МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Д. В. Любимов, Б. С. Марышев, К. Б. Циберкин

ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Допущено методическим советом Пермского государственного национального исследовательского университета в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Физика», «Радиофизика», «Прикладные математика и физика», «Нанотехнологии и микросистемная техника»

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2016

УДК 514.742, 514.743
ББК 22.151.5
Л 93

Любимов Д. В., Марышев Б. С., Циберкин К. Б.

Л 93 Векторный и тензорный анализ: учеб. пособие / Д. В. Любимов, Б. С. Марышев, К. Б. Циберкин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2016. – 92 с.

ISBN 978-5-7944-2715-8

В учебном пособии излагаются избранные вопросы тензорной алгебры, недостаточно освещённые в доступной учебной литературе. Цель пособия – помочь студентам, изучающим курс тензорного анализа, овладеть основными понятиями предмета и приёмами работы с тензорами.

Предназначено для студентов направлений «Физика», «Радиофизика», «Прикладные математика и физика», «Нанотехнологии и микросистемная техника».

УДК 514.742, 514.743
ББК 22.151.5

Печатается по решению редакционно-издательского совета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: Кафедра общей и экспериментальной физики Перм. гос. гуманитарно-пед. ун-та (зав. кафедрой – д. ф.-м. н., проф. ***В. Г. Козлов***); к. ф.-м. н., ст. преп. кафедры общей физики Перм. нац. исслед. политехн. ун-та ***И. С. Файзрахманова***

ISBN 978-5-7944-2715-8

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Преобразования координат

При описании физических систем мы обычно пользуемся какой-либо системой координат (СК). С другой стороны, физические закономерности от выбора СК, разумеется, не зависят, поэтому наиболее адекватным математическим языком, на котором эти закономерности следует формулировать, будет такой, который явно учитывает равноправие всех СК. Именно такой язык даёт нам тензорный анализ, позволяющий вводить новые объекты, производить вычисления и т.д. независимо от СК, точнее, как бы во всех СК сразу, переходя, как только это становится удобным, к какой-либо конкретной, наиболее подходящей в данном случае СК.

Прежде чем переходить к построению собственно тензорного аппарата, необходимо вспомнить некоторые основные сведения из теории преобразования координат.

Мы ограничимся лишь наиболее простым случаем декартовых СК, имеющих общее начало. Каждой точке пространства в данной СК ставится в соответствие тройка чисел – *координаты* этой точки. Удобно обозначать координаты относительно заданной СК одной буквой, различая их с помощью индекса, например x_1, x_2, x_3 или y_1, y_2, y_3 и т.п. Возьмём какие-либо две СК, одну из них условимся называть старой и координаты относительно неё обозначим x_1, x_2, x_3, другую – новой, с координатами y_1, y_2, y_3. Зная координаты какой-либо точки пространства в одной СК, можно найти координаты в другой. Как известно, такое преобразование является линейным и однородным:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3, \\ x_2 &= \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{23} y_3, \\ x_3 &= \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 + \alpha_{33} y_3, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где коэффициенты $\alpha_{11}, \alpha_{12} \ldots$ – постоянные числа для каждой СК.

Формулы (1.1) можно переписать более компактно:

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} y_j, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1.2}$$

Индексы, по которым нет суммирования, называются *свободными*. Например, в соотношении (1.2) индекс i – свободный. В дальнейшем будем полагать, что соотношение, содержащее свободные индексы, всегда есть краткая запись целой системы соотношений, получающихся, если вместо свободных индексов подставить любые возможные их значения, т.е. 1,2 или 3, поэтому указания типа $i = 1, 2, 3$, как в (1.2), будут опускаться.

Индексы, по которым ведётся суммирование, называются *немыми*. Так, в (1.2) индекс j – немой.

В тензорном анализе различные суммы встречаются очень часто, поэтому условились записывать их в компактном виде: так как почти всегда немой индекс встречается в данной сумме, по крайней мере, два раза, можно по этому признаку узнавать сумму, а значок Σ опускать. Например,

$$A_i B_i = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3,$$

$$A_{kk} = \sum_{k=1}^{3} A_{kk} = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

$$A_{ik} B_{ki} = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} A_{ik} B_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} A_{ik} B_{ki} \right) = \sum_{i,k=1}^{3} A_{ik} B_{ki}.$$

Такое упрощение записи сумм называется *соглашением Эйнштейна о немых индексах*. Нужно хорошо запомнить простые правила работы с индексами.

1. Число и обозначение свободных индексов должно быть одинаково во всех одночленах данного выражения. Примеры: записи $T_{ik} = A_i B_k$ и $T_{pq} = A_p B_q$ эквивалентны, записи $T_j = A_i + B_j$, $T_{jk} = B_j + C_j$, $T_{jk} = B_j + C_k$ – запрещены.

2. Немой индекс может быть обозначен любой буквой (отсюда его название), отличной от обозначений свободных индексов и других немых индексов того же одночлена. Примеры: $A_j B_j$ может быть записано как $A_k B_k$, $A_q B_q$ и т.д.; выражение $C_j + T_{jk} B_k$ эквивалентно $C_j + T_{js} B_s$, но нельзя написать $C_j + T_{jj} B_j$. Особенно осторожными нужно быть при работе с многократными суммами: выражения $T_{ij} D_{ji}$ и $T_{ii} D_{ii}$ несут совершенно разный смысл, в первом случае мы имеем двукратную сумму, во втором – однократную. Чтобы предупредить такого рода ошибки, часто формулируют ещё одно правило.
3. Немой индекс не может появиться в каждом одночлене более двух раз.

Правда, такое ограничение не даёт возможности, например, сумму $A_{11} B_1 + A_{22} B_2 + A_{33} B_3$ записать кратко как $A_{jj} B_j$, однако в тензорном анализе по причинам, которые будут ясны из дальнейшего, такие суммы и не появляются.

После этого отступления вернёмся к преобразованиям координат. Теперь мы можем вместо громоздкой записи (1.1) и более компактной (1.2) написать ещё короче:

$$x_i = \alpha_{ij} y_j . \tag{1.3}$$

Величины, снабжённые двумя индексами, удобно представлять в виде матрицы. Условимся, что первый индекс будет нумеровать строки матрицы, а второй индекс – столбцы. Например, T_{23} есть элемент матрицы T_{ij}, стоящий на пересечении второй строки и третьего столбца.

Матрицу α_{ij} называют матрицей прямого преобразования координат.

Старая и новая СК совершенно равноправны. Поэтому наряду с (1.3) должны существовать соотношения

$$y_j = \beta_{ji} x_i , \tag{1.4}$$

т.е. соотношения (1.3) должны быть обратимы. Матрицу β_{ji} называют матрицей обратного преобразования координат. Установим связь между α_{ij} и β_{ji}. Будем рассматривать (1.3) как систему уравнений, где x_i нам известны, а новые координаты y_j – неизвестны. Как доказывается в курсе линейной алгебры, система неоднородных линейных уравнений однозначно разрешима лишь тогда, когда определитель матрицы этой системы отличен от нуля. Определитель матрицы α_{ij} называется *якобианом преобразования* и обозначается Δ. Таким образом, $\Delta \neq 0$. В этом случае, как известно, существует обратная матрица α_{ij}^{-1}, произведение которой с исходной матрицей даёт единичную матрицу, т.е. такую, у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю. Элементы единичной матрицы обозначают δ_{ij} – *символом Кронекера* или *дельта-символом*. Из вышесказанного следует

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.5}$$

Произведение матриц по обычному правилу «строка на столбец» очень легко записывается с помощью наших правил работы с индексами. Если, например, матрица Q_{ij} есть произведение матриц P_{ij} и T_{ij}, то

$$Q_{ij} = P_{ik} T_{kj}.$$

Таким образом, можно написать

$$\alpha_{ik}^{-1} \alpha_{kj} = \delta_{ij}. \tag{1.6}$$

Умножим правую и левую части (1.3) на α_{ki}^{-1}:

$$\alpha_{ki}^{-1} x_i = \alpha_{ki}^{-1} \alpha_{ij} y_j = \delta_{kj} y_j = y_k. \tag{1.7}$$

Последнее равенство в (1.7) получилось потому, что в сумме $\delta_{kj} y_j$ на самом деле отлично от нуля лишь одно слагаемое, в котором $k = j$, по определению дельта-символа. Иными словами, суммирование с дельта-символом сводится к **переобозначению индекса**. Итак, мы получили

$$y_k = \alpha_{kj}^{-1} x_j,$$

или, меняя обозначения индексов,

$$y_i = \alpha_{ij}^{-1} x_j. \tag{1.8}$$

Сравнивая (1.8) с (1.4), заключаем, что искомая связь имеет вид

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij}^{-1}, \tag{1.9}$$

т.е. матрица обратного преобразования координат совпадает с обратной матрицей прямого преобразования. Учитывая (1.6), запишем (1.9) в другом виде

$$\beta_{ij} \alpha_{jk} = \delta_{ik}. \tag{1.10}$$

Рассмотрим две точки пространства с координатами x_i и $x_i + a_i$, т.е. их координаты отличаются на a_i. Разности координат этих двух точек относительно новой СК обозначим b_i. Так как формулы (1.3), (1.4) линейны и однородны, то разности координат преобразуются по тем же формулам, что и сами координаты. Поэтому

$$a_i = \alpha_{ij} b_j. \tag{1.11}$$

По теореме Пифагора расстояние S между точками пространства определяется формулой

$$S^2 = a_i a_i, \tag{1.12}$$

т.е. квадрат расстояния равен сумме квадратов разностей координат. В дальнейшем мы ограничимся лишь такими преобразованиями, которые не изменяют масштаба длины. Для таких преобразований должно быть

$$S^2 = a_i a_i = b_i b_i. \tag{1.13}$$

Подставив в (1.13) формулу (1.11), получим

$$a_i a_i = \alpha_{ij} \alpha_{ik} b_j b_k = b_j b_j.$$

Это условие удовлетворяется, если

$$\alpha_{ij} \alpha_{jk} = \delta_{ik}. \tag{1.14}$$

Преобразования, обладающие свойством (1.14), называются *ортогональными*. Сравнив с (1.10), получаем

$$\alpha_{ij} = \beta_{ji}, \tag{1.15}$$

т.е. матрица обратного преобразования координат образуется из α_{ij} заменой строк на столбцы – операцией, которую в алгебре называют *транспонированием*. Поскольку определитель при транспонировании не меняется, определитель произведения матриц равен произведению определителей, а определитель единичной матрицы – единице, то из (1.10) и (1.15) получаем

$$\Delta \cdot \Delta = 1,$$

откуда $\Delta = \pm 1$. Таким образом, есть два типа ортогональных преобразований: с $\Delta = 1$ и $\Delta = -1$. Преобразования первого типа называют *собственными*, второго – *несобственными*. Примерами собственных преобразований могут служить различные повороты СК, несобственных – отражения.

Пример

Упростить и выписать компоненты объекта $b_j d_{ik} \delta_{kj}$.

Решение:

1) объект $b_j d_{ik} \delta_{kj}$ имеет один свободный индекс (индекс i не повторяется), тогда его можно переписать в виде $y_i = b_j d_{ik} \delta_{kj}$;

2) индексы k, j – немые, по ним ведется суммирование;

3) сумма по индексу k для $d_{ik}\delta_{kj}$ сводится к переобозначению индекса. В результате имеем: $d_{ik}\delta_{kj} = d_{ij}$;

4) тогда $y_i = b_j d_{ij}$, или в виде суммы:

$$y_i = b_j d_{ij} = \sum_{j=1}^{3} b_j d_{ij} = d_{i1}b_1 + d_{i2}b_2 + d_{i3}b_3 \ ;$$

5) подставив значения, принимаемые свободным индексом $i = 1 \ldots 3$, получим ответ – три компоненты объекта y :

$$y_1 = d_{11}b_1 + d_{12}b_2 + d_{13}b_3,$$
$$y_2 = d_{21}b_1 + d_{22}b_2 + d_{23}b_3,$$
$$y_3 = d_{31}b_1 + d_{32}b_2 + d_{33}b_3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Упростить и выписать компоненты объекта:

1) $b_i a_j p_k q_m \delta_{km} \delta_{mj}$; 2) $c_{ij} a_k b_m \delta_{km} \delta_{ij}$; 3) $a_{ij} b_s b_k \delta_{ks} \delta_{ij}$;

4) $a_i c_j b_s b_k \delta_{ks} \delta_{jm} \delta_{mn}$; 5) $a_{mqp} \delta_{qp}$; 6) $\delta_{im} a_m a_s \delta_{sj} - \delta_{ik} a_n a_n \delta_{kj}$;

7) $a_{sq} b_t b_n \delta_{si} \delta_{tn} \delta_{qj} - a_{st} b_q b_n \delta_{st} \delta_{qi} \delta_{nj}$.

1.2. Понятие вектора

Кроме координат и их приращений, в физике часто встречаются другие связанные с СК наборы величин, которые преобразуются друг через друга при переходе к новой СК. Приведём простейшие примеры. Скорости изменения со временем координат материальной частицы

$$v_i = \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$$

преобразуются так же, как сами координаты. Действительно,

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{d(\alpha_{ij} y_j)}{dt} = \alpha_{ij} \frac{dy_j}{dt} = \alpha_{ij} \dot{y}_j ,$$

$$v_i = \alpha_{ij} v'_j ,$$

где обозначено $v'_j = \dot{y}_j$.

Аналогично ведут себя ускорения

$$a_i = \dot{v}_i = \alpha_{ij} \dot{v}'_j = \alpha_{ij} a'_j ,$$

поскольку масса не зависит от координат, то, в силу уравнений Ньютона, силы

$$F_i = ma_i = m\alpha_{ij} a'_j = \alpha_{ij} F'_j .$$

Эти примеры можно умножить. Во всех примерах мы видим, что имеются наборы величин, разные в разных СК, но связанные друг с другом аналогично координатам. Обобщая многочисленные примеры такого рода, введём понятие вектора. *Вектором* называется совокупность троек чисел A_i, A'_j,…, заданных во всех возможных СК и связанных друг с другом так же, как координаты:

$$A_i = \alpha_{ij} A'_j, \quad A'_i = \alpha_{ji} A_j . \tag{1.16}$$

При этом числа A_i называются компонентами вектора в данной СК. Важно подчеркнуть, что вектор – не просто тройка чисел, а совокупность таких троек во всех СК. Если в какой-либо СК компоненты вектора известны, то по формулам (1.16) можно найти компоненты в любой другой СК, так что компоненты являются, так сказать, «полномочным представителем» вектора в данной СК. Если в какой-либо СК взять произвольную тройку чисел в качестве A_i и по (1.16) поставить ей в соответствие тройки чисел в других СК, мы получим, очевидно, вектор, или, как принято говорить, вектор имеет три независимые компоненты.

Мы будем обозначать вектор обычно той же буквой, что и компоненты, но без индексов. Во избежание путаницы над значком вектора будем ставить стрелку, например: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ и т.д.

Пример

Найти итоговую матрицу преобразования и определить тип преобразования, если над системой координат были произведены следующие последовательные преобразования: **1.** поворот вокруг оси x_1 на угол 60 градусов. **2.** поворот вокруг оси x_2' на угол 30 градусов. **3.** ось x_3'' отразили.

Решение:

1) преобразования координат можно связать с преобразованием вектора $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$;

2) запишем вектор, преобразованный по правилу **1.**, с помощью матрицы $\mathbf{A}$ в виде $\vec{X}' = (x_1', x_2', x_3') = \mathbf{A}\vec{X}$ или $x_i' = A_{ij} x_j$;

3) запишем преобразование **1.** в явном виде (поскольку поворот вокруг x_1, то ось x_1 сохраняет положение и координата не преобразуется см. рис. 1):

$$\begin{aligned}
i = 1: \quad & x_1' = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 = x_1, \\
i = 2: \quad & x_2' = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = x_2 \cos 60^\circ + x_3 \sin 60^\circ, \\
i = 3: \quad & x_3' = A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 = -x_2 \sin 60^\circ + x_3 \cos 60^\circ;
\end{aligned}$$

4) сравнивая с индексной формой записи, найдем матрицу $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

5) запишем вектор, преобразованный по правилу **2.**, с помощью матрицы $\mathbf{A}'$ в виде $\vec{X}'' = (x_1'', x_2'', x_3'') = \mathbf{A}'\vec{X}'$ или $x_i'' = A_{ij}' x_j'$

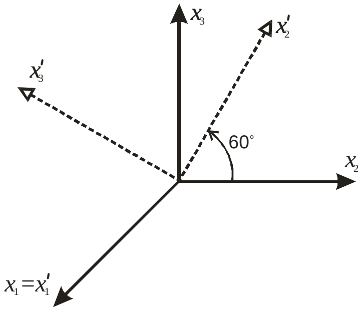

Рис 1. Поворот вокруг оси x_1 на 60 градусов

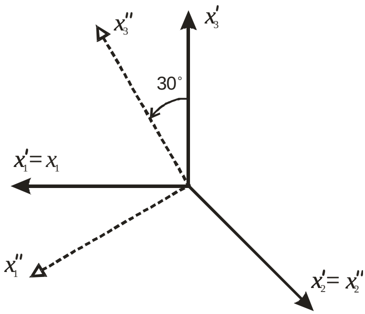

Рис 2. Поворот вокруг оси x_2' на 30 градусов

6) запишем преобразование **2.** в явном виде (поскольку поворот вокруг x_2', то ось x_2' сохраняет положение и координата не преобразуется; см. рис. 2):

$$
\begin{aligned}
i=1: &\quad x_1'' = A_{11}'x_1' + A_{12}'x_2' + A_{13}'x_3' = x_1'\cos 30^\circ - x_3'\sin 30^\circ,\\
i=2: &\quad x_2'' = A_{21}'x_1' + A_{22}'x_2' + A_{23}'x_3' = x_2',\\
i=3: &\quad x_3'' = A_{31}'x_1' + A_{32}'x_2' + A_{33}'x_3' = x_1'\sin 30^\circ + x_3'\cos 30^\circ;
\end{aligned}
$$

7) сравнивая с индексной формой записи, найдем матрицу $\mathbf{A}'$:

$$
\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix};
$$

8) запишем вектор, преобразованный по правилу **3.**, с помощью матрицы $\mathbf{A}''$ в виде $\vec{X}''' = \left(x_1''', x_2''', x_3'''\right) = \mathbf{A}''\vec{X}''$;

9) запишем преобразование **3.** (при отражении оси координаты меняют знак) и найдем матрицу преобразования $\mathbf{A}''$:

$$
\mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

10) найдём итоговую матрицу преобразования $\mathbf{B} = \mathbf{A}''\mathbf{A}'\mathbf{A}$ или $B_{ij} = A''_{ik}A'_{kn}A_{nj}$ или в явном виде:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & 3/4 & -\sqrt{3}/4 \end{pmatrix};$$

11) найдём определитель матрицы преобразования $\mathbf{B}$:

$$|\mathbf{B}| = \Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & 3/4 & -\sqrt{3}/4 \end{vmatrix} = -1 .$$

Поскольку $\Delta = -1$, преобразование – несобственное.

