\right).$$

Запишем уравнения Даламбера и условие калибровки Лоренца для плоской волны:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Как известно из курса методов математической физики, одномерные уравнения Даламбера имеют общее решение, представляющее собой суперпозицию двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\varphi = f_1\left(x - ct\right) + f_2\left(x + ct\right),$$

где f_1, f_2 – произвольные функции одного аргумента. Выберем одну волну, распространяющуюся вправо. Тогда можно записать решение уравнений Даламбера в виде:

$$\varphi = \varphi\left(x - ct\right),$$

$$A_x = A_x\left(x - ct\right).$$

Введем обозначение для волнового аргумента

$$x - ct = \xi,$$

производные по ξ будем обозначать штрихом. В этих обозначениях условие калибровки Лоренца принимает вид

$$A_x' - \varphi' = 0,$$

откуда

$$A_x - \varphi = const.$$

Константу можно положить равной нулю, тогда

$$A_x = \varphi\,.$$

Найдем теперь напряженности электрического и магнитного полей:

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}\,,$$

$$\vec{E} = \nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,,$$

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0\,.$$

Последнее соотношение означает, что магнитное поле является поперечным. Для продольной компоненты электрического поля получаем

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\varphi' + \varphi' = 0\,,$$

то есть продольная компонента электрического поля равна нулю, следовательно, электрическое поле также является поперечным. Найдем остальные компоненты электрического и магнитного поля:

$$H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -A_z'\,,$$

$$H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x} = A_y'\,,$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} = A_y'\,,$$

$$E_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} = A_z'\,.$$

Как видно,

$$H_y = -E_z\,,$$

$$H_z = E_y\,,$$

$$\vec{E}\cdot\vec{H} = E_y H_y + E_z H_z = -E_y E_z + E_z E_y = 0\,.$$

В плоской волне электрическое и магнитное поля ортогональны друг другу.

Поперечные компоненты электрического поля могут задаваться независимо. Если всюду в пространстве одна из поперечных компонент равна нулю, то волну называют линейно поляризованной. Легко видеть, что произвольную плоскую волну можно представить как суперпозицию двух линейно поляризованных волн (убедитесь в этом самостоятельно).

Форма волны может быть любой, но особенно важными являются гармонические (монохроматические) волны. Пусть, например,

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 \cos k\xi \\ E_y &= 0 \end{aligned},$$

где k – волновое число, связанное с длиной волны соотношением $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$. Вспоминая определение волнового аргумента, получим

$$E_z = E_0 \cos(kx - kct).$$

Как видно, частота монохроматической волны определяется формулой

$$\omega = kc.$$

Связь между волновым числом и частотой линейная, следовательно, электромагнитные волны в вакууме распространяются без дисперсии, т.е. фазовая скорость не зависит от частоты. Если бы разные волны распространялись с разной скоростью, то только монохроматические волны распространялись бы без изменения формы.

У нас линейно поляризованная и монохроматическая волна, но монохроматическая волна необязательно должна быть линейно поляризованной. Рассмотрим, например, волну следующего типа:

$$E_y = E_0 \sin k\xi$$

$$E_z = E_0 \cos k\xi.$$

Для такой волны

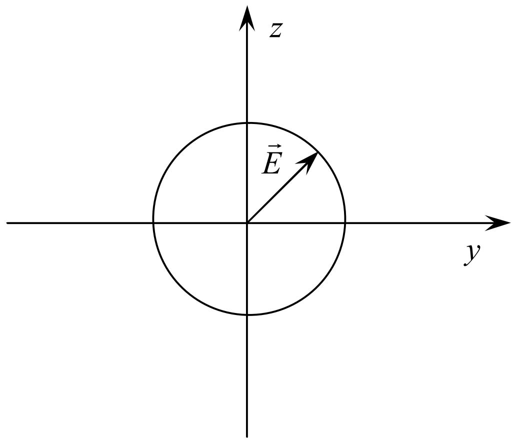
$$E_y^2 + E_z^2 = E_0^2,$$

то есть длина вектора напряженности электрического поля не зависит ни от координат, ни от времени. Зато переменной является ориентация вектора $\vec{E}$. Действительно,

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$E_z = E_0 \cos(kx - \omega t),$$

то есть в каждой точке вектор $\vec{E}$ вращается с постоянной угловой скоростью ω, вектор вращается или вправо или влево в зависимости от знака E_0.



Такую волну называют волной, поляризованной по кругу. Существует два типа таких волн: поляризованные в положительном и отрицательном направлении. Из наших формул следует, что волна, поляризованная по кругу, представляет собой суперпозицию двух линейно поляризованных волн.

Можно показать, что верно и обратное: любую линейно поляризованную волну можно представить в виде двух волн, поляризованных по кругу.

Рассмотрим поток энергии в плоской волне:

$$\vec{S} = c\frac{\vec{E} \times \vec{H}}{4\pi},$$

$$S_x = c\frac{E_y H_z - E_z H_y}{4\pi} = c\frac{E_y^2 + E_z^2}{4\pi} = c\frac{E^2}{4\pi},$$

$$S_y = c\frac{E_z H_x - E_x H_z}{4\pi} = 0\,,$$

$$S_z = 0\,.$$

Мы получили, что вектор плотности потока энергии ориентирован вдоль направления распространения волны.

Поскольку плотность энергии

$$w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi}\,,$$

то можно написать, что

$$\vec{S} = cw\vec{n}\,,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор вдоль направления распространения волны.

Смысл полученного результата очень простой: энергия w распространяется со скоростью c вдоль направления распространения волны.

Вывод: в плоской волне $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{n}$ – тройка взаимно перпендикулярных векторов:

$$\vec{E} \perp \vec{n}\,,$$

$$\vec{H} \perp \vec{n}\,,$$

$$\vec{E} \perp \vec{H}\,,$$

амплитуды напряженностей электрического и магнитного поля одинаковы, волна распространяется со скоростью света и переносит энергию.

Сферические волны

В сферической волне есть выделенная точка, и все характеристики волны зависят от расстояния до этой точки.