Задачи для самостоятельного решения

Найти итоговую матрицу преобразования и определить тип преобразования, если над системой координат были произведены следующие последовательные преобразования:

1) **1.** поворот вокруг оси x_2 на угол 60 градусов. **2.** поворот вокруг оси x_1' на угол 30 градусов. **3.** ось x_2'' отразили;

2) **1.** поворот вокруг оси x_3 на угол 60 градусов. **2.** поворот вокруг оси x_2' на угол 30 градусов. **3.** оси x_3'' и x_1'' отразили;

3) **1.** поворот вокруг оси x_1 на угол 90 градусов. **2.** поворот вокруг оси x_3' на угол 30 градусов. **3.** все три оси отразили;
4) **1.** поворот вокруг оси x_3 на угол 60 градусов. **2.** поворот вокруг оси x_1' на угол 90 градусов. **3.** оси x_1'' и x_2'' отразили;
5) **1.** поворот вокруг оси x_2 на угол 90 градусов. **2.** поворот вокруг оси x_1' на угол 30 градусов. **3.** Все три оси отразили;
6) **1.** поворот вокруг оси x_2 на угол 90 градусов. **2.** поворот вокруг оси x_3' на угол 90 градусов. **3.** оси x_1'' и x_3'' отразили.

1.3. Арифметика векторов

Нуль-вектор. Из формул (1.16) видно, что если в некоторой СК все компоненты вектора равны нулю, то они равны нулю во всех СК. Такой вектор называют нуль-вектором. Мы будем обозначать его так же, как и число 0, без всякой стрелки сверху.

Равенство. Пусть даны два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, причём в какой-то СК их компоненты совпадают, т.е. $A_i = B_i$. Докажем, что компоненты будут совпадать во всех СК. Действительно,

$$A_i' = \alpha_{ji} A_j = \alpha_{ji} B_j = B_i.$$

Это даёт возможность определить понятие равенства векторов. Два вектора равны, $\vec{A} = \vec{B}$, если в какой-либо, а значит и во всех СК, их компоненты совпадают.

Умножение на число. Пусть заданы вектор $\vec{A}$ и число λ. Образуем в каждой СК тройку чисел по правилу

$$C_i = \lambda A_i.$$

Покажем, что совокупность наборов C_i образует вектор. Для этого достаточно проверить любую из формул (1.16):

$$C_i = \lambda A_i = \lambda \alpha_{ij} A_j' = \alpha_{ij} (\lambda A_j') = \alpha_{ij} C_j'.$$

Построенный вектор $\vec{C}$ называют *произведением вектора на число*. Таким образом, любой вектор можно умножить на любое число, для чего надо умножить на это число все компоненты вектора.

Сложение векторов. Пусть даны два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Образуем тройки чисел по правилу

$$C_i = A_i + B_i.$$

Совокупность этих троек образует вектор, так как

$$C_i = A_i + B_i = \alpha_{ij} A'_j + \alpha_{ij} B'_j = \alpha_{ij}(A'_j + B'_j) = \alpha_{ij} C'_j.$$

Этот вектор называют *суммой векторов* $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти сумму векторов:

1) $d_i = a_i + b_i - c_i$, $\quad \vec{a} = (1,2,3)$, $\quad \vec{b} = (8,5,2)$, $\quad \vec{c} = (9,7,5)$;

2) $d_i = a_i - (b_i + c_i)$, $\quad \vec{a} = (7,8,5)$, $\quad \vec{b} = (2,3,1)$, $\quad \vec{c} = (4,2,8)$.

1.4. Инварианты векторов. Скалярное произведение

Часто бывает, что некоторая величина, не зависящая от выбора СК (такие величины называются скалярами), зависит, тем не менее, от вектора. Например, кинетическая энергия материальной точки зависит от вектора скорости, но во всех СК имеет одно и то же значение. Скалярная функция векторного аргумента называется *инвариантом вектора*. Ясно, что любая функция инварианта сама является инвариантом, поэтому возникает вопрос о числе независимых инвариантов, т.е. не являющихся функциями друг друга. Во-первых, независимых инвариантов не может быть более трёх, так как вектор имеет три независимых компоненты. Далее, так как для любого вектора $\vec{A}$ найдётся СК, в которой какая-либо ось, например первая, совмещена с вектором $\vec{A}$, т.е. $A_2 = A_3 = 0$, то у вектора имеется лишь один независимый инвариант. В качестве такого можно взять, например, сумму квадратов компонент. Докажем, что это инвариант.

$$A_i A_i = \alpha_{ip}\alpha_{iq}A'_p A'_q = \delta_{pq}A'_p A'_q = A'_p A'_p.$$

Корень квадратный из этой величины называется длиной вектора или модулем вектора и является, следовательно, тоже инвариантом. Модуль вектора $\vec{A}$ будем обозначать $\left|\vec{A}\right|$ или просто *A*. Таким образом, хотя скалярная функция векторного аргумента в каждой СК предстает перед нами как функция трёх переменных – компонент вектора, эта зависимость не может быть произвольной. Фактически это функция одного аргумента – длины вектора.

Рассмотрим теперь скалярные функции двух векторных аргументов – инварианты системы двух векторов. Пусть есть два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Совместим ось номер 1 СК с вектором $\vec{A}$, т.е. выберем СК, в которой $A_2 = A_3 = 0$. Этим условием система координат не определяется однозначно, так как остаётся возможность поворота вокруг оси 1. Этим произволом можно воспользоваться, чтобы обратить в нуль одну из компонент вектора $\vec{B}$, например, B_3. У нас ещё остались A_1, B_1, B_2, и далее уменьшить число отличных от нуля компонент уже невозможно. Это означает, что система двух векторов имеет ровно три независимых инварианта. Два инварианта нам уже известны – длины векторов *A* и *B*. В качестве третьего инварианта можно взять сумму попарных произведений компонент векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Действительно,

$$A_i B_i = \alpha_{ip}\alpha_{iq}A'_p B'_q = \delta_{pq}A'_p B'_q = A'_p B'_p.$$

Этот инвариант называется *скалярным произведением* векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ и обозначается $\vec{A}\cdot\vec{B}$ или $(\vec{A},\vec{B})$:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_i B_i. \tag{1.17}$$

Длина вектора тоже выражается через скалярное произведение, а именно:

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=\vec{A}^2=A_iA_i=|\vec{A}|^2=A^2, \qquad (1.18)$$

т.е.

$$A=\sqrt{\vec{A}^2}. \qquad (1.19)$$

Рассмотрим некоторые свойства скалярного произведения:

– скалярное произведение *линейно* по каждому сомножителю:

$$\vec{A}\cdot(\alpha\vec{B}+\beta\vec{C})=\alpha\vec{A}\cdot\vec{B}+\beta\vec{A}\cdot\vec{C}, \qquad (1.20)$$

и аналогично для первого сомножителя;

– скалярное произведение *коммутативно*:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_iB_i=B_iA_i=\vec{B}\cdot\vec{A}; \qquad (1.21)$$

– *неравенство Шварца*. Рассмотрим выражение $(\vec{A}+\alpha\vec{B})^2$. Это выражение неотрицательно при любых α. Раскрыв скобки, получим

$$A^2+2\alpha\vec{A}\cdot\vec{B}+\alpha^2B^2\geq 0. \qquad (1.22)$$

Выражение в левой части (1.22) можно рассматривать как квадратный трёхчлен относительно α. Условие неотрицательности при любых α означает, что дискриминант этого трёхчлена должен быть неположителен:

$$(\vec{A}\cdot\vec{B})^2-A^2B^2\leq 0, \qquad (1.23)$$

откуда, извлекая квадратный корень, получаем

$$|\vec{A}\cdot\vec{B}|\leq AB. \qquad (1.24)$$

Это и есть неравенство Шварца – модуль квадратного произведения не превосходит произведения модулей;

– *неравенство треугольника*. С помощью неравенства Шварца легко получаем

$$(\vec{A}+\vec{B})^2-A^2+2\vec{A}\cdot\vec{B}+B^2\leq A^2+2AB+B^2=(A+B)^2. \qquad (1.25)$$

Извлекая квадратный корень из правой и левой частей (1.25), получаем неравенство треугольника

$$|\vec{A}+\vec{B}| \le A+B, \tag{1.26}$$

т.е. модуль суммы не превосходит суммы модулей.

Неравенство Шварца позволяет ввести полезное понятие *угла между векторами*. А именно: всегда существует величина ϑ, которая является решением уравнения

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}. \tag{1.27}$$

В соответствии с (1.27) векторы называют *ортогональными*, если $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$, и *параллельными*, если $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB$.

Из (1.27) легко следует *теорема косинусов*: если $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$, то

$$B^2=(\vec{C}-\vec{A})^2=C^2-2\vec{A}\cdot\vec{C}+A^2=C^2-2AC\cos\vartheta+A^2, \tag{1.28}$$

где ϑ – угол между векторами $\vec{A}$ и $\vec{C}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти скалярное произведение векторов:

1) $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(4,0,5)$; 2) $\vec{a}=(3,1,0)$, $\vec{b}=(-1,2,9)$;

3) $\vec{a}=(2,3,2)$, $\vec{b}=(-9,4,3)$; 4) $\vec{a}=(7,7,7)$, $\vec{b}=(-1,0,1)$.

Найти угол между векторами:

1) $\vec{a}=(0,3,3)$, $\vec{b}=(1,0,1)$; 2) $\vec{a}=(3,4,0)$, $\vec{b}=(-1,2,1)$;

3) $\vec{a}=(2,3,2)$, $\vec{b}=(-9,4,3)$; 4) $\vec{a}=(2,-1,3)$, $\vec{b}=(-4,2,-6)$.

1.5. Радиус-вектор

В соответствии с определением вектора сами координаты могут служить компонентами некоторого вектора. Вектор, компонентами которого являются координаты некоторой точки пространства, называется *радиус-вектором* этой точки. Мы будем обозначать радиус-вектор $\vec{r}$ или $\vec{R}$, в то время как его компоненты – x_i или X_i.

Пользуясь понятием радиус-вектора, мы можем написать теперь определение скорости материальной частицы не через её компоненты, а сразу в инвариантном виде:

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} = \frac{d\vec{R}}{dt}. \tag{1.29}$$

Хотя вектор скорости получается с помощью радиус-вектора, есть существенное отличие между радиус-вектором и векторами типа скорости. Это различие касается поведения при переносе начала координат (*трансляции*). Пусть вектор $\vec{a}$ есть радиус-вектор нового начала координат относительно другого. Тогда для произвольной точки пространства

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{R}'. \tag{1.30}$$

С учётом (1.29) получаем

$$\vec{v} = \vec{v}',$$

т.е. скорость при трансляции не меняется. Также не меняются векторы ускорения, силы, импульса, напряжённости электрического поля и др. Причина такого особого поведения радиус-вектора, разумеется, в том, что он характеризует две точки пространства, их относительное положение. Поскольку при трансляции положение одной из этих точек (начала координат) меняется, то, естественно, меняется и радиус-вектор.

1.6. Понятие тензора

Вектор имеет в каждой СК в качестве своего представителя тройку чисел. В физических приложениях часто приходится иметь дело с большими наборами чисел, как-то меняющимися при преобразовании координат. Для примера рассмотрим связь между векторами электрической индукции и напряжённости электрического поля. Если тело обладает различными свойствами по разным направлениям, то каждая компонента вектора индукции $\vec{D}$ определяется, вообще говоря, всеми компонентами $\vec{E}$:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j.$$

Коэффициенты ε_{ij} в каждой СК различны и образуют, очевидно, набор из девяти величин.

Найдём закон преобразования для ε_{ij}.

$$D_i' = \alpha_{ki} D_k = \alpha_{ki} \varepsilon_{kj} E_j = \alpha_{ki} \varepsilon_{kj} \alpha_{jp} E_p' = \varepsilon_{ip}' E_p'.$$

Отсюда видно, что

$$\varepsilon_{ip}' = \alpha_{ki} \alpha_{jp} \varepsilon_{kj}. \tag{1.31}$$

В закон преобразования (1.31) матрица α_{ij} входит дважды, т.е. ε_{ij} преобразуется так же, как произведения координат. Так как совокупности наборов чисел с таким же поведением встречаются часто, было сформулировано обобщающее понятие.

Тензором второго ранга называется совокупность связанных с СК наборов девяти чисел T_{ij}, преобразующихся так же, как произведения двух координат:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \alpha_{ip} \alpha_{jq} T_{pq}', \\ T_{ij}' &= \alpha_{pi} \alpha_{qj} T_{pq}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Следующая ступень обобщения этого понятия – тензоры произвольного ранга.

Тензором n-го ранга называется совокупность связанных с СК наборов 3^n чисел $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, преобразующаяся так же, как произведения n координат:

$$\begin{aligned} T_{i_1 i_2 \ldots i_n} &= \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \ldots \alpha_{i_n j_n} T_{i_1 i_2 \ldots i_n}', \\ T_{i_1 i_2 \ldots i_n}' &= \alpha_{j_1 i_1} \alpha_{j_2 i_2} \ldots \alpha_{j_n i_n} T_{j_1 j_2 \ldots j_n}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Как видно, векторы можно рассматривать как тензоры первого ранга, скаляры – как тензоры нулевого ранга. Обозначать тензоры второго ранга и выше мы обычно будем той же буквой, что и компоненты.

1.7. Арифметика тензоров

Основные понятия и действия арифметики (нуль-тензор, равенство, умножение на число, сложение) вводятся для тензоров произвольного ранга точно так же, как выше делалось для векторов.

Например, сложение тензоров второго ранга: паре тензоров T и P поставим в соответствие в каждой СК набор чисел Q_{ij} по правилу

$$Q_{ij} = T_{ij} + P_{ij}.$$

Закон преобразования наборов Q_{ij}

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= T_{ij} + P_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}T'_{pq} + \alpha_{ip}\alpha_{jq}P'_{pq} = \\ &= \alpha_{ip}\alpha_{jq}(T'_{pq} + P'_{pq}) = \alpha_{ip}\alpha_{jq}Q'_{pq} \end{aligned}$$

является тензорным, поэтому совокупность полученных наборов чисел Q_{ij} образует тензор второго ранга, который называют *суммой тензоров* T *и* P:

$$Q = T + P.$$

Задание всех компонент тензора в какой-либо СК определяет с помощью (1.33) компоненты в любой СК. Пусть, например, g – тензор второго ранга, причём в некоторой СК его компоненты образуют единичную матрицу, т.е. $g_{ij} = \delta_{ij}$. Найдём компоненты тензора g в какой-либо другой СК:

$$g'_{ij} = \alpha_{pi}\alpha_{qj}g_{pq} = \alpha_{pi}\alpha_{qj}\delta_{pq} = \alpha_{pi}\alpha_{pj} = \delta_{ij}.$$

Таким образом, компоненты тензора g в любой СК образуют единичную матрицу, в соответствии с чем и сам тензор g мы будем называть *единичным*.

1.8. Транспонирование. Симметричные и антисимметричные тензоры

Пусть задан тензор второго ранга T. Составим в каждой СК набор чисел $\tilde{T}_{ij}$ по правилу

$$\tilde{T}_{ij} = T_{ji}, \tag{1.34}$$

т.е. матрица $\tilde{T}_{ij}$ образуется путём транспонирования матрицы компонент тензора T. Найдем закон преобразования для $\tilde{T}_{ij}$:

$$\tilde{T}'_{ij} = T'_{ji} = \alpha_{pj}\alpha_{qi}T_{pq} = \alpha_{pj}\alpha_{qi}\tilde{T}_{qp}.$$

Отсюда видно, что наборы $\tilde{T}_{ij}$ образуют компоненты тензора второго ранга $\tilde{T}$, который называют *транспонированным* по отношению к T. Тем самым мы определили операцию транспонирования.

Её свойства:

– операция транспонирования линейна, т.е.

$$\widetilde{(T+P)} = \tilde{T} + \tilde{P}, \quad \widetilde{(\alpha T)} = \alpha\tilde{T}; \tag{1.35}$$

– двукратное применение операции транспонирования

$$\widetilde{(\tilde{T})} = T. \tag{1.36}$$

Доказательство этих свойств очевидно.

Некоторые тензоры обладают специальными свойствами относительно операции транспонирования. Так, бывают тензоры, не меняющиеся при транспонировании, т.е.

$$\tilde{T} = T,$$

или в компонентах

$$T_{ij} = T_{ji}. \tag{1.37}$$

Тензоры, обладающие таким свойством, называют *симметричными*. Условия (1.37) всегда выполняются для компонент, стоящих на главной диагонали, поэтому в (1.37) фактически содержатся три условия на недиагональные компоненты. Так как у тензора второго ранга общего вида 9 независимых компонент, то у симметричного тензора получаем $9 - 3 = 6$ независимых компонент. В качестве таковых можно взять все диагональные компоненты и стоящие над главной диагональю. Тогда компоненты под диагональю определятся из условий симметрии тензора (1.37).

Наряду с симметричными тензорами существуют тензоры, с, в некотором смысле, противоположным свойством – тензоры, которые при транспонировании умножаются на (-1), т.е.

$$\tilde{T} = -T,$$

или

$$T_{ij} = -T_{ji}. \tag{1.38}$$

Такие тензоры называются *антисимметричными*. Из (1.38) видно, что диагональные компоненты антисимметричного тензора должны равняться нулю, так как, например $T_{11} = -T_{11}$, $2T_{11} = 0$, $T_{11} = 0$. Условия антисимметрии связывают наддиагональные и поддиагональные компоненты, так что у антисимметричного тензора всего 3 независимых компоненты, например, наддиагональные.

То, что число независимых компонент симметричного и антисимметричного тензоров в сумме составляет 9, т.е. совпадает с числом независимых компонент произвольного тензора второго ранга, наводит на мысль, что произвольный тензор можно разбить на симметричную и антисимметричную части. Проверим это.

Предположим сначала, что разбиение возможно и докажем его единственность. Пусть

$$T = T^s + T^a, \tag{1.39}$$

где $\tilde{T}^s = T^s$, $\tilde{T}^a = -T^a$.

Применим к (1.39) операцию транспонирования

$$\tilde{T} = \tilde{T}^s + \tilde{T}^a = T^s + \left(-T^a\right) = T^s - T^a. \qquad (1.40)$$

Складывая (1.39) и (1.40), получаем

$$2T^s = T + \tilde{T},$$

а вычитая –

$$2T^a = T - \tilde{T}.$$

Таким образом,

$$T^s = \frac{1}{2}(T + \tilde{T}), \qquad T^a = \frac{1}{2}(T - \tilde{T}). \qquad (1.41)$$

В предположении существования T^s и T^a для них получены явные формулы, что доказывает единственность разложения на симметричную и антисимметричную части, когда оно возможно.

Пусть теперь нам не известно, допускает ли тензор T искомое разложение. Формулы (1.41) по-прежнему имеют смысл, однако теперь нет гарантии, что эти формулы дают то, что нужно. Исследуем T^s и T^a, вычисленные согласно (1.41). Применяя транспонирование, получаем

$$\tilde{T}^s = \frac{1}{2}\left(\tilde{T} + (\tilde{\tilde{T}})\right) = \frac{1}{2}(\tilde{T} + T) = T^s,$$

$$\tilde{T}^a = \frac{1}{2}(\tilde{T} - T) = -T^a,$$

т.е. T^s получается симметричным, T^a – антисимметричным. Найдём их сумму:

$$T^s + T^a = \frac{1}{2}(T + \tilde{T} + T - \tilde{T}) = \frac{1}{2} \cdot 2T = T.$$

Тем самым мы показали, что формулы (1.41) дают возможность для любого тензора второго ранга найти его симметричную и антисимметричную части.

Посмотрим на численном примере, как делается такое разбиение. Пусть в некоторой СК матрица компонент тензора T имеет вид

$$\left(T_{ij}\right)=\begin{pmatrix}3 & 2 & 9\\ 9 & 5 & 3\\ 4 & 2 & 6\end{pmatrix}.$$

Тогда матрица компонент $\tilde{T}$ такова:

$$\left(\tilde{T}_{ij}\right)=\begin{pmatrix}3 & 9 & 4\\ 2 & 5 & 2\\ 9 & 3 & 8\end{pmatrix}.$$

По формулам (1.41) получаем матрицы T^s и T^a:

$$\left(T_{ij}^s\right)=\begin{pmatrix}3 & 11/2 & 13/2\\ 11/2 & 5 & 5/2\\ 13/2 & 5/2 & 8\end{pmatrix},$$

$$\left(T_{ij}^a\right)=\begin{pmatrix}0 & -7/2 & 5/2\\ -7/2 & 0 & 1/2\\ 5/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}.$$

С тензорами, обладающими определённой симметрией, удобней работать, поэтому в большинстве случаев стараются разбить встречающиеся тензоры на симметричную и антисимметричную части.

Задачи для самостоятельного решения

Разложить тензор на симметричную и антисимметричную части:

$$1)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix};\quad 2)\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 3\\ 2 & 2 & 7\end{pmatrix};\quad 3)\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & 6\\ 5 & 7 & 1\end{pmatrix};\quad 4)\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 5 & 8 & 9\\ 9 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

1.9. Прямое произведение

Существует простой способ получения тензоров высокого ранга из тензоров низких рангов. Начнём с векторов. Пусть даны два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Составим в каждой СК набор чисел T_{ij} по правилу

$$T_{ij} = A_i B_j. \tag{1.42}$$

Используя преобразование компонент векторов, получим

$$T_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}A'_p B'_q = \alpha_{ip}\alpha_{iq}T'_{pq}.$$

Таким образом, совокупность наборов T_{ij} образует тензор второго ранга. Этот тензор называют *прямым произведением* вектора $\vec{A}$ на вектор $\vec{B}$ и обозначают

$$T = \vec{A} \otimes \vec{B}. \tag{1.43}$$

Очевидные свойства прямого произведения:

-линейность по каждому сомножителю;

-некоммутативность, т.е., вообще говоря,

$$\vec{A} \otimes \vec{B} \neq \vec{B} \otimes \vec{A}.$$

Однако между произведениями $\vec{A} \otimes \vec{B}$ и $\vec{B} \otimes \vec{A}$ есть простая связь

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = \vec{B} \otimes \vec{A}. \tag{1.44}$$

Проверьте сами!

Совершенно аналогично прямому произведению векторов определяется прямое произведение произвольных тензоров. Очевидно, всегда ранг результата равен сумме рангов сомножителей. Так, если T – тензор второго ранга, а D – третьего ранга, то $T \otimes D$ – тензор пятого ранга с компонентами

$$(T \otimes D)_{ijklm} = T_{ij} D_{klm}.$$

1.10. Упрощения и свертки

Операция упрощения позволяет из любого тензора ранга больше единицы приготовить тензор меньшего ранга. Рассмотрим эту операцию на примере тензора третьего ранга. Пусть нам дан тензор D третьего ранга. В каждой СК приготовим из компонент тензора D набор чисел C_i по правилу

$$C_i = D_{ijj}. \tag{1.45}$$

Сравним C_i в разных СК:

$$C_i = D_{ijj} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{js}D'_{pqs} = \alpha_{ip}\delta_{qs}D'_{pqs} = \alpha_{ip}D'_{pqq} = \alpha_{ip}C'_p.$$

Видим, что числа C_i можно интерпретировать как компоненты некоторого вектора. Этот вектор называют *упрощением тензора* D по второму и третьему индексам. Аналогично можно упростить D по первому и второму или по первому и третьему индексам. Из тензора третьего ранга можно с помощью упрощения получить три различных вектора. Точно так же производится упрощение тензоров других рангов. Всегда при этом во всех СК какая-то фиксированная пара индексов отождествляется, т.е. по ней происходит суммирование. Число свободных индексов у компонент тензора уменьшается на два, поэтому после упрощения всегда получается тензор на два ранга меньше, чем исходный.

Часто упрощение применяют к прямому произведению двух тензоров. Такая комбинированная операция получила название *свёртки* и обозначается точкой между тензорами, например, $T{\cdot}P$. Ранг результата равен сумме рангов тензоров минус два. При упрощении тензоров ранга больше двух нужно указывать, по какой паре индексов происходит упрощение. В случае свёртки условились, если не оговорено противное, упрощать по внутренней паре индексов, т.е. по последнему индексу первого тензора и первому индексу второго. Например, свёртка двух тензоров T и P есть тензор второго ранга $T{\cdot}P$, компоненты которого в любой СК подсчитываются по правилу

$$\left(T\cdot P\right)_{ij}=T_{ik}P_{kj}.$$

Здесь индексы *k* образуют внутреннюю пару индексов. Если исходные тензоры имели ранг >1, можно продолжать упрощение по следующей паре внутренних индексов. Результат называют двукратной свёрткой и обозначают двумя точками между тензорами. Например, двукратная свёртка двух тензоров второго ранга есть скаляр

$$T:P=T_{ij}P_{ji}.$$

Аналогично определяется трёхкратная свёртка и т.д.

Очевидно, однократная свёртка векторов совпадает со скалярным произведением и коммутативна. Однократная свёртка тензоров более высокого ранга коммутативностью не обладает, зато коммутативна двукратная свёртка двух тензоров второго ранга

$$T:P=T_{ij}P_{ji}=P_{ji}T_{ij}=P:T.$$

Ещё одно важное свойство двукратной свёртки: если тензор T (произвольно высокого ранга >1) антисимметричен по последней паре индексов, а P симметричен по первой паре индексов, то $T:P=0$. Действительно,

$$T:P=T_{\dots ij}P_{ji\dots}=T_{\dots ji}P_{ij\dots}=-T_{\dots ij}P_{ji\dots}=-T:P,$$

откуда и вытекает утверждение. При доказательстве мы воспользовались возможностью менять обозначения немых индексов и свойствами симметрии *T* и *P*.

Задачи для самостоятельного решения

1) Доказать, что числа $c_{ij}=x_i y_j$ образуют тензор второго ранга, если $\vec{a}=\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $\vec{b}=\left(y_1,y_2,y_3\right)$ – вектора заданные в ортонормированном базисе.

2) Доказать, что при ортогональных преобразованиях компоненты единичного тензора δ_{ij} не меняются, т.е., что $\delta'_{ij}=\delta_{ij}$.

1.11. Шпур. Разложение тензора второго ранга на неприводимые

Шпуром тензора второго ранга *T* называют скаляр $\mathrm{Sp}(T)$, получившийся в результате упрощения тензора *T*. Другое название – *след* тензора *T*. Из определения ясно, что

$$\mathrm{Sp}(T) = T_{ii},$$

т.е. шпур равен сумме диагональных компонент.

Простейшие свойства шпура:

шпур антисимметричного тензора равен нулю, т.к. равны нулю все диагональные элементы; шпур прямого произведения векторов равен скалярному произведению

$$\mathrm{Sp}\left(\vec{A} \otimes \vec{B}\right) = A_i B_i = \vec{A} \cdot \vec{B}.$$

Шпур однократной свёртки тензоров второго ранга равен двукратной свёртке:

$$\mathrm{Sp}\left(T \cdot P\right) = T : P = P : T = \mathrm{Sp}\left(P \cdot T\right).$$

Шпур единичного тензора равен 3:

$$\mathrm{Sp}(g) = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

Введём два новых определения.

Тензоры, лишь коэффициентом отличающиеся от единичного, называются *шаровыми*. Шаровой тензор полностью характеризуется этим коэффициентом и поэтому имеет одну независимую компоненту.

Тензор второго ранга, имеющий нулевой шпур, называется *бесследовым тензором*. Он имеет 5 независимых компонент (почему?).

Оказывается, любой симметричный тензор можно разбить на шаровую и бесследовую части. Как обычно, предположим сначала, что это возможно.

$$\begin{gathered} T = \lambda g + D, \\ \tilde{T} = T, \ \mathrm{Sp}D = 0. \end{gathered} \tag{1.46}$$

Отсюда получаем

$$\begin{gathered}\text{Sp T}=\lambda \text{Sp}\, g + \text{Sp}\, D = 3\lambda, \\ \lambda = \frac{1}{3}\text{Sp}T,\ \ D = T - \frac{1}{3} g\text{Sp}(T).\end{gathered} \tag{1.47}$$

Бесследовую часть тензора называют *девиатором* и обозначают $Dev(T)$. Таким образом,

$$T = \frac{1}{3} g\text{Sp}T + Dev(T).$$

Вспоминая, что произвольный тензор можно разбить на симметричную и антисимметричную части, получаем разложение произвольного тензора второго ранга на три части:

$$T = \frac{1}{3} g\text{Sp}T + T^a + Dev(T). \tag{1.48}$$

Здесь под $Dev(T)$ понимается девиатор симметричной части.

Разбиение (1.48) тензора второго ранга на шаровую, антисимметричную и бесследовую части называют *разложением тензора на неприводимые* тензоры. Так как разложение на неприводимые инвариантно (неприводимые части являются тоже тензорами), то любое тензорное уравнение второго ранга можно записать по отдельности для каждой неприводимой части. При этом уравнение для шаровых частей сведётся к приравниванию коэффициентов при g, т.е. к скалярному уравнению для шпуров.

Пример

Разложить тензор $\mathbf{T} = T_{ij}$ на неприводимые:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1) найдём транспонированный тензор

$$\tilde{\mathbf{T}} = T_{ji} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 5 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix};$$

2) найдём по формуле (1.41) симметричную и антисимметричную часть тензора

$$\mathbf{T}^s = \frac{1}{2}\left(\mathbf{T} + \tilde{\mathbf{T}}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{T}^a = \frac{1}{2}\left(\mathbf{T} - \tilde{\mathbf{T}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

3) найдём шпур тензора $\mathrm{Sp}\,\mathbf{T} = 3 + 5 + 7 = 15$;

4) найдём девиатор симметричной части тензора

$$Dev\left(\mathbf{T}^s\right) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

5) запишем итоговое разложение в форме (1.48):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Разложить тензор $\mathbf{T} = T_{ij}$ на неприводимые:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & 6 \\ -9 & -6 & 0 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & -9 \\ -5 & -8 & -1 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.12. Тензор второго ранга как аффинор

Пусть задан некоторый закон, ставящий в соответствие каждому вектору какой-то другой вектор. В этом случае говорят также, что задан *оператор*, переводящий один вектор в другой. Пишут

$$\vec{C} = L(\vec{A}) \tag{1.49}$$

и говорят: вектор $\vec{C}$ получается из вектора $\vec{A}$ под действием оператора L.

В физике есть много примеров такого рода. Так, индукция электрического поля $\vec{D}$ есть функция напряжённости $\vec{E}$, намагниченность $\vec{M}$ определяется напряжённостью магнитного поля $\vec{H}$, линейная скорость $\vec{v}$ точки тела, совершающего вращательное движение, выражается через радиус-вектор этой точки $\vec{R}$ и т.д.

Часто бывает так, что оператор L линейный, т.е.

$$L(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}) = \alpha L(\vec{A}) + \beta L(\vec{B}).$$

В этом случае оператор называют *аффинором*. Если L – аффинор, то в каждой СК связь $\vec{C} = L(\vec{A})$ выразится в виде линейных соотношений между компонентами $\vec{C}$ и $\vec{A}$:

$$C_i = T_{ij}A_j. \tag{1.50}$$

Коэффициенты T_{ij} являются *представителем аффинора* в данной СК. В другой СК тот же аффинор будет представлен другими коэффициентами. Поступая так же, как в п. 1.6, можем заключить, что коэффициенты T_{ij} образуют компоненты некоторого тензора второго ранга. Тогда связь (1.49) или (1.50) может быть записана в виде

$$\vec{C} = T \cdot \vec{A}.$$

Таким образом, любой аффинор определяет некоторый тензор второго ранга, и обратно, любой тензор второго ранга можно рассматривать как аффинор, так как свёртка тензора с вектором даёт новый вектор, причём эта свёртка удовлетворяет условию линейности.

1.13. Оператор проектирования

Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор, т.е. $n^2 = 1$. Составим с помощью $\vec{n}$ тензор второго ранга

$$T = \vec{n} \otimes \vec{n}$$

и будем его рассматривать как аффинор. К чему сводится действие такого аффинора на вектор?

$$\vec{C} = T \cdot \vec{A} = (\vec{n} \otimes \vec{n}) \cdot \vec{A} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{A}).$$

Но $\vec{n} \cdot \vec{A}$ есть проекция вектора $\vec{A}$ на направление $\vec{n}$, так что вектор $\vec{C}$ направлен вдоль $\vec{n}$ и имеет величину, равную проекции $\vec{A}$ на $\vec{n}$. Аффинор, ставящий в соответствие любому вектору его составляющую вдоль заданного направления, называется *проектором* на это направление. Таким образом, мы получили: проектор на любое направление может быть записан как прямое произведение единичного вектора, ориентированного вдоль этого направления, на самого себя.

1.14. Собственные числа и собственные векторы аффинора

Рассмотрим аффинор, задаваемый симметричным тензором второго ранга *T*. Под его действием любой вектор, вообще говоря, поворачивается и изменяет длину:

$$T\cdot\vec{A}=\vec{B}.$$

Но при специальном выборе вектора $\vec{A}$ может оказаться, что изменилась лишь длина вектора, но не направление:

$$T\cdot\vec{A}=\lambda\vec{A}. \tag{1.51}$$

В этом случае вектор $\vec{A}$ называют *собственным вектором* тензора *T*, а число λ, показывающее, как изменилась длина собственного вектора под действием *T*, называется *собственным числом*.

Изучим некоторые свойства задачи на собственные значения (1.51). Во-первых, задача (1.51) всегда имеет тривиальное решение $\vec{A}=0$ и это решение мы в дальнейшем рассматривать не будем. Нас будут интересовать лишь нетривиальные решения. Далее, собственный вектор определён лишь с точностью до постоянного множителя. Действительно, пусть $\vec{A}$ – собственный вектор. Возьмём $\vec{B}=\alpha\vec{A}$. Тогда

$$T\cdot\vec{B}=\alpha T\cdot\vec{A}=\alpha\lambda\vec{A}=\lambda\vec{B},$$

т.е. $\vec{B}$ – тоже собственный вектор и ему соответствует то же самое собственное число.

Может оказаться так, что одному собственному числу соответствует несколько независимых собственных векторов. В этом случае говорят, что собственное число *вырождено*. Пусть λ – вырождено, и $\vec{A}$ и $\vec{B}$ – независимые собственные векторы. Докажем, что любая их линейная комбинация тоже будет собственным вектором. Пусть

$$\vec{C}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}.$$

Тогда

$$T\cdot\vec{C}=T\cdot(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B})=\alpha T\cdot\vec{A}+\beta T\cdot\vec{B}=$$
$$=\alpha\lambda\vec{A}+\beta\lambda\vec{B}=\lambda(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B})=\lambda\vec{C},$$

что и требовалось.