Пусть эта точка расположена в начале координат. Будем искать сферически симметричное решение, тогда скалярный потенциал является функцией двух аргументов:

$$\varphi = \varphi\left(r, t\right).$$

Это означает, что уравнение Даламбера

$$\Box\varphi = 0$$

или, в развернутой записи

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

можно записать в более простом виде. Для этого вычислим лапласиан φ:

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\nabla\varphi\,,$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\nabla r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}\,,$$

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} + \frac{3}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\ .$$

Естественно, это можно было написать сразу, воспользовавшись видом лапласиана в сферических координатах.

Итак, мы получили уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,.$$

Это уравнение не имеет привычного нам вида волнового уравнения, но, оказывается, может быть к такому виду приведено подходящей заменой переменных.

Будем искать решение в виде:

$$\varphi = \frac{\chi\left(r,t\right)}{r}\,,$$

тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} - \frac{\chi}{r^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \chi}{\partial r} + 2\frac{\chi}{r^3},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \chi}{\partial r} + 2\frac{\chi}{r^3} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \chi}{\partial r} - 2\frac{\chi}{r^3} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}.$$

Мы получили волновое уравнение для функции χ. Решение этого уравнения будет состоять из двух волн: из сходящейся к центру и расходящейся от центра.

Расходящаяся волна:

$$\chi = \chi(r - ct)$$

$$\varphi = \frac{\chi(r - ct)}{r}$$

Запаздывающие потенциалы

В этом параграфе мы будем строить решение неоднородного уравнения Даламбера. Предварительно основные идеи этого вывода продемонстрируем на более простом примере неоднородного уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = f(\vec{r}).$$

Основная идея – использование принципа суперпозиции и представление правой части в виде суммы простых слагаемых, для каждого из которых решение легко построить. Напомним, как выглядит принцип суперпозиции в случае конечного числа слагаемых. Пусть $f(\vec{r})$ имеет вид

$$f(\vec{r}) = f_1 + f_2 + \ldots + f_n,$$

и пусть φ_j есть решение уравнения

$$\Delta\varphi_j = f_j,$$

тогда

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n .$$

В нашем случае удобно представить $f\left(\vec{r}\right)$ в виде суммы бесконечного числа слагаемых

$$f\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{V_\infty} f\left(\vec{r}'\right) \delta\left(\vec{r} - \vec{r}'\right) dV' ,$$

где роль отдельного слагаемого играет $f\left(\vec{r}'\right) \delta\left(\vec{r} - \vec{r}'\right) dV'$.

В силу линейности уравнения достаточно решить неоднородное уравнение Пуассона очень простого вида

$$\Delta\varphi' = \delta\left(\vec{r} - \vec{r}'\right).$$

Тогда решение уравнения Пуассона для произвольной правой части можно записать в виде:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{V} f\left(\vec{r}'\right) \varphi'\left(\vec{r}, \vec{r}'\right) dV' . \tag{31}$$

Решим сначала уравнение

$$\Delta\varphi = \delta\left(\vec{r}\right).$$

Поскольку правая часть сферически симметрична, φ зависит только от радиальной координаты:

$$\varphi = \varphi(r) .$$

Тогда всюду, кроме начала координат, имеем обыкновенное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0\,(\forall\ r \neq 0),$$

которое удобно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0 .$$

Теперь для получения решения нужно сделать лишь два интегрирования:

$$r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = C_1 ,$$

$$\varphi = -\frac{C_1}{r} + C_2 .$$

Нас интересует влияние источника в начале координат, поэтому можно выбрать $C_2 = 0$.

Чтобы правильно учесть особенность в начале координат, проинтегрируем по объему уравнение $\Delta\varphi = \delta\left(\vec{r}\right)$:

$$\int_V \Delta\varphi dV = 1 ,$$

где V – объем, ограниченный сферой с центром в начале координат. Используя теорему Гаусса, получим

$$\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = 1 .$$

Подставляя сюда наши выражения для φ, получим уравнение для нахождения константы C_1

$$C_1 \oint_S \frac{dS}{r^2} = 1 ,$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{4\pi} .$$

Таким образом, фундаментальное решение уравнения Лапласа имеет вид:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi r} .$$

Если источник находится не в начале координат, а в точке r', то есть решается уравнение $\Delta\varphi' = \delta\left(\vec{r} - \vec{r}'\right)$, то решение будет иметь вид

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} .$$

Тогда в соответствии с формулой (31), получаем решение уравнения Пуассона

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{f\left(\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dV'\,.$$

Эта формула нам фактически уже знакома, мы ее ранее писали в других обозначениях, когда изучали электростатическое поле, порожденное заданным распределением зарядов (сравните сами эти выражения).

Применим теперь ту же методику к нахождению решения неоднородного уравнения Даламбера

$$\Box\varphi = -4\pi\rho\,.$$

Для этого рассмотрим сначала частный случай точечного заряда зависящего от времени

$$\rho\left(t,\vec{r}\right) = e\left(t\right)\delta\left(\vec{r}\right),$$

то есть решим уравнение

$$\Box\varphi = -4\pi e\left(t\right)\delta\left(\vec{r}\right). \tag{32}$$

Так как уравнение обладает сферической симметрией, то естественно искать решение в виде

$$\varphi = \varphi\left(t,r\right).$$

Всюду, кроме начала координат, т.е. $\forall\ r\neq 0$,

$$\Box\varphi = 0\,.$$

Это уравнение в сферически симметричном случае мы уже решали при рассмотрении сферических волн. Напомним, что решение имеет вид

$$\varphi\left(t,\,\vec{r}\right) = \frac{\chi\left(t,\,r\right)}{r},$$

где $\chi\left(t,\,r\right)$ является решением волнового уравнения, описывающим расходящиеся от начала координат и сходящиеся к началу координат волны. В соответствии с принципом причинности нас должны интересовать только расходящиеся волны, поэтому

$$\chi = \chi(r - ct)\,.$$

Будем в дальнейшем использовать обозначение для волнового аргумента $\xi = r - ct$, тогда χ является пока произвольной функцией ξ, $\chi = \chi(\xi)$.

Как и в случае уравнения Пуассона, для правильного описания особенности в начале координат, проинтегрируем уравнение (32) по объему сферы радиуса ε:

$$\int\limits_V \Delta\varphi dV - \frac{1}{c^2}\int\limits_V \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dV = -4\pi e(t)\,.$$

Используя тот факт, что φ зависит от времени только посредством волнового аргумента, получим:

$$\oint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r}dS - \frac{1}{c^2}c^2\int\limits_V \frac{1}{r}\chi'' dV = -4\pi e(t)\,,$$

или

$$4\pi\varepsilon^2 \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=\varepsilon} - 4\pi\int\limits_0^\varepsilon \chi'' r dr = -4\pi e(t)\,. \qquad (33)$$

При малых ε интегральное слагаемое мало:

$$\int\limits_0^\varepsilon \chi'' r dr \sim \varepsilon^2\,.$$

Оценим первое слагаемое:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\chi'}{r} - \frac{\chi}{r^2}\,,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=\varepsilon} = \frac{\chi'(\varepsilon - ct)}{\varepsilon} - \frac{\chi(\varepsilon - ct)}{\varepsilon^2}\,.$$

Перейдем к пределу $\varepsilon \to 0$, тогда из (33) имеем

$$\chi(-ct) = e(t)\,.$$

Это соотношение должно выполняться в любой момент времени.

Введем новое обозначение:

$$-ct = \zeta$$

$$\chi(\zeta) = e\left(-\frac{\zeta}{c}\right)$$

Это верно для любого значения ζ, в том числе и для $\zeta = \xi$:

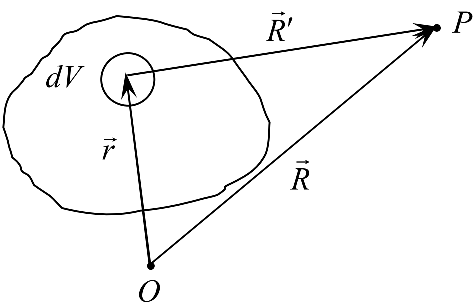
$$\chi(\xi) = e\left(-\frac{\xi}{c}\right) = e\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Мы нашли решение χ, значит, можем найти и решение уравнения Даламбера с точечным нестационарным источником, находящимся в начале координат.

$$\varphi\left(t, \vec{r}\right) = \frac{1}{r} e\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Если $e = const$, то получаем обычное кулоновское поле. Как видно, при нестационарном источнике поле имеет такой же вид, но значение заряда нужно взять не в текущий момент времени, а в некоторый прошлый момент $\tau = t - \dfrac{r}{c}$. Этот результат имеет простой смысл, если точка, в которой ищется поле, находится на расстоянии r от начала координат, то свету нужно время r/c, чтобы пройти это расстояние. Время τ называют ретардированным временем (от слова ретардация – запаздывание).

Мы нашли фундаментальное решение для случая, когда заряд находится в начале координат. Перепишем решение для произвольного расположения заряда. Одновременно сменим



обозначения так, как изображено на рисунке. Тогда

$$\varphi\left(t,\,\vec{R}\right)=\frac{1}{R'}e\left(t-\frac{R'}{c}\right).$$

Наконец, используя принцип суперпозиции, получаем решение для произвольного распределения заряда

$$\varphi\left(t,\vec{R}\right)=\int\limits_V\frac{\rho\left(\vec{r},\tau\right)}{R'}dV\,, \tag{34}$$

где $\tau=t-\dfrac{R'}{c}$, $\vec{R}'=\vec{R}-\vec{r}$.

Обсудим теперь решение уравнения Даламбера для векторного потенциала:

$$\Box\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,.$$

Запишем это уравнение в проекции на какую-нибудь пространственную ось:

$$\Box A_i=-\frac{4\pi}{c}j_i\,.$$

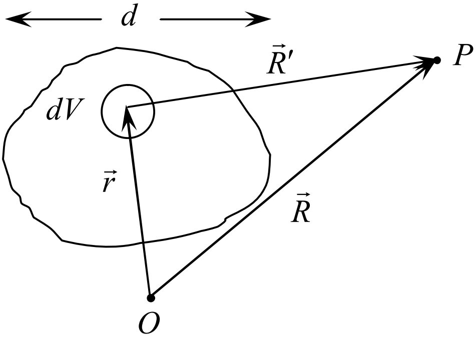
Это уравнение лишь обозначениями отличается от уравнения для скалярного потенциала, то есть получается из последнего заменами $\rho\to\dfrac{j_i}{c}$, $\varphi\to A_i$. Это дает возможность сразу написать решение для векторного потенциала

$$\vec{A}\left(\vec{R},t\right)=\int\limits_V\frac{\vec{j}\left(\vec{r},\tau\right)}{cR'}dV\,. \tag{35}$$

Формулы (34) и (35) получили название запаздывающих потенциалов.

Излучение дипольной системы

Рассмотрим поле, созданное системой движущихся зарядов, на больших расстояниях от этой системы, $R' \gg d$, d - характерный размер системы.



Рассмотрим только векторный потенциал:

$$\vec{A}\left(\vec{R},t\right) = \int\limits_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r},\tau\right)}{cR'}\,dV\,.$$

Считаем, что начало координат выбрано вблизи системы зарядов, то есть $r \le d$ – условие выбора начала координат.

В первом приближении в знаменателе можно заменить R' на R, но в аргументе числителя этого, вообще говоря, делать нельзя.

<u>Пример.</u> $\sin\left(x + A + a\right)$, A и a – некоторые постоянные.

$\sin\left(x + A + a\right) \neq \sin\left(x + A\right)$.

Можно было бы пренебречь, если бы $a \ll 2\pi$.

Пусть ω – характерная частота, $\mathrm{v} \sim \omega d$ – характерная скорость зарядов, $T \sim \dfrac{1}{\omega}$ – характерное время.

Можно пренебречь поправкой $r \sim d$, если

$$\frac{d}{c} \ll T\,.$$

Это есть так называемое условие дипольности, которое мы в дальнейшем будем предполагать выполненным. Этому условию можно придать еще другую форму

$$d \ll \lambda\,,$$

если учесть, что длина волны излучения $\lambda \sim cT$.