Собственные числа произвольного тензора, вообще говоря, комплексны. Покажем, что у симметричного тензора все собственные числа вещественны. Предположим противное. Запишем задачу (1.51) в индексной форме

$$T_{ij}A_j = \lambda A_i. \tag{1.52}$$

Умножим (1.52) на A_i^*, где звёздочка означает комплексное сопряжение,

$$T_{ij}A_j A_i^* = \lambda A_i A_i^*. \tag{1.53}$$

Применим к (1.53) комплексное сопряжение

$$T_{ij}A_j^* A_i = \lambda^* A_i^* A_i. \tag{1.54}$$

Переобозначим теперь слева немые индексы $i \rightleftarrows j$ и воспользуемся симметрией тензора *T*:

$$T_{ji}A_i^* A_j = \lambda^* A_i A_i^*. \tag{1.55}$$

Вычтем, наконец, из (1.53) уравнение (1.55)

$$(\lambda - \lambda^*)A_i A_i^* = 0. \tag{1.56}$$

Число $A_i A_i^*$ равно сумме квадратов модулей компонент вектора $\vec{A}$, поэтому $A_i A_i^* \neq 0$. Сократив в (1.56), получим

$$\lambda - \lambda^* = 0, \tag{1.57}$$

т.е. мнимая часть λ равна нулю, λ вещественно, что и требовалось доказать. Как видно из (1.52), компоненты вектора $\vec{A}$ являются решением системы алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, и следовательно, могут быть выбраны вещественными.

Следующее важное свойство задачи на собственные значения – ортогональность собственных векторов. Пусть λ и $\varkappa$ – различные собственные числа тензора *T*, им соответствуют собственные векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$, т.е.

$$T_{ij}A_j = \lambda A_i, \tag{1.58}$$

$$T_{ij}B_j = \varkappa B_i. \tag{1.59}$$

Умножив (1.58) на B_i, (1.59) на A_i и поступая аналогично (1.53) –(1.56), получим

$$(\lambda - \varkappa)A_i B_i = 0. \tag{1.60}$$

По условию, $\lambda \neq \varkappa$, следовательно,

$$A_i B_i = \vec{A} \cdot \vec{B} = 0, \tag{1.61}$$

т.е. собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны. В случае вырождения независимые собственные векторы, соответствующие данному собственному числу, не обязаны быть ортогональными. В случае двукратного вырождения можно брать любые линейные комбинации двух собственных векторов, т.е. собственные векторы заполняют целую плоскость. В этой плоскости всегда можно выбрать пару ортогональных векторов, даже бесчисленным количеством способов. В случае трёхкратного вырождения возможность взять любую комбинацию собственных векторов означает, что вообще любой вектор является собственным и, значит, можно взять тройку взаимно ортогональных векторов. Таким образом, все собственные векторы симметричного тензора можно считать взаимно ортогональными. Это выполняется автоматически, когда нет вырождения, и мы сами добиваемся ортогональности, когда вырождение есть.

Удобно также, пользуясь произволом в выборе численного множителя, сделать все собственные векторы единичными.

Занумеровав как-либо собственные векторы (номер будем писать вверху, чтобы не путать с тензорными индексами), можно резюмировать всё вышесказанное в короткой формуле

$$\vec{A}^p \vec{A}^q = \delta_{pq}, \tag{1.62}$$

иными словами, собственные векторы образуют *ортонормированную систему*.

Ортогональность собственных векторов даёт возможность выбрать декартову СК, в которой оси направлены вдоль собственных векторов. Такая СК называется *главной* СК данного тензора. Матрица компонент тензора в главной СК принимает особенно простой вид. Но прежде чем его находить, выпишем в главной СК компоненты собственных векторов. Занумеруем оси в том же порядке, что и векторы. Тогда у каждого собственного вектора будет отлична от нуля лишь одна компонента, номер которой совпадает с номером вектора, т.е.

$$A_i^p = \delta_{pi}. \tag{1.63}$$

Подставляя (1.63) в (1.52), получим (без суммирования по p!)

$$T_{ij}A_j^p = \lambda^p A_i^p, \quad T_{ij}\delta_{jp} = \lambda^p \delta_{ip}, \quad T_{ip} = \lambda^p \delta_{ip}. \tag{1.64}$$

Последняя формула решает задачу: в главной СК отличны от нуля лишь диагональные компоненты, причём они равны собственным числам тензора.

Перейдём к способам решения задачи на собственные значения. Как видно из (1.52), компоненты собственного вектора удовлетворяют системе однородных линейных алгебраических уравнений, которую мы перепишем в эквивалентном виде

$$(\mathrm{T}_{ij} - \lambda\delta_{ij})A_j = 0. \tag{1.65}$$

Условием существования нетривиального решения такой системы является равенство нулю её определителя. Следовательно, должно быть

$$\det(\mathrm{T}_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0. \tag{1.66}$$

Условие (1.66) следует рассматривать как уравнение для нахождения собственных чисел λ. Запишем его в развёрнутой форме:

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1.67}$$

Раскрывая этот определитель, получим кубическое уравнение

$$J_0 + J_1\lambda + J_2\lambda^2 - \lambda^3 = 0, \tag{1.68}$$

где коэффициенты J_1, J_2, J_3 выражаются через компоненты тензора T_{ij}. Корни уравнения (1.68) и являются собственными числами тензора.

Теперь можно вернуться к системе (1.65) и, подставляя в неё поочерёдно собственные числа, найти соответствующие собственные векторы.

Пример

Найти матрицу перехода к собственным осям тензора:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1) собственные вектора тензора задают направление собственных осей, поэтому задача состоит в нахождении собственных векторов, для чего необходимо найти собственные числа тензора.

2) в соответствии с формулой (1.67) запишем уравнение для собственных значений:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 9\right] = 0,$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = 5.$$

3) определим собственный вектор, соответствующий λ_1, и обозначим его $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. В соответствии с уравнением (1.65) имеем

$$\begin{cases}(5+1)a_1+0a_2+0a_3=0\\0a_1+(2+1)a_2+3a_3=0\\0a_1+3a_2+(2+1)a_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6a_1=0\\3a_2=-3a_3\\3a_2=-3a_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=0\\a_2=-a_3\end{cases}.$$

4) то есть собственный вектор $\vec{a}=(0,a_2,-a_2)$, зависит от одного параметра (в данном случае a_2). Это не удивительно, потому что собственный вектор задает только направление оси, длина, вообще говоря, может быть произвольна, но поскольку принято работать с ортонормированным базисом, то длину направляющего вектора принято выбирать равной единице:

$$|\vec{a}|^2=1=a_2^2+a_2^2=2a_2^2,$$

$$a_2^2=1/2,\quad a_2=1/\sqrt{2},$$

$$\vec{a}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

5) найдём собственные вектора соответствующие собственным числам λ_2 и λ_3, эти числа одинаковы. Это означает, что собственному числу $\lambda=5$ соответствует не одномерное собственно подпространство (собственная ось, которую задает собственный вектор), а двумерное собственное подпространство – некая плоскость, которая должна задаваться парой ортогональных осей, или, что то же самое, парой ортогональных собственных векторов: $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ и $\vec{b}'=(b_1',b_2',b_3')$. Запишем уравнение (1.65) для $\vec{b}$:

$$\begin{cases}(5-5)b_1+0b_2+0b_3=0\\0b_1+(2-5)b_2+3b_3=0\\0b_1+3b_2+(2-5)b_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0b_1=0\\-3b_2=-3b_3\\3b_2=3b_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_1-\forall\\b_2=b_3\end{cases};$$

6) то есть, собственные векторы $\vec{b}=(b_1,b_2,b_2)$ и $\vec{b}'=(b_1',b_2',b_2')$, зависят от двух параметров, поскольку они совместно задают плоскость. Один параметр задает длину вектора (как и в случае

с вектором $\vec{a}$), второй – их взаимное расположение. Поскольку вектора должны составлять ортонормированный базис, то их длины должны быть равны единице:

$$\left|\vec{b}\right|^2 = 1 = b_1^2 + b_2^2 + b_2^2 = b_1^2 + 2b_2^2 \Rightarrow b_2 = \sqrt{1 - b_1^2} / \sqrt{2},$$

$$\left|\vec{b}'\right|^2 = 1 = b_1'^2 + b_2'^2 + b_2'^2 = b_1'^2 + 2b_2'^2 \Rightarrow b_2' = \sqrt{1 - b_1'^2} / \sqrt{2}.$$

А также они должны быть ортогональны друг другу:

$$\vec{b} \cdot \vec{b}' = 0 = b_1 b_1' + b_2 b_2' + b_2 b_2' = b_1 b_1' + 2 b_2 b_2'.$$

Собирая все три уравнения, получим условие:

$$b_1^2 + b_1'^2 = 1.$$

Последнее условие не позволяет нам определить однозначно все четыре параметра, это связано с вырождением положения пары векторов $\vec{b}$ и $\vec{b}'$ относительно вектора $\vec{a}$ (пара ортогональных векторов может быть повернута под любым углом в плоскости ортогональной $\vec{a}$). Это означает, что значение одного из параметров b_1 или b_1' можно выбрать достаточно произвольным образом. Выберем $b_1 = 1$, тогда:

$$b_1' = 0, b_2 = 0, b_2' = 1/\sqrt{2};$$

7) тройка собственных векторов выглядит следующим образом;

$$\vec{a} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\vec{b} = (1, 0, 0),$$

$$\vec{b}' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

8) собственные вектора выражают собой матрицу **A** перехода к собственным осям тензора **T**:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\quad \mathbf{T}'=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти матрицу перехода к собственным осям тензора $\mathbf{T}$:

$$1)\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix};\ 2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 6 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix};\ 3)\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix};\ 4)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 3\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix};$$

$$5)\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 4 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix};\ 6)\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix};\ 7)\begin{pmatrix}6 & 4 & 4\\ 4 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix};\ 8)\begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ 2 & 5 & -2\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

1.15. Инварианты симметричного тензора второго ранга

Инвариантом тензора называется скалярная функция его компонент, не меняющаяся при переходе в другую СК. Так как симметричный тензор второго ранга всегда можно привести к диагональному виду (в главной СК), в котором не более трёх компонент, отличных от нуля, то у тензора есть лишь три независимых инварианта, все остальные должны через них выражаться. Произвольный инвариант поэтому удобно писать не как функцию шести переменных (независимых компонент симметричного тензора), а как функцию трёх переменных – трёх независимых инвариантов.

Разумеется, возможен различный выбор системы независимых инвариантов. Мы рассмотрим три наиболее употребительных системы.

Первая система инвариантов I_1, I_2, I_3 строится с помощью различных свёрток и упрощений исходного тензора. Простейший инвариант такого рода – шпур тензора

$$I_1 = \mathrm{Sp}T = T_{ii}. \tag{1.69}$$

В качестве второго инварианта выбирают сумму квадратов компонент

$$I_2 = T_{ij}T_{ij} = T_{ij}T_{ji} = T_{ii}^2. \qquad (1.70)$$

Инвариантность величины I_2 очевидна, так как она выражается через двукратную свёртку тензоров второго ранга, которая, как нам известно, приводит к скаляру.

Наконец, в качестве I_3 берётся кубическая комбинация компонент

$$I_3 = T_{ij}T_{jk}T_{ki} = (T \cdot T) : T. \qquad (1.71)$$

Ещё одну систему инвариантов образуют собственные числа, т.к. они не зависят от СК (задача (1.51) формулировалась без указания на конкретную СК), независимы и их нужное количество.

Установим связь между собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и инвариантами первой системы. Для этого вычислим I_1, I_2, I_3 в главной СК:

$$\begin{gathered} I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3. \end{gathered} \qquad (1.72)$$

Наконец, последняя система инвариантов, которую мы рассмотрим, образована коэффициентами полинома (1.68), которые инвариантны, так как инвариантны решения уравнения (1.68).

Связь между системами инвариантов J_0, J_1, J_2 и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ легко может быть найдена с помощью теоремы Виета:

$$\begin{gathered} J_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\ J_1 = -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3), \\ J_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \end{gathered} \qquad (1.73)$$

Отметим, что J_0 есть не что иное, как определитель матрицы компонент тензора.

1.16. Псевдотензоры

Прежде всего введём одно вспомогательное понятие. *Символом Леви–Чивита* e_{ijk} называется трёхиндексная величина, в зависимости от значений индексов принимающая значения 0, 1 и –1 по следующему правилу:

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } i,\ j, k \text{ - чётная перестановка чисел } 1,2,3 \\ -1, & \text{если } i,\ j, k \text{ - нечётная перестановка чисел } 1,2,3 \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.74)$$

т.е.

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, \qquad e_{321} = e_{213} = e_{132} = -1,$$

все остальные комбинации индексов дают 0.

Из определения символа Леви–Чивита вытекают его свойства: во-первых, символ Леви–Чивита антисимметричен по любой паре индексов; во-вторых, e_{ijk} не меняется при циклической перестановке индексов.

Рассмотрим некоторые суммы, содержащие e_{ijk}. Начнём с суммы $e_{ijk}e_{pqk} = T_{ijpq}$. Отличный от нуля результат получается лишь, если $i \neq j$. Тогда в сумме по k присутствует лишь одно слагаемое: $k \neq i,\ k \neq j$. Но это значит, что $p,\ q$ – та же двойка чисел, что и i, j. Поэтому либо $i = p,\ \ j = q$, либо $i = q,\ \ j = p$. В первом случае $T_{ijpq} = 1$, во втором случае $T_{ijpq} = -1$, т.к. e_{pqk} отличается от e_{ijk} перестановкой первых индексов. Таким образом, получаем

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}. \qquad (1.75)$$

Формула (1.75) используется очень часто, поэтому необходимо её запомнить.

Другую сумму получим, отождествляя в (1.75) индексы j и q:

$$e_{ijk}e_{pjk} = \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}. \qquad (1.76)$$

Наконец,

$$e_{ijk}e_{ijk} = 6. \qquad (1.77)$$

С помощью символа Леви–Чивита удобно записывать обычное правило вычисления определителей для матриц третьего порядка. Для произвольной матрицы T_{ij} имеет место легко проверяемая формула

$$e_{ijk}\det(T_{ij}) = e_{pqs}T_{ip}T_{jq}T_{ks}. \qquad (1.78)$$

Теперь проверим, не найдётся ли такой тензор третьего ранга, компоненты которого совпадают во всех СК с e_{ijk}. Пусть G – тензор третьего ранга и в некоторой СК

$$G_{ijk} = e_{ijk}.$$

Вычислим компоненты G в других СК:

$$G'_{ijk} = \alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{sk}e_{pqs}.$$

По формуле (1.78) получаем

$$G'_{ijk} = e_{ijk}\det(\alpha_{pq}) = e_{ijk}\cdot\Delta. \qquad (1.79)$$

Итак, в новой СК уже $G'_{ijk} \neq e_{ijk}$, если $\Delta \neq 1$, т.е. не существует тензора с инвариантными компонентами, равными e_{ijk}. Однако инвариантность можно спасти, изменив закон преобразования, внеся в него множитель Δ. Такие совокупности наборов чисел, для которых закон преобразования компонент отличается от тензорного множителем Δ, называются *псевдотензорами*. Например, псевдоскаляры преобразуются по закону

$$\varphi = \Delta\cdot\varphi',$$

компоненты псевдовектора – по закону

$$A_i = \Delta \cdot \alpha_{ij} A_j', \quad A_i' = \Delta \cdot \alpha_{ji} A_j \tag{1.80}$$

и т.д.

Псевдотензоры отличаются от тензоров лишь поведением при несобственных преобразованиях СК, однако это отличие принципиально, оно резко отделяет тензоры от псевдотензоров. Складывать тензор и псевдотензор так же нелепо, как к скорости прибавлять температуру. Однако мы можем строить прямые произведения и свёртки тензоров и псевдотензоров. Тип результата определяется простым правилом: если псевдотензоры содержатся в данном произведении нечётное число раз, то результат – псевдотензор, в противном случае – тензор. Это является следствием того факта, что всегда $\Delta^2 = 1$.

Возвращаясь к символу Леви–Чивита, мы можем построить псевдотензор – так называемый *псевдотензор Леви–Чивита*, который принято обозначать буквой ε. Действительно, если в некоторой СК $\varepsilon_{ijk} = e_{ijk}$, то

$$\varepsilon_{ijk}' = \Delta \cdot \alpha_{pi} \alpha_{qj} \alpha_{sk} e_{pqs} = \Delta^2 e_{ijk} = e_{ijk}.$$

Пример

Упростить и записать в инвариантном векторном виде:

$$e_{ijk} e_{kpq} a_j b_p c_q .$$

Решение:

1) сделаем перестановку индексов по правилу (1.74), чтобы получить нужный порядок индексов для применения формулы (1.75)

$$e_{ijk} e_{kpq} = e_{ijk} e_{pqk} ;$$

2) применим формулу (1.75)

$$e_{ijk} e_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} ;$$

3) подставим в исходное выражение и перемножим, производя свертки дельта символов согласно формуле (1.7)

$$\left(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}\right)a_j b_p c_q=\delta_{ip}\delta_{jq}a_j b_p c_q-\delta_{iq}\delta_{jp}a_j b_p c_q=$$
$$=a_j b_i c_j-a_j b_j c_i;$$

4) запишем в инвариантном векторном виде, применяя для скалярного произведения запись виде (1.17)

$$a_j b_i c_j-a_j b_j c_i=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Задачи для самостоятельного решения

Упростить и записать в инвариантном векторном виде:

1) $e_{ijk}e_{kpq}e_{isp}e_{jnq}c_s d_n$; 2) $e_{ijk}e_{kpq}e_{isp}e_{jnq}e_{sfg}e_{gnr}a_f c_r$;

3) $e_{pjk}e_{kiq}e_{isq}e_{jnp}c_s d_n$; 4) $e_{rjk}e_{gnq}e_{inp}e_{jsq}e_{sfg}e_{kpi}a_f c_r$;

5) $e_{rjk}e_{gnq}e_{ufh}e_{rml}e_{inp}e_{jsq}e_{sfg}e_{kpi}a_h b_u c_m d_l$.

1.17. Соотношения дуальности

Кроме тензоров, у нас появились ещё и псевдотензоры. Казалось бы, они ничем не хуже тензоров и должны использоваться в физике наравне с последними. Однако тензоры в физике встречаются гораздо чаще. В чём причина? По-видимому, их несколько. Во-первых, наличие радиус-вектора, который является вектором, а не псевдовектором, просто потому, что мы понятие вектора вводили, фактически оглядываясь на радиус-вектор, поэтому в механике, где большую роль играют связанные с радиус-вектором понятия скорости, ускорения, а через уравнения Ньютона – и силы, преобладают истинные тензоры. Исключение составляют лишь момент импульса, момент силы и угловая скорость – всё это псевдовекторы. Если же обратиться к классической электродинамике, то принято считать, что заряд является скаляром, напряжённость электрического поля – вектором, напряжённость магнитного – псевдовектором. Однако во всём, что касается сравнения с экспериментом, ровно ничего не изменится, если считать заряд псевдоскаляром, электрическое поле – псевдовектором, а магнитное – истинным вектором. Так что, в какой-то мере, что считать вектором, а что псевдовектором, – вопрос условный.