Еще одна форма записи того же условия дипольности может быть получена, если учесть оценку для характерной скорости движения зарядов

$$\mathrm{v} \sim \frac{d}{T}\,,$$

тогда

$$d \sim \mathrm{v}T\,,$$

$$\mathrm{v}T \ll cT\,,$$

$$\mathrm{v} \ll c\,.$$

Итак, мы предполагаем, что размеры системы подчиняются двум независимым неравенствам:

$$\begin{matrix} d \ll R \\ d \ll \lambda \end{matrix}\,.$$

Если эти условия выполнены, для векторного потенциала можно написать:

$$\vec{A}\left(t,\vec{R}\right) = \int\limits_V \frac{\vec{j}\left(t-\dfrac{R}{c},\vec{r}\right)}{cR}dV + \ldots.$$

Вынося постоянные множители и отбрасывая малые слагаемые, получаем:

$$\vec{A}\left(t,\vec{R}\right) = \frac{1}{cR}\int\limits_V \vec{j}\left(t-\frac{R}{a},\vec{r}\right)dV\,.$$

Преобразуем интеграл в правой части, используя индексную форму записи:

$$\int\limits_V j_j(\vec r)\,dV = \int\limits_V j_k\delta_{ik}dV = \int\limits_V j_k \frac{\partial x_i}{\partial x_k}dV = \int\limits_V \frac{\partial (j_k x_i)}{\partial x_k}dV - \int\limits_V x_i \frac{\partial j_k}{\partial x_k}dV$$

.

Заметим, что

$$\int\limits_V \frac{\partial (j_k x_i)}{\partial x_k}dV = 0\,,$$

так как через ограничивающую поверхность ток не перетекает.

Плотность тока удовлетворяет закону сохранения заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec j = 0$$

следовательно,

$$\int\limits_V j_j(\vec r)\,dV = -\int\limits_V x_i \operatorname{div}\vec j dV = \int\limits_V x_i \frac{\partial \rho}{\partial t}dV = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V x_i \rho dV = \dot P_i\,.$$

Здесь $P_i = \int\limits_V x_i \rho dV$ – дипольный момент системы.

Итак, мы получили компактное выражение для векторного потенциала в точке наблюдения:

$$\vec A\left(t,\vec R\right) = \frac{1}{cR}\dot{\vec P}\left(t - \frac{R}{c}\right).$$

Он полностью выражается через дипольный момент, отсюда и название – дипольная система.

Вычислим теперь напряженность магнитного поля:

$$\vec H = \operatorname{rot}\vec A = \operatorname{rot}\frac{\dot{\vec P}}{cR} = \nabla\frac{1}{R}\times\frac{\dot{\vec P}}{c} + \frac{1}{cR}\nabla\times\dot{\vec P}\,,$$

$$\nabla\times\dot{\vec P} = \nabla R\times\frac{\partial\dot{\vec P}}{\partial R} = \nabla R\times\ddot{\vec P}\frac{\partial\tau}{\partial R} = -\frac{1}{c}\nabla R\times\ddot{\vec P}\,,$$

$$\nabla\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}\nabla R\,,$$

$$\vec{H}\left(\vec{R},t\right) = -\underbrace{\frac{\nabla R\times\dot{\vec{P}}}{cR^2}}_{1} - \underbrace{\frac{\nabla R\times\ddot{\vec{P}}}{c^2R}}_{2}.$$

Оба слагаемых перпендикулярны ∇R, следовательно, $\vec{H}\perp\vec{R}$. Сделаем оценку, как зависят от расстояния оба слагаемых.

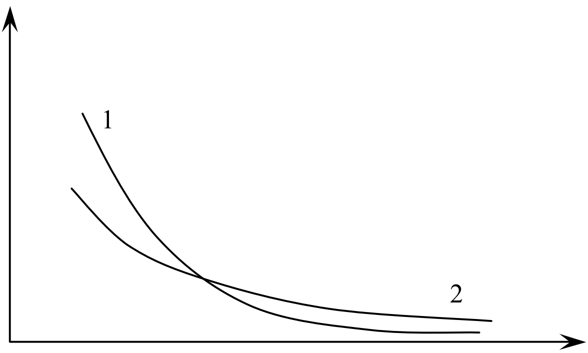
$$\vec{P}\sim\omega\vec{P},$$

$$\underbrace{\qquad}_{1}\sim\frac{\omega P}{cR^2},$$

$$\underbrace{\qquad}_{2}\sim\frac{\omega^2 P}{c^2R},$$

$$\frac{\underbrace{\qquad}_{1}}{\underbrace{\qquad}_{2}}\sim\frac{c}{\omega R}\sim\frac{\lambda}{R}.$$

Если $R\gg\lambda$, то первое слагаемое дает небольшой вклад, если $R\ll\lambda$, то наоборот. Область расстояний, в которой работает в основном второе слагаемое, называют волновой зоной. Второе слагаемое описывает излучение энергии системой.



Рассмотрим подробнее волновую зону. Оставить только второе слагаемое и обозначая

$$\nabla R = \vec{n},$$

получим

$$\vec{H}\left(\vec{R},t\right)=\frac{\ddot{\vec{P}}\times\vec{n}}{c^2R}\,.$$

Излучение происходит за счет того, что заряды движутся ускоренно. ($\vec{P}$ содержит координаты, следовательно, $\ddot{\vec{P}}$ – ускорение).