Почему же всё-таки псевдовекторы оказались в привилегированном положении по сравнению с другими псевдотензорами? По крайней мере в рамках механики. Ответ на этот вопрос дают *соотношения дуальности*.

Если свернуть дважды псевдотензор Леви–Чивита ε и истинный тензор *T*, то получим псевдовектор

$$\vec{C} = \varepsilon : T. \qquad (1.81)$$

Можно ли разрешить (1.81) относительно *T*? В общем случае нельзя, хотя бы потому, что тензор *T* имеет 9 независимых компонент, а псевдовектор $\vec{C}$ – всего 3. Можно даже понять, где теряется информация при переходе от *T* к $\vec{C}$. Для этого разобьём *T* на симметричную и антисимметричную части:

$$T = T^s + T^a, \quad \vec{C} = \cancel{\varepsilon : T^s} + \varepsilon : T^a.$$

В $\vec{C}$ переходит информация лишь об антисимметричной части *T*. Будем поэтому считать, что *T* антисимметричен. В этом случае (1.81) разрешимо. Запишем (1.81) в индексной записи:

$$C_i = e_{ijk} T_{jk}. \qquad (1.82)$$

Обратите внимание, что двукратная свёртка с ε пишется в индексной форме не так, как обычно, а с нарушением порядка индексов. Такова традиция.

Умножим (1.82) на e_{ipq}. Воспользовавшись формулой (1.76), получим

$$e_{ipq} C_i = T_{pq} - T_{qp} = 2T_{pq},$$

т.е.

$$T_{pq} = \frac{1}{2} e_{ipq} C_i. \qquad (1.83)$$

Запишем (1.83) в инвариантном виде вместе с (1.81):

$$\vec{C} = \varepsilon : T, \qquad T = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \vec{C}. \tag{1.84}$$

Формулы (1.84) и являются *соотношениями дуальности.* Они показывают, что каждому антисимметричному тензору второго ранга соответствует псевдовектор и обратно, по псевдовектору можно восстановить антисимметричный тензор. Иными словами, соотношения дуальности устанавливают взаимно-однозначное соответствие между множествами всех антисимметричных тензоров и всех псевдовекторов. Эти множества совершенно, таким образом, эквивалентны. Каким из них пользоваться – вопрос удобства, поэтому можно переписать, например, всю механику так, чтобы изгнать псевдовекторы, их место займут антисимметричные тензоры.

В заключение параграфа укажем связь компонент T и $\vec{C}$:

$$C_1 = 2T_{23},\ C_2 = 2T_{31},\ C_3 = 2T_{12},$$
$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & C_3/2 & -C_2/2 \\ -C_3/2 & 0 & C_1/2 \\ C_2/2 & -C_1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.85}$$

1.18. Векторное произведение

Прямое произведение двух векторов, как и всякий тензор второго ранга, можно разложить на неприводимые. Антисимметричную часть может оказаться удобным представить через дуальный ей псевдовектор. Псевдовектор, дуальный антисимметричной части прямого произведения, называют *векторным произведением*. Обозначение – $\vec{A}\times\vec{B}$ или $[\vec{A},\vec{B}]$.

В соответствии с определением

$$\vec{A}\times\vec{B} = \varepsilon : (\vec{A}\otimes\vec{B}), \tag{1.86}$$

или в индексной форме

$$(\vec{A}\times\vec{B})_i = e_{ijk}A_jB_k. \tag{1.87}$$

Из этого произведения легко получим все свойства векторного произведения:

антикоммутативность:

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A};$$

ортогональность к сомножителям:

$$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=0;$$

двойное векторное произведение:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}).$$

Докажем, например, последнюю формулу:

$$\left(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right)_i=e_{ijk}A_je_{pqk}B_pC_q=A_jB_iC_j-A_jB_jC_i=$$
$$=B_i\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C})-C_i\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}).$$

Пример

Доказать справедливость формулы:

$$\left[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{d}\times\vec{f})\right]\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})\vec{c}\cdot(\vec{f}\times\vec{d}).$$

Решение:

1) запишем внешнее скалярное произведение в индексной форме (1.17):

$$\left[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{d}\times\vec{f})\right]\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{c})_i\left[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{d}\times\vec{f})\right]_i;$$

2) запишем векторные произведения в первой круглой скобке и в квадратной скобке в индексной форме согласно формуле (1.87) (**важно!** первый индекс символов Леви-Чивита задан, по нему осуществляется свертка в скалярном произведении, остальные символы должны обозначаться **разными** буквами):

$$(\vec{a}\times\vec{c})_i\left[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{d}\times\vec{f})\right]_i=e_{ijk}a_jc_ke_{ipq}(\vec{b}\times\vec{c})_p(\vec{d}\times\vec{f})_q;$$

3) запишем оставшиеся векторные произведения в индексной форме:

$$e_{ijk}a_jc_ke_{ipq}(\vec{b}\times\vec{c})_p(\vec{d}\times\vec{f})_q = e_{ijk}a_jc_ke_{ipq}e_{pnm}e_{qlh}b_nc_md_lf_h;$$

4) сделаем перестановку индексов по правилу (1.74), чтобы получить нужный порядок индексов для применения формулы (1.75)

$$e_{ijk}a_jc_k\left(e_{ipq}e_{pnm}\right)e_{qlh}b_nc_md_lf_h = e_{ijk}a_jc_k\left(e_{pqi}e_{pnm}\right)e_{qlh}b_nc_md_lf_h;$$

5) применим формулу (1.75)

$$e_{ijk}a_jc_k\left(e_{pqi}e_{pnm}\right)e_{qlh}b_nc_md_lf_h =$$
$$= e_{ijk}a_jc_k\left(\delta_{qn}\delta_{im} - \delta_{qm}\delta_{in}\right)e_{qlh}b_nc_md_lf_h;$$

6) перемножим, производя свертки дельта символов согласно формуле (1.7)

$$e_{ijk}a_jc_k\left(\delta_{qn}\delta_{im} - \delta_{qm}\delta_{in}\right)e_{qlh}b_nc_md_lf_h =$$
$$= \left(e_{mjk}e_{nlh} - e_{njk}e_{mlh}\right)a_jc_kb_nc_md_lf;$$

7) раскроем скобки

$$\left(e_{mjk}e_{nlh} - e_{njk}e_{mlh}\right)a_jc_kb_nc_md_lf_h =$$
$$= a_j\left(e_{mjk}c_kc_m\right)d_l\left(e_{nlh}b_nf_h\right) - b_n\left(e_{njk}a_jc_k\right)c_m\left(e_{mlh}d_lf_h\right);$$

8) сделаем перестановку индексов согласно (1.74), чтобы получить запись векторного произведения в форме выражения (1.87).

$$a_j\left(e_{mjk}c_kc_m\right)d_l\left(e_{nlh}b_nf_h\right) - b_n\left(e_{njk}a_jc_k\right)c_m\left(e_{mlh}d_lf_h\right) =$$
$$= a_j\left(e_{jkm}c_kc_m\right)d_l\left(e_{lhn}b_nf_h\right) - b_n\left(e_{njk}a_jc_k\right)c_m\left(e_{mlh}d_lf_h\right);$$

9) запишем в инвариантном векторном виде, применяя для скалярного произведения запись в виде (1.17), а для векторного в виде (1.87)

$$a_j(e_{jkm}c_k c_m)d_l(e_{lhn}b_n f_h) - b_n(e_{njk}a_j c_k)c_m(e_{mlh}d_l f_h) =$$
$$= \vec{a}\cdot\cancel{(\vec{c}\times\vec{c})}\vec{d}\cdot(\vec{b}\times\vec{f}) - \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})\vec{c}\cdot(\vec{d}\times\vec{f}) =$$
$$= \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})\vec{c}\cdot(\vec{f}\times\vec{d}).$$

Здесь учтено, что векторное произведение вектора самого на себя равно нулю и что при перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак.

Задачи для самостоятельного решения

Доказать справедливость формулы:

1) $\left\{\left[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{b}\times\vec{f})\right]\times(\vec{b}\times\vec{c})\right\}\cdot\vec{c} = \left\{c^2b^2 - (\vec{c}\cdot\vec{b})^2\right\}(\vec{b}\times\vec{f})\cdot\vec{c}$;

2) $\left[(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{d}\right]\times(\vec{d}\times\vec{c}) = \vec{d}\left\{c^2(\vec{d}\cdot\vec{b}) - (\vec{d}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{c})\right\}$;

3) $$\left[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right]\times\vec{d}\times\left[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right] = \vec{d}\left\{\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})\right\}^2 +$$
$$+\left\{\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})\right\}\left\{(\vec{d}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{b}) - (\vec{d}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})\right\};$$

4) $\left\{\left[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right]\times\vec{a}\right\}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = c^2a^2(\vec{a}\cdot\vec{b}) - a^2(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{c}\cdot\vec{b})$.

2. ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

2.1. Тензорные поля

До сих пор мы рассматривали тензоры, заданные в одной и той же точке пространства. Теперь мы будем рассматривать тензоры, зависящие от координат. Когда каждой точке пространства из некоторой области поставлен в соответствие тензор (в каждой точке задан тензор), то говорят, что мы имеем *тензорное поле*. В физике имеются многочисленные примеры тензорных полей. Так, тензорные поля нулевого ранга, *скалярные поля*; это, например, поле температуры, давления, скалярного потенциала, плотности массы, заряда, энергии и т.д.

Векторные поля – поле скоростей, газа, напряжённость электрического поля, векторный потенциал магнитного поля и т.д. *Псевдовекторное поле* – напряжённость магнитного поля.

Тензорные поля второго ранга: поле упругих напряжений, поле скоростей деформации, поле диэлектрической проницаемости.

Все те операции, которые мы изучили в тензорной алгебре, можно применять и к тензорным полям, имея в виду совершение каждой операции одновременно во всех точках задания поля. Но появляются и новые операции, связанные со сравнением тензоров, заданных в разных точках; иными словами, нужно научиться дифференцировать и интегрировать тензорные поля.

2.2. Оператор набла

Прежде чем дифференцировать, нужно просто научиться сравнивать тензоры, заданные в разных точках. Поскольку мы умеем сравнивать тензоры в одной точке, естественно сначала совместить тензоры в одной точке с помощью *параллельного переноса*. Что это значит – перенести параллельно самому себе? Чрезвычайно сложная в общем случае, в декартовых СК эта проблема решается просто: перенести с сохранением значений всех компонент. Теперь можно определить производную от тензорного поля по координате, например:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1}.$$

Можно вычислить производную в каждой точке поля, однако эта производная сама тензорного поля не образует. По понятной причине – при переходе к другой СК – производная $\partial / \partial x_1$ преобразуется, причём оказываются втянутыми и другие координаты. Поэтому нужно рассматривать совместно производные по всем координатам. Рассмотрим в каждой СК набор операторов частного дифференцирования по координатам

$$\frac{\partial}{\partial x_i},$$

или в более компактном представлении

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Эти операторы могут действовать на различные числовые функции координат в данной СК. Посмотрим, как преобразуются наборы ∇_i при переходе из одной в другую СК. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{2.1}$$

Производную $\partial x_j \big/ \partial x'_i$ вычислим, используя закон преобразования координат

$$x_j = \alpha_{ij} x'_i,$$

поэтому $\partial x_j \big/ \partial x'_i = \alpha_{ij}$. Подставляя в (2.1), получаем

$$\nabla'_i = \alpha_{ji} \nabla_i \tag{2.2}$$

и аналогично

$$\nabla_i = \alpha_{ij} \nabla'_j. \quad (2.3)$$

Формулы (2.2), (2.3) очень похожи на формулы преобразования компонент вектора. По аналогии с векторами определим *инвариантный оператор дифференцирования* ∇ (читается «набла») как совокупность наборов операторов частного дифференцирования во всех СК. Формулы (2.2), (2.3) показывают, что оператор набла имеет векторную природу, поэтому образование прямых произведений и свёрток оператора ∇ с тензорными полями автоматически будет приводить к тензорным полям.

2.3. Градиент

Изучим действие оператора ∇ на скалярное поле. Пусть дано поле φ. Под действием оператора ∇ оно превращается в векторное поле

$$\nabla \varphi,$$

которое называется полем *градиента* скаляра φ. Компоненты этого поля

$$(\nabla \varphi)_i = \nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Простейшие свойства градиента:

1) *производная скалярного поля по некоторому направлению* даётся формулой

$$\vec{n} \cdot \nabla \varphi = n_i \nabla_i \varphi. \quad (2.4)$$

Для доказательства достаточно рассмотреть СК, у которой одна из осей направлена вдоль $\vec{n}$;

2) градиент ортогонален к *поверхностям уровня*, т.е. к поверхностям, на которых скаляр φ сохраняет постоянное значение; это свойство сразу вытекает из предыдущего, так как производная вдоль любой касательной к поверхности уровня должна обратиться в нуль;

3) градиент направлен в сторону наискорейшего возрастания функции; с точностью до неопределённости знака это свойство вытекает из предыдущего, знак же очевиден.

Вычислим градиенты для общего вида некоторых часто встречающихся полей.

1. Градиент модуля радиус-вектора r вычислим в компонентах:

$$\nabla_i r = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_j x_j} = \frac{2x_j \delta_{ij}}{2r} = \frac{x_i}{r}.$$

Здесь использована очевидная формула

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}.$$

Полученную формулу

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \tag{2.5}$$

полезно помнить наизусть, так как она часто бывает нужна. В векторном виде получаем

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}. \tag{2.6}$$

2. Градиент центрально-симметричного скалярного поля

$$\varphi = \varphi(r).$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\nabla \varphi(r) = \varphi' \nabla r = \varphi' \frac{\vec{r}}{r}. \tag{2.7}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по r и использована формула (2.6).

3. Градиент поля $\varphi(\vec{r}) = \vec{n} \cdot \vec{r}$,

$$\nabla_i \varphi = \nabla_i n_j x_j = n_j \delta_{ij} = n_i,$$
$$\nabla(\vec{n}\cdot\vec{r}) = \vec{n}. \qquad (2.8)$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить градиент следующих полей:

1) $\vec{a}(r)\cdot\vec{r}$; 2) $\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{r^3}$; 3) $\vec{a}(r)\cdot\vec{r}$; 4) $\varphi(r)\psi(r)$;

5) $\dfrac{1}{r}$; 6) $\ln r$; 7) $\vec{n}\cdot\vec{r}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})$; 8) $\vec{n}\cdot\left[\vec{a}(r)\times\vec{r}\right]$;

9) $\vec{n}\cdot\left[\vec{a}(r)\times\vec{b}(r)\right]$; 10) $\left[\vec{r}\times\left(\vec{r}\times\vec{c}(r)\right)\right]\times\vec{r}\cdot\left(\vec{r}\times\vec{c}(r)\right)$.

2.4. Действие оператора набла на векторное поле

Самое общее, что можно сделать из двух векторов с сохранением свойств линейности по каждому сомножителю, это прямое произведение. Поэтому и действие ∇ на векторное поле $\vec{A}$ мы начнём изучать с их прямого произведения, т.е. тензорного поля второго ранга

$$\nabla\otimes\vec{A}$$

с компонентами

$$(\nabla\otimes\vec{A})_{ij} = \nabla_i A_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}.$$

Разложим этот тензор на неприводимые части и рассмотрим их по отдельности.

Девиаторная часть такого тензора применяется редко, поэтому мы ею специально заниматься не будем. Что касается шаровой и антисимметричной частей, то они используются буквально «на каждом шагу» и им посвящён следующий параграф.

2.5. Операции дивергенции и ротора

Шаровая часть тензора полностью определяется его шпуром, поэтому выпишем сразу шпур

$$\mathrm{Sp}(\nabla\otimes\vec{A})=\nabla\cdot\vec{A}=\nabla_i A_i.$$

Это скалярное поле имеет специальное название – *дивергенция* поля $\vec{A}$ и специальное обозначение

$$\mathrm{div}\,\vec{A}.$$

Итак,

$$\mathrm{div}\,\vec{A}=\nabla_i A_i. \tag{2.9}$$

Вычислим дивергенцию некоторых полей.

1. Дивергенция центрально-симметричного векторного поля $\vec{A}=f(r)\vec{r}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\vec{A}&=\nabla_i(f\,x_i)=\nabla_i f\cdot x_i+f\nabla_i x_i=\\&=f'\frac{x_i}{r}x_i+f\delta_{ii}=rf'+3f=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^3 f).\end{aligned} \tag{2.10}$$

2. Частный случай – кулоновское поле:

$$\vec{A}=\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

По формуле (2.10) получаем

$$\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{1}{r^2}\left(r^3\frac{1}{r^3}\right)'=0. \tag{2.11}$$

Кулоновское поле имеет особенность при $r=0$, поэтому полученный результат годится всюду, кроме начала координат. Мы ещё вернёмся к обсуждению этого примера в п. 2.10.

Перейдём к обсуждению антисимметричной части поля $\nabla\otimes\vec{A}$. Как обычно, вместо антисимметричного тензора рассматривают дуальный ему псевдовектор. В нашем случае мы получаем псевдовекторное поле, которое называют *ротором* поля и обозначают $\mathrm{rot}\,\vec{A}$. По формулам дуальности (1.84) имеем

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}=\varepsilon:(\nabla\otimes\vec{A}), \tag{2.12}$$

или, в индексной записи,

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_i = e_{ijk}\nabla_j A_k. \qquad (2.13)$$

Вычислим ротор некоторых полей.

1. Ротор центрально-симметричного векторного поля

$$\mathrm{rot}_i\,(f(r)\vec{r}) = e_{ijk}\nabla_j(f\,x_k) = \mathrm{e}_{ijk}\,x_k\nabla_j f + e_{ijk}\,f\nabla_j x_k =$$

$$= e_{ijk}x_k x_j\,\frac{f'}{r} + e_{ijk}\,f\,\delta_{jk} = 0.$$

Получился нуль, так как в обоих слагаемых последнего выражения имеется двукратная свёртка антисимметричного символа Леви–Чивита с симметричной комбинацией $x_k x_j$ в первом слагаемом и δ_{jk} во втором.

2. Ротор поля скорости $\vec{v}$, соответствующего твердотельному вращению с угловой скоростью $\vec{\omega}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r},$$

$$\mathrm{rot}_i\,\vec{v} = e_{ijk}\nabla_j e_{pqk}\omega_p x_q = 2\delta_{ip}\omega_p = 2\omega_i,$$

$$\mathrm{rot}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 2\vec{\omega}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить дивергенцию и ротор следующих полей:

1) $\ln r\cdot\vec{r}$; 2) $\vec{r}\times\left(\vec{n}\times\vec{r}\right)$; 3) $\vec{a}(r)\times\vec{r}$; 4) $\varphi(r)\vec{a}(r)$;

5) $\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})\vec{r}$; 6) $\vec{r}\times\vec{n}$; 7) $\vec{a}(r)\exp(\vec{k}\cdot\vec{r})$;

8) $\vec{r}\times\left[\vec{a}(r)\times\vec{r}\right]$; 9) $\vec{r}\left[\vec{a}(r)\cdot\vec{r}\right]$; 10) $\left[\vec{r}\times\vec{c}(r)\right]\times\vec{a}(r)$;

11) $\left[(\vec{a}(r)\times\vec{k})\times\vec{r}\right]\times(\vec{r}\times\vec{k})$;

12) $\left[\vec{r}\times(\vec{a}(r)\times\vec{r})\right]\times\vec{k}\times\left[\vec{r}\times(\vec{a}(r)\times\vec{r})\right]$.

2.6. Дифференциальные операции второго порядка

К тензорным полям, получившимся в результате действия оператора набла, можно снова применить этот оператор. рассмотрим получающиеся здесь варианты.

Пусть исходное поле φ скалярное. Все, что можно из него приготовить однократным применением оператора набла – это векторное поле градиента. Рассмотрим дивергенцию получившегося поля

$$\operatorname{div}\nabla\varphi = \nabla_i \nabla_i \varphi. \tag{2.14}$$

В результате получается новое скалярное поле, для которого есть специальное обозначение

$$\operatorname{div}\nabla\varphi = \Delta\varphi. \tag{2.15}$$

Оператор Δ называют *лапласианом* или *оператором Лапласа*.

Вычислим лапласиан центрально-симметричного поля $\varphi = \varphi(r)$:

$$\begin{gathered}\Delta\varphi = \operatorname{div}\nabla\varphi = \operatorname{div}\left(\varphi' \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^3 \frac{\varphi'}{r}\right) = \\ = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right).\end{gathered} \tag{2.16}$$

Например,

$$\Delta r = \frac{2}{r}, \quad \Delta r^2 = 6, \quad \Delta \frac{1}{r} = 0.$$

Вычислим лапласиан осесимметричного поля, т.е. поля, не меняющегося при поворотах вокруг некоторой оси. Направим вдоль оси симметрии единичный вектор $\vec{n}$ и выберем начало координат в какой-то точке этой оси. В качестве переменных, от которых зависит поле φ, обычно выбирают r и угол ϑ между $\vec{r}$ и $\vec{n}$. Тогда $\varphi = \varphi(r, \vartheta)$,

$$\Delta\varphi=\nabla_i\nabla_i\varphi=\nabla_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\nabla_i r+\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\nabla_i\vartheta\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\nabla_i r\nabla_i r+$$
$$+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\vartheta}\nabla_i\vartheta\nabla_i r+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}\nabla_i\vartheta\nabla_i\vartheta+\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta. \tag{2.17}$$

Мы уже вычислили $\nabla_i r : \nabla_i r = x_i / r$. Для вычисления $\nabla_i\vartheta$ заметим, что по определению угла между векторами

$$\cos\vartheta=\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{r}=\frac{n_j x_j}{r},$$

откуда

$$-\sin\vartheta\,\nabla_i\vartheta=\nabla_i\frac{n_j x_j}{r}=\frac{n_j\delta_{ij}}{r}-\frac{n_j x_j x_i}{r^3}=\frac{n_i}{r}-\frac{x_i\cos\vartheta}{r^2},$$

или

$$\nabla_i\vartheta=\operatorname{ctg}\vartheta\frac{x_i}{r^2}-\frac{n_i}{r\sin\vartheta}. \tag{2.18}$$

Заметим, что $x_i\nabla_i\vartheta=\operatorname{ctg}\vartheta-\operatorname{ctg}\vartheta=0$ и $\nabla_i\vartheta\,\nabla_i\vartheta=1/r^2$. Подставляя (2.18) в (2.17), получим

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}, \tag{2.19}$$

или в более удобной форме

$$\Delta\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right). \tag{2.20}$$

Иногда более удобны не переменные r,ϑ, а r и проекция $\vec{r}$ на $\vec{n}$, $\vec{r}\cdot\vec{n}=z$. Вычислим последовательно:

$$\nabla_i z=\nabla_i(n_j x_j)=n_i,$$
$$\nabla_i\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\nabla_i r+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\nabla_i z=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{x_i}{r}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}n_i, \tag{2.21}$$
$$\Delta\varphi=\nabla_i\nabla_i\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+2\frac{z}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Рассмотрим теперь ротор градиента

$$(\mathrm{rot}\nabla\varphi)_i = e_{ijk}\nabla_j\nabla_k\varphi = 0,$$

так как смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования и, следовательно, $\nabla_j\nabla_k\varphi = \nabla_k\nabla_j\varphi$. Итак, ротор градиента всегда равен нулю,

$$\mathrm{rot}\nabla\varphi = 0. \qquad (2.22)$$

Возьмём теперь в качестве исходного векторное поле $\vec{A}$. Если применить к нему дивергенцию, то из получившегося скалярного поля, используя ∇, получаем опять векторное поле $\nabla\,\mathrm{div}\,\vec{A}$.

Если взять ротор поля $\vec{A}$, то к получившемуся псевдовекторному полю можно применять как rot, так и div. Начнём с дивергенции.

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla_i(\mathrm{rot}\,\vec{A})_i = \nabla_i e_{ijk}\nabla_j A_k = e_{ijk}\nabla_i\nabla_j A_k = 0,$$

снова из-за симметрии $\nabla_i\nabla_j = \nabla_j\nabla_i$. Таким образом, всегда

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0. \qquad (2.23)$$

Рассмотрим теперь ротор ротора

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A})_i = e_{ijk}\nabla_j(\mathrm{rot}\,\vec{A})_k = e_{ijk}\nabla_j e_{pqk}\nabla_p A_q =$$
$$= \nabla_j\nabla_i A_j - \nabla_j\nabla_j A_i,$$

или, в безындексной форме,

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}. \qquad (2.24)$$

Как и должно быть, двойной ротор, т.е. операция, дважды содержащая псевдотензор Леви–Чивита, выразилась через операции, никаких псевдотензоров не содержащие.

Резюмируя, составим небольшую таблицу операций второго порядка:

Дифференциальные операции второго порядка
над скалярными и векторными полями

Поле	Первый порядок	Второй порядок
φ	$\nabla\varphi$	$\operatorname{div}\nabla\varphi = \Delta\varphi$
		$\operatorname{rot}\nabla\varphi = 0$
$\vec{A}$	$\operatorname{div}\vec{A}$	$\nabla\operatorname{div}\vec{A}$
	$\operatorname{rot}\vec{A}$	$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$
		$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить результат действия оператора Лапласа на следующие поля:

1) $1/r^3$; 2) $\vec{n}\cdot\vec{r}$; 3) $\vec{a}(r)\cdot\vec{r}$;

4) $\varphi(r)\vec{a}(r)$; 5) $(\vec{k}\cdot\vec{r})\vec{r}$; 6) $\vec{r}\times\vec{n}$.

Доказать справедливость следующих формул:

1) $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi$;

2) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

3) $\operatorname{rot}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{b}\cdot\nabla\vec{a} - \vec{a}\cdot\nabla\vec{b} + \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} + \vec{b}\operatorname{div}\vec{a}$;

4) $\operatorname{grad}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \vec{b}\cdot\nabla\vec{a} + \vec{a}\cdot\nabla\vec{b} + \vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{b} + \vec{b}\times\operatorname{rot}\vec{a}$;

5) $\operatorname{rot}\left(\operatorname{div}\left(\vec{a}\right)\vec{a}\right) = \operatorname{div}\vec{a}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\times\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$;

6) $\Delta\left(\varphi\vec{a}\right) = \vec{a}\Delta\varphi + \varphi\Delta\vec{a} + 2\operatorname{grad}\varphi\cdot\nabla\vec{a}$;

7) $\operatorname{rot}^2\vec{a} = \dfrac{1}{2}\Delta a^2 - \vec{a}\cdot\Delta\vec{a} - div\left(\vec{a}\cdot\nabla\vec{a}\right) + \vec{a}\cdot grad\operatorname{div}\vec{a}$;

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}(\vec{a})\times\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}) = \Delta\left(\vec{a}\operatorname{div}\vec{a}\right) - \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})\cdot\nabla\vec{a} - \\ 8)\ &-\operatorname{div}\vec{a}\Delta\vec{a} - \vec{a}\operatorname{div}\left(g\,\mathrm{rad}(\operatorname{div}\vec{a})\right) - \\ &-\operatorname{grad}\left(\vec{a}\cdot\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})\right) + \vec{a}\cdot\nabla\left(\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})\right). \end{aligned}$$

2.7. Потенциальные поля. Скалярный потенциал

Поля, ротор которых равен нулю, называются *безвихревыми*. В предыдущем параграфе было показано, что градиент любого скалярного поля является безвихревым. Возникает вопрос: не являются ли все безвихревые поля градиентами каких-либо скалярных полей? Как мы увидим, это действительно так.

Пусть $\vec{A}$ – безвихревое поле, т.е.

$$\operatorname{rot}\vec{A} = 0,$$

или, в индексной форме,

$$e_{ijk}\nabla_j A_k = 0. \tag{2.25}$$

В формуле (2.25) придадим индексам конкретные значения

$$\nabla_2 A_3 - \nabla_3 A_2 = 0, \tag{2.26}$$

$$\nabla_3 A_1 - \nabla_1 A_3 = 0, \tag{2.27}$$

$$\nabla_1 A_2 - \nabla_2 A_1 = 0. \tag{2.28}$$

Фактически здесь выписаны компоненты антисимметричной части тензора $\nabla \otimes \vec{A}$. Соотношения (2.26)–(2.28) представляют собой систему уравнений в частных производных первого порядка для трёх функций A_1, A_2 и A_3. Наша цель – найти общее решение этой системы уравнений.

Проинтегрируем по x_1 уравнение (2.28)

$$A_2 = \int \nabla_2 A_1 dx_1 = \nabla_2 \int A_1 dx_1. \tag{2.29}$$

Введём обозначение

$$\chi = \int A_1 dx_1. \tag{2.30}$$

Тогда (2.29) запишется в виде

$$A_2 = \nabla_2 \chi, \tag{2.31}$$

а из (2.30) следует, что

$$A_1 = \nabla_1 \chi, \tag{2.32}$$

т.е. общее решение уравнения (2.28) даётся формулами (2.31), (2.32), содержащими произвольную функцию χ. Подставляя A_1 и A_2 в (2.27), получим

$$A_3 = \int \nabla_3 A_1 dx_1 = \nabla_3 \int A_1 dx_1 = \nabla_3 \chi. \tag{2.33}$$

Наконец, (2.26) даёт

$$\nabla_2 \nabla_3 \chi = \nabla_3 \nabla_2 \chi, \tag{2.34}$$

но это тождество. Таким образом, общее решение уравнения

$$\operatorname{rot} \vec{A} = 0$$

имеет вид

$$\vec{A} = \nabla \chi, \tag{2.35}$$

где χ – произвольная функция; иными словами, для любого безвихревого поля $\vec{A}$ существует такое скалярное поле χ, что выполняется (2.35). Это поле χ называют *скалярным потенциалом* поля $\vec{A}$, поэтому безвихревое поле называют ещё *потенциальным*.

Для заданного безвихревого поля $\vec{A}$ потенциал определён неоднозначно. Возьмём два потенциала χ_I и χ_{II} одного и того же поля $\vec{A}$, т.е.

$$\vec{A} = \nabla \chi_I, \qquad \vec{A} = \nabla \chi_{II}.$$

Вычитая из первого выражения второе, получим

$$\nabla(\chi_I - \chi_{II}) = 0,$$

но это означает, что

$$\chi_I - \chi_{II} = \text{const}.$$

Таким образом, скалярный потенциал определён с точностью до константы.

2.8. Соленоидальные поля. Векторный потенциал

Векторные поля, дивергенция которых равна нулю, называют *соленоидальными*. Найдём общий вид таких полей, т.е. найдём общее решение уравнения

$$\operatorname{div}\vec{A}=0. \tag{2.36}$$

Распишем подробнее уравнение (2.36):

$$\nabla_1 A_1+\nabla_2 A_2+\nabla_3 A_3=0. \tag{2.37}$$

Введём функции φ и ψ соотношениями

$$A_2=-\nabla_1\varphi,\quad A_3=\nabla_1\psi. \tag{2.38}$$

Такие φ и ψ существуют, если только существуют интегралы по x_1 от A_2 и A_3. Заметим, что для заданных A_2, A_3 соотношение (2.38) определяет φ и ψ с точностью до произвольных функций от x_2 и x_3. Подставляя (2.38) в (2.37), получим

$$\nabla_1(\mathrm{A}_1-\nabla_2\varphi+\nabla_3\psi)=0,$$

т.е.

$$A_1-\nabla_2\varphi+\nabla_3\psi=\mathrm{const}(x_1).$$

Пользуясь произволом в φ и ψ, можно изгнать константу из правой части. Следовательно,

$$A_1=\nabla_2\varphi-\nabla_3\psi. \tag{2.39}$$

Формулы (2.38), (2.39) дают общее решение уравнения (2.36). Удобно придать им более симметричную форму. Для этого запишем φ и ψ в виде $\varphi=\overline{\varphi}+u$, $\psi=\overline{\psi}+v$,

$$\nabla_2 u+\nabla_3 v=0,$$

откуда

$$u = \nabla_3 \chi, \quad v = \nabla_2 \chi.$$

Тогда

$$A_2 = -\nabla_1 \bar{\varphi} - \nabla_3 \nabla_1 \chi,$$
$$A_3 = \nabla_1 \bar{\psi} - \nabla_2 \nabla_1 \chi.$$

Наконец, обозначим

$$B_1 = -\bar{\varphi}, \; B_2 = \bar{\psi}, \; B_3 = -\nabla_1 \chi.$$

Тогда

$$A_1 = \nabla_3 B_2 - \nabla_2 B_3,$$
$$A_2 = \nabla_3 B_1 - \nabla_1 B_3,$$
$$A_3 = \nabla_1 B_2 - \nabla_2 B_1,$$

или, короче,

$$\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}.$$

Таким образом, каждое соленоидальное поле $\vec{A}$ может быть представлено в виде ротора некоторого другого поля, которое в этом случае называют *векторным потенциалом* поля $\vec{A}$.

Рассмотрим вопрос о степени произвола при выборе векторного потенциала. Пусть $\vec{B}_I$ и $\vec{B}_{II}$ – два разных векторных потенциала одного и того же поля $\vec{A}$. Тогда их разность удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}(\vec{B}_I - \vec{B}_{II}) = 0.$$

Но это означает, согласно результатам предыдущего параграфа, что

$$\vec{B}_I - \vec{B}_{II} = \nabla \varphi, \tag{2.40}$$

т.е. векторный потенциал определён с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Это даёт возможность накладывать на векторный потенциал те или иные дополнительные условия, удобные при рассмотрении конкретных задач. Назначение дополнительных условий для векторного потенциала называют его *калибровкой*. Одной из наиболее употребительных является следующая калибровка:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0. \tag{2.41}$$

Посмотрим, всегда ли такая калибровка возможна. Пусть потенциал $\vec{B}_{II}$ не удовлетворяет (2.41). Постараемся подобрать другой потенциал $\vec{B}_{I}$, это условию удовлетворяющий. В соответствии с (2.40), $\vec{B}_{I} = \vec{B}_{II} + \nabla\varphi$, поэтому

$$\operatorname{div}\vec{B}_{I} = \operatorname{div}\vec{B}_{II} + \Delta\varphi = 0$$

и задача сводится к уравнению для φ

$$\Delta\varphi = -\operatorname{div}\vec{B}_{II}.$$

Уравнения такого рода, называемые уравнениями Пуассона, изучаются в курсе методов математической физики. Известно, что уравнение Пуассона (при обычно выполняемых в физике ограничениях на правую часть) всегда имеет решение, т.е. калибровка (2.41) всегда возможна.

Задачи для самостоятельного решения

Доказать или опровергнуть утверждение что следующие поля являются соленоидальными:

1) $\vec{r}\times\vec{n}$; 2) $\operatorname{grad}\left(\vec{n}\cdot\vec{r}\right)$; 3) $grad\left(\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}\right)$;

4) $\exp\left\{r^2/3\right\}\vec{r}$; 5) $(\vec{k}\times\vec{r})\Delta r^4$; 6) $\vec{r}\ln r$;

7) $\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\cos\left(\vec{n}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}$; 8). $\operatorname{grad}\left[\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\dfrac{1}{r^3}\right]$.

2.9. Криволинейные системы координат

В общем случае при переходе из одной системы координат (СК) в другую координаты второй (q_i) являются некоторыми функциями координат первой (x_i) и наоборот, т.е.

$$\begin{cases} q_1 = q_1\left(x_1, x_2, x_3\right), \\ q_2 = q_2\left(x_1, x_2, x_3\right), \\ q_3 = q_3\left(x_1, x_2, x_3\right), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1\left(q_1, q_2, q_3\right), \\ x_2 = x_2\left(q_1, q_2, q_3\right), \\ x_3 = x_3\left(x_1, q_2, q_3\right). \end{cases} \tag{2.42}$$

Найдем малое расстояние ds между двумя бесконечно близкими точками (рис. 3), т.е.