Чтобы найти электрическое поле, нужно знать, кроме векторного, также и скалярный потенциал. Для этого используем условие калибровки:

$$\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\,.$$

Подставляя сюда векторный потенциал

$$\vec{A}=\frac{\dot{\vec{P}}}{cR}\,,$$

вычисляя дивергенцию в волновой зоне

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\ddot{\vec{P}}\cdot\nabla\tau}{cR}+\ldots$$

(… - малые слагаемые за счет дифференцирования R в знаменателе), получаем:

$$\nabla\tau=-\frac{1}{c}\vec{n}\,,$$

$$\operatorname{div}\vec{A}=-\frac{\vec{n}\cdot\ddot{\vec{P}}}{c^2R}\,,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\vec{n}\cdot\ddot{\vec{P}}}{cR}\,,$$

$$\varphi=\frac{\vec{n}\cdot\dot{\vec{P}}}{cR}\,.$$

Константу интегрирования можно не писать, так как нас не интересует статическое поле.

$$\varphi\left(\vec{R},t\right)=\frac{\dot{\vec{P}}\cdot\vec{n}}{cR}\,.$$

Теперь мы имеем возможность вычислить напряженность электрического поля.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\ddot{\vec{P}}\cdot\vec{n}}{cR}\nabla\tau - \frac{\ddot{\vec{P}}}{c^2R} = \frac{\ddot{\vec{P}}\cdot\vec{n}}{c^2R}\cdot\vec{n} - \frac{\ddot{\vec{P}}}{c^2R} =$$

$$= \frac{1}{c^2R}\left(\left(\ddot{\vec{P}}\cdot\vec{n}\right)\vec{n} - n^2\ddot{\vec{P}}\right) = \frac{\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\ddot{\vec{P}}\right)}{c^2R},$$

$$\vec{E} = \frac{\left(\ddot{\vec{P}}\times\vec{n}\right)\times\vec{n}}{c^2R} = \vec{H}\times\vec{n}\,.$$

Как и в плоской волне, $\vec{H}\perp\vec{n}$, $\vec{E}\perp\vec{n}$, $\vec{H}\perp\vec{E}$, по величине напряженности электрического и магнитного полей совпадают. С удалением от источника E и H уменьшаются, и в этом отличие от плоской волны.

Плотность энергии:

$$w = \frac{E^2+H^2}{8\pi} = \frac{H^2}{4\pi}\,.$$

Плотность потока энергии:

$$\vec{S} = cw\vec{n} = \frac{\left(\ddot{\vec{P}}\times\vec{n}\right)^2}{4\pi c^3R^2}\,\vec{n}\,.$$

Эта формула показывает, в какую сторону и какая энергия излучается.

Линейный гармонический осциллятор

Рассмотрим излучение простейшей дипольной системы, дипольный момент которой подчиняется закону

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_0\cos\omega t\,.$$

Такую систему называют гармоническим осциллятором. Вычислим поток энергии:

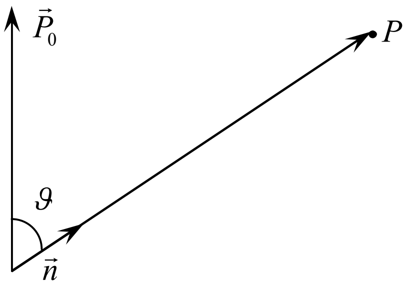
$$\ddot{\vec{P}} = -\omega^2 \vec{P}_0 \cos \omega t \ ,$$

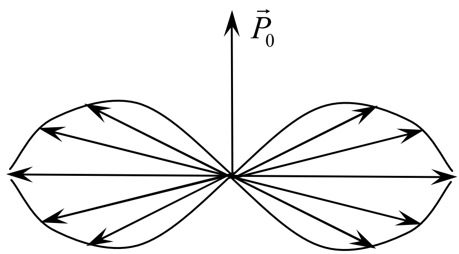
$$\vec{S} = \vec{n} \frac{\omega^4 \left(\vec{P}_0 \times \vec{n}\right)^2}{4\pi c^2 R} \cos^2 \omega t \ .$$

Вектор плотности потока энергии все время направлен вдоль $\vec{n}$ (так как коэффициент перед $\vec{n}$ положителен).

Усредним по времени:

$$\bar{\vec{S}} = \frac{\omega^4 \left(\vec{P}_0 \times \vec{n}\right)^2}{8\pi c^3 R^2} \vec{n} \ .$$





Плотность потока энергии зависит от угла ϑ

$$\bar{\vec{S}} = \frac{\omega^4 P_0^2 \sin^2 \vartheta}{8\pi c^3 R^2} \vec{n} \ .$$

Изобразим этот результат графически (начало координат в центре системы, длина стрелок пропорциональна интенсивности излучения). Такие картинки называют диаграммой направленности излучения.

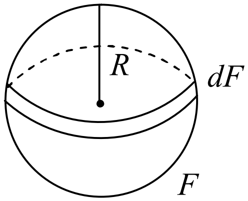
Максимальная энергия излучается в направлении, перпендикулярном $\vec{P}_0$. В направлении $\vec{P}_0$ ничего не излучается.

Вычислим полный поток энергии (мощность излучения).

$$N = \oint_F \vec{\bar{S}} \cdot d\vec{F} = \frac{\omega^4 P_0^2}{8\pi c^3 R^2} \oint_F \sin^2 \vartheta dF$$

Площадь колечка:

$$dF = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta \,,$$



$$\oint_F \sin^2 \vartheta dF = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \,.$$

Сделаем замену $x = \cos \vartheta$. Тогда

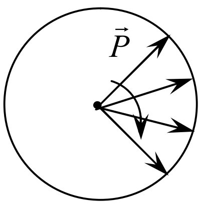
$$2\pi R^2 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = 2\pi R^2 \int_{-1}^1 \left(1 - x^2\right) dx = \frac{8}{3} \pi R^2 \,,$$

$$N = \frac{\omega^4 P_0^2}{3c^3} \,.$$

Полное излучение, как видно, очень сильно зависит от частоты.

Излучение вращающегося диполя

Теперь рассмотрим случай, когда величина дипольного момента не меняется, зато меняется ориентация. Пусть вектор дипольного момента описывает окружность, двигаясь с постоянной угловой скоростью.