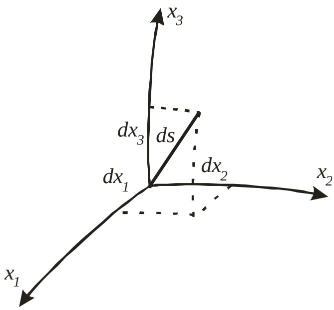

Рис. 3. Обобщённая криволинейная система координат.

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}. \tag{2.43}$$

Найдем малые приращения координат dx_i:

$$dx_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j, \tag{2.44}$$

или согласно *соглашению Эйнштейна* (см. с. 5) в компактной индексной форме:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j = \alpha_{ij} dq_j. \tag{2.45}$$

Подставляя (2.45) в (2.43) и записывая в индексной форме, получим

$$ds^2 = dx_k dx_k = \alpha_{kj} dq_j \alpha_{ki} dq_i. \tag{2.46}$$

Видно, что выражения (2.46) с точностью до обозначения дифференциалов совпадают с (1.12).

Как было замечено выше, переход из одной декартовой (СК) в другую может быть осуществлен с помощью матрицы перехода (см. (1.3)). Если обе СК декартовы, то преобразование координат (2.42) линейно и формула (2.45) полностью совпадает с (1.3). Таким образом, общий вид *матрицы Якоби*:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial q_3} & \dfrac{\partial x_3}{\partial q_3} & \dfrac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Введем понятие базисного вектора: *базисный вектор* – это производная радиус вектора по соответствующей координате:

$$\vec{\varepsilon}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}. \quad (2.48)$$

Система из трех *базисных векторов* составляет *базис* СК; если СК *ортогональна*, то базисные вектора взаимно ортогональны:

$$\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j = 0, \quad i \neq j,$$

или, что то же самое:

$$\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j = H_{(i)}^2 \delta_{ij}, \quad (2.49)$$

где $H_{(i)}, i = 1,2,3$ – *коэффициенты Ламэ.* В правой части уравнения (2.49) нет суммирования по индексу i. *Коэффициенты Ламэ* показывают изменение масштаба вдоль соответствующей координаты при преобразовании. Через них может быть записан *метрический тензор* g_{ij}:

$$g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j, \qquad g = \begin{pmatrix} H_{(1)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_{(2)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_{(3)}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Коэффициенты Ламэ полностью определяют все свойства ортогональной системы координат. Так, элементы площади координатных поверхностей (поверхности ортогональной к i-му базисному вектору) выражаются следующим образом:

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3,\ d\sigma_2 = H_1 H_3 dq_1 dq_3,\ d\sigma_1 = H_1 H_2 dq_1 dq_2, \qquad (2.51)$$

а элемент объема пространства

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \qquad (2.52)$$

2.10. Связь ортогональных криволинейных координат с декартовыми

Пусть одна из рассматриваемых СК декартова (для определенности координаты декартовой СК обозначим x_i), тогда радиус вектор $\vec{r} = \left(x_1, x_2, x_3\right)$, а *базисные вектора* криволинейной системы координат (ее координаты обозначим q_i) можно записать следующим образом:

$$\vec{\varepsilon}_i = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}, \frac{\partial x_2}{\partial q_i}, \frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right). \qquad (2.53)$$

Если криволинейная система координат ортогональна, то, согласно свойству (2.49), имеем

$$(\varepsilon_i)_k \cdot (\varepsilon_j)_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} = \alpha_{ki}\alpha_{kj} = H_{(i)}^2 \delta_{ij}, \qquad (2.54)$$

здесь использована общая форма записи матрицы Якоби (2.47).

Возвращаясь к формуле (2.46), получим

$$ds^2 = dx_k dx_k = H_{(i)}^2 \delta_{ij} dq_j dq_i = H_{(i)}^2 dq_i dq_i. \qquad (2.55)$$

Формула (2.55) дает простой способ поиска *коэффициентов Ламэ* для различных криволинейных ортогональных систем.

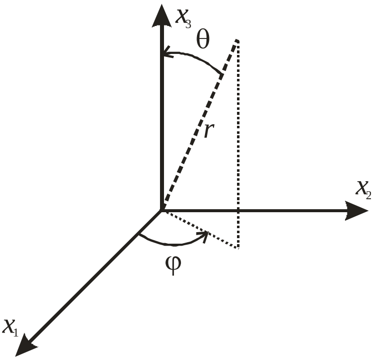

Рис. 4. Сферическая система координат

Рассмотрим в качестве примера сферическую систему координат. (r,θ,φ). Известно, что декартовы координаты выражаются через сферические следующим образом (рис. 4):

$$x_1 = r\cos\varphi\sin\theta,$$
$$x_2 = r\sin\varphi\sin\theta,$$
$$x_3 = r\cos\theta.$$

Найдём дифференциалы:

$$dx_1 = \cos\varphi\sin\theta dr + r\cos\varphi\cos\theta d\theta - r\sin\varphi\sin\theta d\varphi,$$
$$dx_2 = \sin\varphi\sin\theta dr + r\sin\varphi\cos\theta d\theta + r\cos\varphi\sin\theta d\varphi,$$
$$dx_3 = \cos\theta dr + r\cos\theta d\theta.$$

Найдем квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками (2.55):

$$ds^2 = dx_k dx_k = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = H_{(1)}^2 dr^2 + H_{(2)}^2 d\theta^2 + H_{(3)}^2 d\varphi^2,$$

или, подставляя выражения для дифференциалов,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

Сравнивая две формулы, получим

$$H_{(1)} = 1, H_{(2)} = r, H_{(3)} = r\sin\theta\,. \qquad (2.56)$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти коэффициенты Ламэ для следующих СК:

1) цилиндрическая (r,φ,z):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z;$$

2) тороидальная (α, β, φ):

$$x = \frac{\operatorname{sh}\alpha \cos\varphi}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad y = \frac{\operatorname{sh}\alpha \sin\varphi}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad z = \frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta};$$

3) бисферическая (α, τ, φ):

$$x = \frac{\sin\alpha \cos\varphi}{\operatorname{ch}\tau - \cos\alpha}, \quad y = \frac{\sin\alpha \sin\varphi}{\operatorname{ch}\tau - \cos\alpha}, \quad z = \frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\alpha};$$

4) параболические координаты (α, τ, φ):

$$x = \alpha\tau\cos\varphi, \quad y = \alpha\tau\sin\varphi, \quad z = 0.5(\tau^2 - \alpha^2).$$

2.11. Оператор градиента в криволинейных координатах

Запишем градиент некоторого скалярного поля φ в индексной форме:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}. \tag{2.57}$$

Как видно, для получения записи градиента в криволинейных координатах необходимо найти производную $\partial q_j / \partial x_i$. Для этого найдем дифференциал dq_j, аналогично (2.45):

$$dq_j = \frac{\partial q_j}{\partial x_i} dx_i, \tag{2.58}$$

или

$$dq_j dq_j = \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial q_j}{\partial x_k} dx_i dx_k. \tag{2.59}$$

Найдём $dx_i dx_k$ с помощью формулы (2.55):

$$dx_k dx_k = dx_i dx_k \delta_{ik} = H_{(j)}^2 dq_j dq_j. \tag{2.60}$$

Сравнивая формулы (2.59) и (2.60), получим:

$$\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial q_j}{\partial x_k} = \frac{1}{H_{(j)}^2}\delta_{ik}. \tag{2.61}$$

Очевидно, что длина вектора не должна зависеть от СК. Найдем квадрат длины градиента φ:

$$\begin{gathered}\mathrm{grad}^2\varphi = \nabla_i\varphi\nabla_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial x_i} = \\ \frac{1}{H_{(j)}^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\delta_{jk} = \frac{1}{H_{(j)}^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}.\end{gathered} \tag{2.62}$$

Исходя из формулы (2.62), градиент в криволинейных координатах может быть записан следующим образом:

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{1}{H_{(j)}}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}. \tag{2.63}$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти градиенты следующих функций:

1) $\psi = z\sin\varphi\dfrac{e^r}{r}$,

где (r,φ,z) – координаты цилиндрической СК;

2) $\psi = (z^3 - z)\cos\varphi + r^2\sin\varphi$,

где (r,φ,z) – координаты цилиндрической СК;

3) $\psi = \left(1+\cos\varphi\right)\exp r + \dfrac{1}{r}\cos\theta$,

где (r,θ,φ) – координаты сферической СК;

4) $\psi = \left(1+\cos\varphi\right)\sin kr + r\cos\theta + \zeta r\sin\theta$,

где (r,θ,φ) – координаты сферической СК.

2.12. Интегрирование тензорных полей

Перейдём к рассмотрению вопросов, связанных с интегрированием тензорных полей. Мы не будем пытаться дать строгое определение интегралов, а ограничимся перечислением основных типов встречающихся в тензорном анализе интегралов.

Интегралы по контуру. Пусть в пространстве дана некоторая линия, соединяющая две заданные точки (они могут и совпадать), или, как мы будем говорить, задан контур Γ (замкнутый или незамкнутый). На интуитивном уровне под интегралом от тензорного поля по контуру Γ

$$\int \ldots d\Gamma$$

следует понимать предел суммы, получающейся при разбиении контура на кусочки $\Delta\Gamma$

$$\sum \ldots \Delta\Gamma$$

при $\Delta\Gamma \to 0$, где $\Delta\Gamma$ – длина отдельного кусочка. Часто интегрируемое тензорное поле содержит в качестве сомножителя единичный вектор касательной к контуру $\vec{\tau}$. Комбинацию $\vec{\tau} d\Gamma$ называют *ориентированным элементов контура* и обозначают

$$\vec{\tau} d\Gamma = d\vec{\Gamma},$$

или, в индексной форме,

$$\tau_i d\Gamma = d\Gamma_i.$$

Если контур Γ замкнутый, это обозначают кружком у знака интеграла $\oint \ldots d\Gamma$. Наиболее часто встречается интеграл по замкнутому контуру от скалярного произведения векторного поля на вектор касательной

$$\oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{\Gamma} = \oint_\Gamma A_i \cdot d\Gamma_i.$$

Такой интеграл называют *циркуляцией* поля $\vec{A}$ по контуру Γ. Встречаются и другие виды интегралов, например,

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \times d\vec{\Gamma}, \quad \oint_{\Gamma} \vec{A} \otimes d\vec{\Gamma}, \quad \oint_{\Gamma} \vec{A} d\Gamma, \quad \oint_{\Gamma} T_{ij} d\Gamma_j$$

и т.д.

Интегралы по поверхности. Элементом интегрирования являются «кусочки» поверхности S площадью dS. Часто встречающаяся комбинация $\vec{n}dS$, где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности, называется *ориентированным элементом поверхности* и обозначается $d\vec{S}$, а в индексной записи $n_i dS = dS_i$. При интегрировании должно быть указано, какая нормаль, по какую сторону поверхности находящаяся, имеется в виду. При интегрировании по замкнутой поверхности

$$\oint_{S} \ldots d\vec{S}$$

считается, если не оговорено противное, что берётся внешняя нормаль. Наиболее часто встречаются интегралы вида

$$\int_{S} T \cdot d\vec{S},$$

где T – обычно тензорное поле первого или второго ранга. Такие интегралы называются *потоком* поля T через поверхность S.

2.13. Теорема Гаусса

Теорема Гаусса связывает интегралы по замкнутой поверхности и ограниченному этой поверхностью объёму. Доказательство теоремы Гаусса для частного случая векторных полей можно найти в учебниках по математическому анализу, доказательство же для произвольных тензорных полей производится совершенно аналогично. Поэтому мы ограничимся общей формулировкой, обсуждением частных случаев и примерами.

Итак, пусть имеется замкнутая поверхность S и ограниченный ею объём V. Пусть задано тензорное поле T произвольного ранга, не имеющее особых точек внутри V и на S. Тогда (пишем в индексной форме)

$$\oint_S T\ldots dS_j = \int_V \nabla_j T\ldots dV. \tag{2.64}$$

Многоточие здесь заменяет индексы компонент тензорного поля T, которые могут быть произвольными.

Наиболее распространённый частный случай – поле T векторное, причём в левой части теоремы Гаусса стоит скалярное произведение поля на $d\vec{S}$

$$\begin{gathered}\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint_S A_j dS_j = \int_V \nabla_j A_j dV = \int_V \operatorname{div}\vec{A}dV,\\ \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{A}dV,\end{gathered} \tag{2.65}$$

т.е. поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S равен интегралу по объёму, ограниченному этой поверхностью, от дивергенции поля $\vec{A}$. Именно этот частный случай теоремы Гаусса доказывается в большинстве учебников по математическому анализу.

Некоторые примеры:

$$\oint_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = 3\int_V dV = 3V,$$

$$\oint_S \vec{r}\otimes d\vec{S} = \oint_S x_i dS_j = \int_V \nabla_j x_i dV = \delta_{ij}V,$$

т.е. $\oint_S \vec{r}\otimes d\vec{S} = Vg$ – шаровой тензор.

Особенно важное значение имеет теорема Гаусса для кулоновского поля:

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla\frac{1}{r}.$$

Если начало координат лежит вне объёма V, то особых точек внутри V нет и теорема Гаусса применима. Мы уже вычисляли дивергенцию кулоновского поля

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = 0,$$

поэтому

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3}\,d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}\,dV = 0.$$

Если же начало координат попадает внутрь *V*, то теорема Гаусса не может быть применена. Однако ей всё же можно придать смысл. Для этого сначала найдём поток кулоновского поля через сферу радиуса *a*, центр которой совпадает с началом координат

$$\oint_{S_a} \frac{\vec{r}}{r^3}\,d\vec{S} = \oint_{S_a} \frac{dS}{r^2} = \frac{1}{a^2}\oint_{S_a} dS = \frac{1}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi.$$

Здесь использовано то, что нормаль к поверхности сферы и радиус-вектор параллельны, т.е.

$$\vec{r}\cdot\vec{n} = r\,|\vec{n}| = r,$$

а *r* на поверхности сферы сохраняет постоянное значение *a*.

Перейдём теперь к случаю произвольной поверхности *S*, причём начало координат внутри *S*. Окружим начало координат сферой S_ε радиуса ε, достаточно малого, чтобы S_ε целиком была внутри *S*. К области $V - V_\varepsilon$, ограниченной поверхностью $S + S_\varepsilon$, теорема Гаусса применима:

$$\oint_{S+S_\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r^3}\,d\vec{S} = \int_{V-V_\varepsilon} \operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}\,dV = 0.$$

С другой стороны, $\oint_{S+S_\varepsilon} \ldots = \oint_S \ldots - \oint_{S_\varepsilon} \ldots$, где учтено, что в $\oint_{S+S_\varepsilon} \ldots$ нормаль берётся наружная по отношению к объёму $V - V_\varepsilon$, т.е. на S_ε нормаль направлена внутрь сферы, когда же пишем $\oint_{S_\varepsilon} \ldots$, то имеем в виду нормаль, направленную из сферы наружу. Поэтому получаем

$$\oint_S \ldots = \oint_{S_\varepsilon} \ldots = 4\pi.$$

Итак, всегда, когда начало координат внутри поверхности S

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = 4\pi.$$

Поскольку $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$ всюду, кроме начала координат, этот результат формально можно получить из теоремы Гаусса, если положить

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\vec{r}),$$

где $\delta(\vec{r})$ – *дельта-функция* Дирака.

Полученный результат находит многочисленные применения в электродинамике, так как кулоновское поле описывает *электрическое поле точечного заряда*, и в теории *гармонических функций*, т.е. функций $u(\vec{r})$, удовлетворяющих уравнению Лапласа,

$$\Delta u = 0,$$

поскольку наш результат, учитывая, что

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla\frac{1}{r},$$

можно записать и так

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}),$$

т.е. $\frac{1}{r}$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Пример

Вычислить поток поля $\vec{a}=(x^2+y^2, y^2+z^2, x^2+z^2)$, через замкнутую поверхность куба S: $0\le x\le l$, $0\le y\le l$, $0\le z\le l$.

Решение:

1) запишем искомый поток в индексной форме и следуя формуле (2.64), и применим теорему Гаусса, следуя (2.65):

$$F=\oint_S \vec{a}\cdot d\vec{S}=\oint_S a_j dS_j=\int_V \nabla_j a_j dV=\int_V \mathrm{div}\,\vec{a}dV;$$

2) вычислим дивергенцию векторного поля $\vec{a}$

$$\mathrm{div}\,\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=2x+2y+2z;$$

3) найдём интеграл по объёму куба, ограниченному поверхностью S:

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{a}dV=\int_0^l dx\int_0^l dy\int_0^l \left(2x+2y+2z\right)dz=2\int_0^l dx\int_0^l dy\int_0^l \left(x+y+z\right)dz=$$

$$=2\int_0^l dx\int_0^l dy\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^l=2\int_0^l dx\int_0^l\left(xl+yl+\frac{l^2}{2}\right)dy=$$

$$=2\int_0^l dx\int_0^l\left(xl+yl+\frac{l^2}{2}\right)dy=2\int_0^l dx\left(xyl+\frac{y^2}{2}l+\frac{l^2}{2}y\right)\Bigg|_0^l=$$

$$=2\int_0^l\left(xl^2+\frac{l^3}{2}+\frac{l^3}{2}\right)dx=2\left(\frac{x^2}{2}l^2+l^3x\right)\Bigg|_0^l=3l^4;$$

4) ответ: $F=4l^4$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить поток поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S:

1) $\vec{a}=\vec{r}$, S: сфера $r=R$;

2) $\vec{a}=(xz, zy, xy)$, S: $x^2+y^2=4$, $0\le z\le 2$;

3) $\vec{a}=(x^2y, zy^2, z^2x)$, $S:\quad x^2+y^2-z^2=0,\quad 0\le z\le 1;$

4) $\vec{a}=(zx^3, xy^3, z^3y)$, $S:\quad x^2+y^2-z=0,\quad 0\le z\le 4;$

5) $\vec{a}=(x/z, zy, z^2y^2)$, $S:\quad x^2+y^2-z^2=4,\quad 0\le z\le 4;$

6) $\vec{a}=(y^2x, x^2y, z^2/2)$, $S:\quad x^2+y^2+z^2=4,\quad -2\le z\le 2.$

2.14. Дивергенция, ротор и оператор Лапласа в криволинейных координатах

Поток векторного поля через некоторую замкнутую поверхность не должен зависеть от СК. Найдем поток некоторого векторного поля $\vec{a}$, через замкнутую поверхность S ограничивающую объем V и применим теорему Гаусса:

$$F=\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\int_V \operatorname{div}\vec{A}dV, \tag{2.66}$$

вектор $d\vec{S}$ может быть записан в различной форме. Наиболее общий вид записи $d\vec{S}=dS\vec{n}=\left(d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3\right)$, где $d\sigma_i$ элементарная площадка перпендикулярная соответствующему базисному вектору. К примеру, для декартовой системы координат модно записать $d\vec{S}=\left(dydz, dxdz, dydx\right)$. Запишем уравнение (2.66) в криволинейных координатах, учитывая преобразования элементарного объёма (2.51) и площади (2.52):

$$\begin{aligned} F&=\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\\ &=\oint_S \vec{A}\cdot\left(H_2H_3dq_2dq_3, H_1H_3dq_1dq_3, H_1H_2dq_1dq_2\right)=\\ &=\iint_{q_2,q_3} A_1H_2H_3dq_2dq_3+\iint_{q_1,q_3} A_2H_1H_3dq_1dq_3+\\ &\quad+\iint_{q_1,q_2} A_3H_1H_2dq_1dq_2=\\ &=\iiint_{q_1,q_2,q_3} \operatorname{div}\vec{A}H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3=\int_V \operatorname{div}\vec{A}dV, \end{aligned} \tag{2.67}$$

Продифференцируем уравнение (2.67) по трем координатам криволинейной СК:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}\iint\limits_{q_2,q_3} A_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3 +$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}\iint\limits_{q_2,q_3} A_2 H_1 H_3 dq_1 dq_3 +$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}\iint\limits_{q_1,q_2} A_3 H_1 H_2 dq_1 dq_2 =$$
$$=\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}\iiint\limits_{q_1,q_2,q_3} \operatorname{div}\vec{A} H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Поскольку дифференцирование по соответствующей координате уничтожает интеграл, то

$$\frac{\partial A_1 H_2 H_3}{\partial q_1}+\frac{\partial A_2 H_1 H_3}{\partial q_2}+\frac{\partial A_3 H_1 H_2}{\partial q_3}=\operatorname{div}\vec{A} H_1 H_2 H_3; \qquad (2.68)$$

выражая дивергенцию векторного поля, получим ее запись в криволинейных координатах:

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial A_1 H_2 H_3}{\partial q_1}+\frac{\partial A_2 H_1 H_3}{\partial q_2}+\frac{\partial A_3 H_1 H_2}{\partial q_3}\right). \qquad (2.69)$$

Получим запись ротора в криволинейных координатах. Заметим, что для дивергенции векторного произведения справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) &= \nabla_i (e_{ijk} a_j b_k) = e_{ijk} a_j \nabla_i b_k + e_{ijk} b_k \nabla_i a_j = \\ &= \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}.\end{aligned} \qquad (2.70)$$

Выберем в качестве вектора $\vec{b}$ базисный вектор i -й оси криволинейной системы координат, тогда для i -й компоненты ротора имеем

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{\varepsilon}_i)=\vec{\varepsilon}_i\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{\varepsilon}_i=\vec{\varepsilon}_i\cdot\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_i. \qquad (2.71)$$

здесь учтено, что производная базисного вектора по координатам базиса равна нулю. Определим компоненты ротора, для чего найдём результат векторного произведения для всех трёх базисных векторов:

$$\vec{a}\times\vec{\varepsilon}_1=\left(0,a_3,-a_2\right),\quad \vec{a}\times\vec{\varepsilon}_2=\left(-a_3,0,a_1\right),$$
$$\vec{a}\times\vec{\varepsilon}_3=\left(a_2,-a_1,0\right); \tag{2.72}$$

применяя оператор дивергенции в виде (2.69), к каждому из векторов (2.72) получим выражение для компонент ротора в криволинейной ортогональной системе координат:

$$\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_1=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial a_3H_1H_3}{\partial q_2}-\frac{\partial a_2H_1H_2}{\partial q_3}\right),$$
$$\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_2=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial a_1H_1H_2}{\partial q_3}-\frac{\partial a_3H_2H_3}{\partial q_1}\right), \tag{2.73}$$
$$\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_3=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial a_2H_2H_3}{\partial q_1}-\frac{\partial a_1H_1H_3}{\partial q_2}\right).$$

Получим запись оператора Лапласа в криволинейных координатах. Поскольку оператор Лапласа – это $\Delta\varphi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, применим последовательно формулы (2.63) и (2.69):

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial A_1H_2H_3}{\partial q_1}+\frac{\partial A_1H_2H_3}{\partial q_2}+\frac{\partial A_3H_1H_2}{\partial q_3}\right);$$
$$\vec{A}=\operatorname{grad}\varphi=\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1},\frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2},\frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right). \tag{2.74}$$

Окончательно для оператора Лапласа имеем

$$\Delta\varphi=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right). \tag{2.75}$$

Пример

Найти Лапласиан поля $\psi = \exp(kr)\sin\varphi\cos\theta$, где (r,θ,φ) координаты сферической СК.

1) следуя формуле (2.56), запишем коэффициенты Ламэ для сферической СК:

$$H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = r\sin\theta;$$

2) найдём частные производные от ψ по трём координатам сферической СК:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = k\exp(kr)\sin\varphi\cos\theta,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\exp(kr)\sin\varphi\sin\theta,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \exp(kr)\cos\varphi\cos\theta;$$

3) найдём комбинации коэффициентов Ламэ, стоящие под знаком производной в формуле (2.75):

$$\frac{H_2H_3}{H_1} = r^2\sin\theta; \quad \frac{H_1H_3}{H_2} = \sin\theta; \quad \frac{H_1H_2}{H_3} = \frac{1}{\sin\theta};$$

4) подставим найденные комбинации и частные производные в формулу (2.75):

$$\begin{aligned}
r^2\sin\theta\Delta\varphi = {} & \frac{\partial}{\partial r}kr^2\sin\theta\exp(kr)\sin\varphi\cos\theta - \\
& -\frac{\partial}{\partial\theta}\exp(kr)\sin\varphi\sin^2\theta + \frac{\partial}{\partial\varphi}\exp(kr)\cos\varphi\tan\theta = \\
& = 2kr\sin\theta\exp(kr)\sin\varphi\cos\theta + \\
& \quad + k^2r^2\sin\theta\exp(kr)\sin\varphi\cos\theta - \\
& \quad - 2\exp(kr)\sin\varphi\sin\theta\cos\theta - \exp(kr)\sin\varphi\tan\theta = \\
& = \left[\left(k^2r^2 + 2kr - 2\right)\sin\theta\cos\theta - \tan\theta\right]\exp(kr)\sin\varphi;
\end{aligned}$$

5) выражая оператор Лапласа, окончательно найдём:

$$\Delta\varphi = \left[\left(k^2 + \frac{2k}{r} - \frac{2}{r^2}\right)\operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right]\exp(kr)\sin\varphi.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить дивергенцию и ротор поля $\vec{a}$:

1) $\vec{a} = \vec{r}\sin\theta\cos\varphi$,

где (r,θ,φ) – координаты сферической СК;

2) $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}\cos\varphi + r\sin\theta\vec{\varepsilon}_\theta + \exp(kr)\sin\theta\vec{\varepsilon}_\varphi$,

где (r,θ,φ) – координаты сферической СК;

3) $\vec{a} = \vec{r}\exp(kr) + \operatorname{tg}\theta kr\vec{\varepsilon}_\theta + \cos(kr)\sin\varphi\vec{\varepsilon}_\varphi$,

где (r,θ,φ) – координаты сферической СК.

Вычислить Лапласиан скалярного поля:

1) $\psi = z\sin\varphi\dfrac{e^r}{r}$,

где (r,φ,z) – координаты цилиндрической СК;

2) $\psi = \left(z^3 - z\right)\cos\varphi + r^2\sin\varphi$,

где (r,φ,z) – координаты цилиндрической СК;

3) $\psi = \left(1 + \cos\varphi\right)\exp(r) + \dfrac{1}{r}\cos\theta$,

где (r,θ,φ) – координаты сферической СК;

4) $\psi = \left(1 + \cos\varphi\right)\sin(kr) + r\cos\theta + \zeta(r)\sin\theta$,

где (r,θ,φ) – координаты сферической СК.

2.15. Теорема Стокса

Теорема Стокса связывает интегралы по замкнутому контуру Γ и по поверхности S, натянутой на этот контур, т.е. по поверхности, для которой контур Γ служит границей. Как и для теоремы Гаусса, мы не будем проводить доказательство, ограничившись общей формулировкой: для произвольного тензорного поля T

$$\oint_{\Gamma} T\ldots d\Gamma_j = \int_S e_{ijk} \nabla_i T \ldots dS_k, \tag{2.76}$$

причём должны быть определённым образом согласованы направление обхода контура и направление нормали к поверхности $\vec{n}$, а именно, если смотреть от конца вектора нормали $\vec{n}$, то контур должен обходиться против часовой стрелки. Иными словами, выполняется *правило буравчика*: если вкручивать буравчик по направлению нормали, то направление его вращения укажет направление обхода контура. Появление правил, позволяющих различать правые и левые СК, связано с тем, что в теореме Стокса появился псевдотензор Леви–Чивита и уже невозможно считать вектор касательной $\vec{\tau}$ и вектор нормали $\vec{n}$ одновременно истинными векторами. Какой из них считать псевдовектором, для теоремы Стокса безразлично.

В наиболее распространённом случае теорема Стокса применяется к циркуляции векторного поля:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\Gamma} = \oint_{\Gamma} A_j d\Gamma_j = \int_S e_{ijk} \nabla_i A_j dS_k = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} \tag{2.77}$$

– циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через поверхность, натянутую на этот контур.

Подчеркнём, что для данного контура существует бесконечно много натянутых на него поверхностей, и для всех теорема Стокса справедлива. По этой причине нет таких сложностей с особыми точками поля, какие мы видели в случае теоремы Гаусса – если особые точки изолированные, то поверхность всегда можно провести так, чтобы миновать особенности. Такое отличие от теоремы Гаусса связано с тем, что замкнутая поверхность, в отличие от замкнутого контура, делит пространство на две части.

Пример

Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a}=(2xz, z, yz)$, по контуру Γ пересечения плоскости $x+y+2z=2$, с координатными осями обход контура осуществлять по правилу правого винта относительно OZ.

Решение:

1) Запишем циркуляцию в индексной форме, следуя формуле (2.76), и применим теорему Стокса, следуя (2.77)

$$\oint_{\Gamma}\vec{a}\cdot d\vec{\Gamma}=\oint_{\Gamma}a_i d\Gamma_i=\int_S e_{ijk}\nabla_i a_j dS_k=\int_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S};$$

2) найдём $\operatorname{rot}\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=e_{ijk}\nabla_j a_k,$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_x=\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_1\Rightarrow i=1\Rightarrow\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_x=\sum_{j,k=1}^{3}e_{1jk}\nabla_j a_k=\cancel{e_{111}}\nabla_1 a_1+$$

$$\cancel{e_{112}}\nabla_1 a_2+\cancel{e_{113}}\nabla_1 a_3+\cancel{e_{121}}\nabla_2 a_1+\cancel{e_{122}}\nabla_2 a_2+e_{123}\nabla_2 a_3+\cancel{e_{131}}\nabla_3 a_1+$$

$$e_{132}\nabla_3 a_2+\cancel{e_{133}}\nabla_3 a_3=\nabla_2 a_3-\nabla_3 a_2=\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}=z-1,$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_y=\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_2=e_{231}\nabla_3 a_1+e_{213}\nabla_1 a_3=\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}=2x,$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_z=\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_3=e_{312}\nabla_1 a_2+e_{321}\nabla_2 a_1=\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}=0,$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(z-1, 2x, 0\right);$$

3) для вычисления интеграла нужно определить вектор $d\vec{S}=\vec{n}dS$, где $\vec{n}$ – единичный вектор, нормальный к плоскости $x+y+2z=2,$ направление нормали задано условием «обход контура осуществлять по правилу правого винта относительно OZ», это означает, что вектор нормали должен иметь острый угол с осью OZ или, что то же самое, $n_z>0$.

4) из дифференциальной геометрии известно, что две нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$ задаются соотношениями

$$\vec{n}_+ = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}, \quad \vec{n}_- = -\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|};$$

5) очевидно, что в нашем случае нужно рассматривать $\vec{n}_+$, поскольку $(\operatorname{grad} F)_z = 2 > 0$, т.е.

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (1,1,2);$$

$$|\operatorname{grad} F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{6};$$

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right);$$

6) найдём точки пересечения плоскости с осями OX и OY

$$OX: z = 0, y = 0 \Rightarrow x = 2, \quad OY: x = 0, y = 0 \Rightarrow y = 2;$$

То есть внутри треугольника, образованного пересечением заданной плоскости с координатными осями, координата x изменяется от $x = 0$ до $x = 2$; то же самое можно сказать о координате y, значения z найдём из уравнения плоскости $z = 1 - (x + y)/2$;

7) найдём искомый интеграл:

$$\int_S (\operatorname{rot} \vec{a}) \cdot d\vec{S} = \int_0^2 dx \int_0^2 dy (z - 1, 2x, 0) \cdot \vec{n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^2 dx \int_0^2 (2x + z - 1) dy = \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^2 dx \int_0^2 (2x + 1 - (x + y)/2 - 1) dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^2 dx \int_0^2 \left(\frac{3x}{2} - \frac{y}{2}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^2 dx \int_0^2 \left(\frac{3x}{2} - \frac{y}{2}\right) dy = \frac{6}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}};$$

8) ответ: циркуляция равна $4/\sqrt{6}$.

Пример

Преобразовать к интегралу по контуру: $I = \int \left[\nabla \psi(r) \times \nabla \varphi \right] \cdot d\vec{S}$.

Решение:

1) запишем интеграл I в индексной форме:

$$I = \int e_{kij} \nabla_i \left(\psi(r) \right) \nabla_j \varphi \, dS_k \ ;$$

2) для того, чтобы воспользоваться формулой (2.76) нужно записать интеграл в виде

$$\int e_{ijk} \nabla_i A_j dS_k \ ;$$

3) найдём вектор A_j

$$\nabla_i (\psi(r)) \nabla_j \varphi = \nabla_i (\psi \nabla_j \varphi) - \psi \nabla_i \nabla_j \varphi = \nabla_i (A_j) - \psi \nabla_i \nabla_j \varphi;$$

4) то есть

$$I = \int e_{ijk} \nabla_i (\psi(r)) \nabla_j \varphi \, dS_k = \int e_{ijk} \nabla_i A_j dS_k - \int e_{ijk} \psi \nabla_i \nabla_j \varphi dS_k =$$
$$= \oint_\Gamma A_j \Gamma_j - \int e_{ijk} \psi \nabla_i \nabla_j \varphi dS_k;$$

5) подставим $A_j = \psi \nabla_j \varphi$ и перепишем в инвариантном виде

$$I = \oint_\Gamma A_j d\Gamma_j - \int e_{ijk} \psi \nabla_i \nabla_j \varphi dS_k =$$
$$= \oint_\Gamma \psi \nabla_j \varphi \, d\Gamma_j - \int e_{ijk} \psi \nabla_i \nabla_j \varphi dS_k =$$
$$= \oint_\Gamma \psi \operatorname{grad} \varphi \cdot d\vec{\Gamma} - \int \psi \cancel{\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi} \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \psi \operatorname{grad} \varphi \cdot d\vec{\Gamma}.$$

6) ответ: $I = \oint_\Gamma \psi \operatorname{grad} \varphi \cdot d\vec{\Gamma}.$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить циркуляцию поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру Γ:

1) $\vec{a} = (x + y, y - x, 0)$, Γ: $x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0$, обход контура по правилу правого винта относительно OZ ;

2) $\vec{a} = \left(y, x^2, -z\right)$, Γ: $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 5$, обход контура по правилу правого винта относительно OZ;
3) $\vec{a} = \left(y^3, -x^3, 0\right)$, Γ: $x^2/2 + y^2/4 = 1, z = 0$, обход контура по правилу правого винта относительно OZ;
4) $\vec{a} = \left(y, -x, z\right)$, Γ: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x = z$ обход контура по правилу правого винта относительно OZ.

Преобразовать к интегралу по контуру:

1) $\int r^2 \left[\vec{r} \times \nabla\varphi\right] \cdot d\vec{S}$; 2) $\int \dfrac{r^2}{\operatorname{sh} r} \left[\vec{r} \times \nabla\varphi\right] \cdot d\vec{S}$;

3) $\int \left[\dfrac{\vec{r}}{r^3} \times \nabla\varphi\right] \cdot d\vec{S}$; 4) $\int \mathrm{e}^r \left[\vec{r} \times \nabla\varphi\right] \cdot d\vec{S}$;

5) $\int \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) \left[\vec{r} \times \nabla\varphi\right] \cdot d\vec{S}$; 6) $\int (\vec{k} \cdot \vec{r})^3 \left[\vec{r} \times \nabla\varphi\right] \cdot d\vec{S}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. Изд. 3-е. – М.: Физматлит, 2005. – 304 с.
2. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности. Изд. 4-е. – М.: «Лань», 2010. – 480 с.
3. Речкалов В.Г. Векторная и тензорная алгебра для будущих физиков и техников: учеб. пособие для вузов. – Челябинск: ИИУМЦ «Образование», 2008. – 140 с.
4. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. Изд. 3-е. – М.: МГУ, 1986. – 264 с.
5. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике, физике. / Пер. с англ. Под ред. Г.В. Коренева. – М.: Физматгиз, 1963. – 411 с.
6. Димитренко Ю.И. Тензорное исчисление: учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.
7. Коренев Г.В. Тензорное исчисление: учеб. пособие для вузов. – М.: Издательство МФТИ, 2000. – 240 с.

Учебное издание

Любимов Дмитрий Викторович
Марышев Борис Сергеевич
Циберкин Кирилл Борисович

ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Редактор *А. В. Хлебникова*
Корректор *М. Н. Демидова*
Компьютерная верстка *К.Б. Циберкина*

Подписано в печать 10.05.2016. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 5,35. Тираж 100 экз. Заказ___

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15