Скорость изменения вектора постоянной длины, как известно, дается формулой

$$\dot{\vec{P}} = \vec{\Omega} \times \vec{P},$$

где $\vec{\Omega}$ – угловая скорость.

$$\ddot{\vec{P}} = \vec{\Omega} \times \dot{\vec{P}} = \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{P}\right) = \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{P}\right)\vec{\Omega} - \Omega^2 \vec{P} = -\Omega^2 \vec{P},$$

Здесь учтено, что $\vec{\Omega} \cdot \vec{P} = 0$, поскольку $\vec{\Omega} \perp \vec{P}$.

$$\vec{S} = \frac{\Omega^4 \left(\vec{P} \times \vec{n}\right)^2}{4\pi c^3 R^2} \vec{n}.$$

Усредним по времени:

$$\overline{\vec{S}} = \frac{\Omega^4}{4\pi c^3 R^2} \overline{\left(\vec{P} \times \vec{n}\right)^2} \vec{n},$$

$$\overline{\left(\vec{P} \times \vec{n}\right)^2} = \overline{P^2 n^2} - \overline{\left(\vec{P} \cdot \vec{n}\right)^2}.$$

Поскольку величина вектора дипольного момента со временем не меняется, и $n^2 = 1$, то

$$\overline{P^2 n^2} = P^2,$$

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = P_x n_x + P_y n_y,$$

ось z направлена вдоль $\vec{\Omega}$.

$$\overline{\left(\vec{P} \cdot \vec{n}\right)^2} = \overline{P_x^2} n_x^2 + 2\overline{P_x P_y} n_x n_y + \overline{P_y^2} n_y^2,$$

$$\overline{P_x P_y} = 0.$$

Поскольку направления x и y равноправны, то

$$\overline{P_x^2} = \overline{P_y^2},$$

$$P_x^2 + P_y^2 = P^2,$$

$$\overline{P_x^2} + \overline{P_y^2} = 2\overline{P_x^2} = P^2 ,$$

$$\overline{P_x^2} = \overline{P_y^2} = \frac{1}{2} P .$$

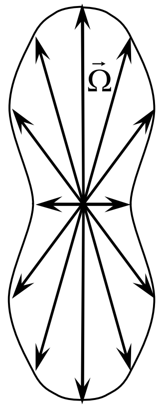
Получим:

$$\overline{\left(\vec{P} \cdot \vec{n}\right)^2} = \frac{1}{2} P^2 \left(n_x^2 + n_y^2\right) = \frac{1}{2} P^2 \left(1 - n_z^2\right) = \\ = \frac{1}{2} P^2 \left(1 - \cos^2 \vartheta\right) = \frac{1}{2} P^2 \sin^2 \vartheta ,$$

$$\overline{\left(\vec{P} \times \vec{n}\right)^2} = P^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta\right),$$

$$\overline{\vec{S}} = \frac{\Omega^4 P^2}{4\pi c^3 R^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta\right) \vec{n} .$$

Диаграмма направленности имеет вид:



Полная мощность излучения дается формулой:

$$N = \frac{2}{3} \frac{\Omega^4 P^2}{c^3} .$$

Потенциалы Льенара-Вихерта

Будем изучать поле, созданное точечным зарядом, движущимся по заданному закону. Для произвольного распределения зарядов и токов мы имеем формулы запаздывающих потенциалов:

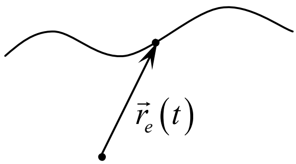
$$\vec{A}\left(\vec{R},t\right)=\int\limits_V\frac{\vec{j}\left(\vec{r},\tau\right)}{cR'}dV\,,$$

$$\varphi\left(\vec{R},t\right)=\int\limits_V\frac{\rho\left(\vec{r},\tau\right)}{R'}dV\,,$$

$$\vec{R}'=\vec{R}-\vec{r}\,,$$

$$\tau=t-\frac{R'}{c}\,.$$

Пусть наша система зарядов представляет собой единственный точечный заряд, движущийся по закону $\vec{r}=\vec{r}_e\left(t\right)$.



Плотность точечного заряда можно выразить через δ – функцию:

$$\rho\left(\vec{r},t\right)=e\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_e\right).$$

Плотность тока:

$$\vec{j}\left(\vec{r},t\right)=e\vec{\mathrm{v}}\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_e\right)=e\dot{\vec{r}}_e\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_e\right).$$

Зависимость аргумента δ – функции от координат очень сложная (надо подставлять $\vec{r}_e$ в момент времени τ).

Вспомним некоторые свойства δ – функции.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)\delta\left(x-x_c\right)dx=f\left(x_c\right)$$

Рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta\big(a(x-x_c)\big)\,dx\,,$$

где a – некоторое число.

Сделаем замену переменных:

$$y = a(x-x_c)\,,$$

тогда

$$x = x_c + \frac{y}{a},$$

$$dx = \frac{dy}{a}\,.$$

1. $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta\big(a(x-x_c)\big)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_c + \frac{y}{a}\right)\delta(y)\frac{dy}{a} = \frac{f(x_c)}{a}\,,$$

$$\delta\big(a(x-x_c)\big) = \frac{1}{a}\,\delta(x-x_c)\,.$$

2. $a < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta\big(a(x-x_c)\big)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_c + \frac{y}{a}\right)\delta(y)\frac{dy}{a} = -\frac{f(x_c)}{a}\,,$$

$$\delta\big(a(x-x_c)\big) = -\frac{1}{a}\,\delta(x-x_c)\,.$$

Обобщим:

$$\delta\big(a(x-x_c)\big) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x-x_c)\,.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(z(x))\,dx\,.$$

Пусть x_c – единственный корень функции $z(x)$,

$$z\left(x_c\right) = 0\,,$$

$\delta\left(z\left(x\right)\right)$ отлична от нуля только в точке x_c, поэтому важна лишь окрестность точки x_c. В этой окрестности можно заменить функцию $z\left(x\right)$ ее разложением в ряд:

$$z\left(x\right) = z'(x_c)\left(x - x_c\right) + \ldots,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\delta\left(z\left(x\right)\right)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\delta\Big(a\left(x - x_c\right)\Big)dx = \frac{f\left(x_c\right)}{\left|z'\left(x_c\right)\right|}\,,$$

$$a = z'\left(x_c\right).$$

Такой же результат можно получить с помощью замены

$$z = z\left(x\right),$$

$$dz = z'\left(x\right)dx\,,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\delta\left(z\left(x\right)\right)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)\delta\left(z\right)\frac{dz}{\left|z'\left(x\right)\right|} = \frac{f\left(x_c\right)}{\left|z'\left(x_c\right)\right|}\,,$$

$$\alpha < \beta\,.$$

Рассмотрим случай, когда функция $z\left(x\right)$ обращается в ноль в нескольких точках,

$$z\left(x_1\right) = 0, \quad z\left(x_2\right) = 0, \ldots \quad z\left(x_n\right) = 0\,.$$

Разобьем весь интервал на участки, содержащие только один корень, тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\delta\left(z\left(x\right)\right)dx = \frac{f\left(x_1\right)}{\left|z'\left(x_1\right)\right|} + \ldots + \frac{f\left(x_n\right)}{\left|z'\left(x_n\right)\right|}\,.$$

В 3-хмерном пространстве гораздо сложнее.

$$dV_r \to \frac{dV_q}{I}\,,$$

$$\vec{q} = \vec{q}\left(\vec{r}\right),$$

$$\vec{r} = \left(x_1,\, x_2,\, x_3\right) -$$

старые координаты,

$$\vec{q} = \left(y_1,\, y_2,\, y_3\right) -$$

новые координаты.

I – якобиан преобразования

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Пусть $\vec{q}\left(\vec{r}\right)$ обращается в ноль в точке $\vec{r}_c$:

$$\vec{q}\left(\vec{r}_c\right) = 0\,,$$

$$\int\limits_V f\left(\vec{r}\right)\delta\left(\vec{q}\right)dV = \frac{f\left(\vec{r}_c\right)}{\left|I\left(\vec{r}_c\right)\right|},$$

$$I = \det\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}\right).$$

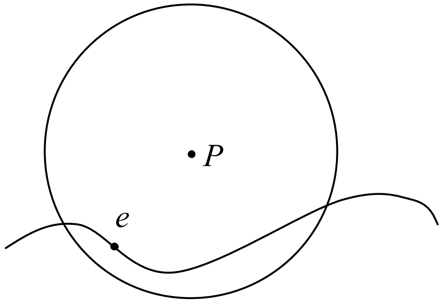
Возвращаемся к электродинамике. Вычислим запаздывающий потенциал (скалярный, для векторного все будет аналогично).

$$\varphi\left(\vec{R}, t\right) = \int\limits_V \frac{e\delta\left(\vec{r} - \vec{r}_e\left(\tau\right)\right)}{R'}dV\,,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_e\left(\tau\right),$$

$$\vec{r} = \vec{r}_e\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{R^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{R} + r^2}\right).$$

Производная от $\vec{r}_e$, т.е. скорость движения заряда, меньше скорости света (необязательно много меньше),



$$\left|\dot{\vec{r}}_e\right| < c\,.$$

Представим себе сферу с центром в точке наблюдения P, радиус которой уменьшается со скоростью света и сжимается в ноль в интересующий нас момент времени t. Всегда можно найти момент времени, когда сфера была еще настолько большого радиуса, что заряд находился внутри сферы. Тогда рано или поздно сфера встретится с зарядом, причем это произойдет только один раз, так как скорость заряда меньше скорости света.

В момент встречи t' расстояние от заряда до точки наблюдения равно радиусу сферы R_c:

$$R_c = c\left(t - t'\right),$$

$$c\left(t - t'\right) = \left|\vec{R} - \vec{r}_e\left(t'\right)\right|,$$

$$c\left(t - t'\right) = R'\left(t'\right),$$

$$t' = t - \frac{R'\left(t'\right)}{c},$$

$$t' = \tau\,.$$

Мы доказали, что уравнение для нахождения τ

$$\tau = t - \frac{R'(\tau)}{c}$$

имеет корень, причем только один.

Вычислим якобиан преобразования.

$$\vec{q} = \vec{r} - \vec{r}_e(\tau)$$

или

$$q_1 = x_1 - x_1^e(\tau),$$

$$q_2 = x_2 - x_2^e(\tau),$$

$$q_3 = x_3 - x_3^e(\tau),$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = 1 - \mathrm{v}_1(\tau)\frac{\partial \tau}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial x_2} = -\mathrm{v}_1(\tau)\frac{\partial \tau}{\partial x_2},$$

и так далее, в результате получаем:

$$I = \begin{vmatrix} 1 - \mathrm{v}_1\dfrac{\partial \tau}{\partial x_1} & -\mathrm{v}_1\dfrac{\partial \tau}{\partial x_2} & -\mathrm{v}_1\dfrac{\partial \tau}{\partial x_3} \\ -\mathrm{v}_2\dfrac{\partial \tau}{\partial x_1} & 1 - \mathrm{v}_2\dfrac{\partial \tau}{\partial x_2} & -\mathrm{v}_2\dfrac{\partial \tau}{\partial x_3} \\ -\mathrm{v}_3\dfrac{\partial \tau}{\partial x_1} & -\mathrm{v}_3\dfrac{\partial \tau}{\partial x_2} & 1 - \mathrm{v}_3\dfrac{\partial \tau}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Для упрощения вычислений выберем координатные оси так, чтобы скорость заряда была направлена вдоль первой оси, т.е.

$$\mathrm{v}_1 \neq 0,$$

$$\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_3 = 0.$$

Тогда

$$I = 1 - \mathrm{v}_1\frac{\partial \tau}{\partial x_1}$$

или в векторном виде:

$$I = 1 - \vec{\mathrm{v}} \cdot \nabla\tau.$$

В таком виде формула будет справедлива в любой системе координат.

Вычислим $\nabla\tau$.

$$\nabla\tau = \nabla\left(t - \frac{R'(\tau)}{c}\right) = -\frac{1}{c}\nabla R' = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}'}{R'},$$

$$\varphi\left(\vec{R}, t\right) = \int\limits_V \frac{\rho\left(\vec{r}, \tau\right)}{R'} dV ,$$

$$I = 1 - \frac{\vec{\mathrm{v}}}{c} \cdot \frac{\vec{R}'}{R'} > 0 ,$$

поэтому знак модуля можно опустить,

$$\varphi\left(\vec{R},\, t\right) = \left[\frac{e}{R'I}\right],$$

$\dfrac{e}{R'I}$ берется в ретардированный момент времени. Введем обозначение

$$S = R' - \frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{R}' ,$$

$$\varphi\left(\vec{R},\, t\right) = \left[\frac{e}{S}\right]. \tag{36}$$

Знаем положение заряда в каждый момент времени. Требуется найти потенциал в точке P в определенный момент времени. Нужно решить уравнение

$$\tau = t - \frac{1}{c}\sqrt{\left(\vec{R} - \vec{r}_e(\tau)\right)^2} ,$$

найти τ, вычислить R' и затем найти φ. В предельном случае, когда $\vec{\mathrm{v}} = 0$, получим обычное кулоновское выражение.

Для векторного потенциала аналогичная формула:

$$\vec{A}\left(\vec{R},\, t\right) = \left[\frac{e\vec{\mathrm{v}}}{cS}\right]. \tag{37}$$

Формулы (36),(37) – потенциалы Льенара-Вихерта.

Квадратные скобки означают, что выражение в них берется в ретардированный момент времени.

Напряженность поля произвольно движущегося заряда

В предыдущем параграфе мы вычислили потенциал поля произвольно движущегося заряда, теперь займемся нахождением напряженностей.

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A},$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Вычислим производную от ретардированного времени (дифференцируем по координатам точки наблюдения):

$$\nabla\tau = -\frac{1}{c}\nabla R' = -\frac{1}{c}\frac{\vec{R}'}{R'} - \frac{1}{c}\frac{\partial R'}{\partial\tau}\nabla\tau,$$

$$R'^2 = \vec{R}'\cdot\vec{R}' = R^2 - 2\vec{R}\cdot\vec{r}_e + \vec{r}_e^{\,2},$$

$$2R'\frac{\partial R'}{\partial\tau} = -2\vec{R}\cdot\vec{\mathrm{v}} + 2\vec{r}_e\cdot\vec{\mathrm{v}} = -2\vec{R}'\cdot\vec{\mathrm{v}},$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}'}{R'},$$

$$\frac{\partial R'}{\partial\tau} = -\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{n},$$

$$\nabla\tau = -\frac{\vec{n}}{c} + \frac{\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{n}}{c}\cdot\nabla\tau,$$

$$\nabla\tau = -\frac{\vec{n}}{c - \vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{n}},$$

$$\nabla R' = \frac{\vec{n}}{1 - \dfrac{\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{n}}{c}},$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R'}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 1 + \frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{n}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{c}\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{n}} \,.$$

Перейдем к вычислению производных от S :

$$\nabla S = \nabla R' - \frac{1}{c}\left(\dot{\vec{\mathrm{v}}} \cdot \vec{R}'\right)\nabla \tau - \frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}} \cdot \left(\nabla \otimes \vec{R}'\right),$$

$$\nabla \otimes \vec{R}' = I - \nabla \tau \otimes \vec{\mathrm{v}} \,,$$

где I – единичный тензор.

$$\nabla S = \nabla R' - \frac{1}{c}\left(\dot{\vec{\mathrm{v}}} \cdot \vec{R}'\right)\nabla \tau - \frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}} + \frac{1}{c}\mathrm{v}^2 \nabla \tau =$$
$$= \frac{\vec{R}'}{S} - \frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}} - \frac{\vec{R}'}{cS}\left(-\frac{\dot{\vec{\mathrm{v}}} \cdot \vec{R}'}{c} + \frac{\mathrm{v}^2}{c}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{n}\,\frac{R'}{S} - \frac{1}{c}\left(\dot{\vec{\mathrm{v}}} \cdot \vec{R}'\right)\frac{R'}{S} + \frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\mathrm{v}}\,\frac{R'}{S} \,,$$

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{e}{S^2}\nabla S}_{-\nabla\varphi} - \frac{e\dot{\vec{\mathrm{v}}}}{c^2 S}\frac{R'}{S} + \frac{e\vec{\mathrm{v}}}{c^2 S^2}\frac{\partial S}{\partial t} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \,.$$

Соберем в $\vec{E}_1$ все слагаемые, которые не содержат ускорения, а в $\vec{E}_2$ – все, которые содержат ускорение:

$$\vec{E}_1 = \frac{e}{S^2}\left(\frac{\vec{R}'}{S} - \frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}} - \frac{\mathrm{v}^2 \vec{R}'}{c^2 S}\right) + \frac{e\,\vec{\mathrm{v}}}{c^2 S^2}\left(-\vec{\mathrm{v}}\cdot \vec{n}\,\frac{R'}{S} + \frac{\mathrm{v}^2\, R'}{cS}\right) =$$

$$= \frac{e\vec{R}'}{S^3} - \frac{e\vec{\mathrm{v}}}{cS^2} + \frac{e\mathrm{v}^2}{c^2 S^3}\left(-\vec{R}' + \frac{\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{R}'}{c}\right) - \frac{e\vec{\mathrm{v}}}{c^2 S^3}\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{R}' \,,$$

$$\vec{E}_2 = \frac{e}{S^2}\frac{\dot{\vec{\mathrm{v}}} \cdot \vec{R}'}{c}\frac{\vec{R}'}{cS} - \frac{e\dot{\vec{\mathrm{v}}}R'}{c^2 S^2} - \frac{e\vec{\mathrm{v}}}{c^3 S^3}\left(\dot{\vec{\mathrm{v}}} \cdot \vec{R}'\right)R' \,.$$

На больших расстояниях от заряда $\vec{E}_1$ убывает, как R^{-2}, поэтому $\vec{E}_1$ не дает вклада в излучение энергии, в то время как $\vec{E}_2$

убывает всего лишь как R^{-1}. Отсюда делаем вывод, что ускоренно движущийся заряд, вообще говоря, излучает энергию.

Учебное издание

Любимов Дмитрий Викторович

Электродинамика. Электромагнитное поле в вакууме

Учебное пособие

Редактор Н.В.Петрова
Компьютерная верстка М.А.Кокаровцевой, Л.С.Клименко

Подписано в печать 3.12.2007. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 5,35. Уч.- изд. л. 2,8. Тираж 100 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел Пермского университета
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
Типография Пермского университета
614990, Пермь, ул. Букирева, 15