МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Б. С. Марышев, К. Б. Циберкин

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД: МЕТОДЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки бакалавров
«Физика»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2022

УДК 531/534:514.743(075.8)
ББК 22.25+22.151(я7)
М25

Марышев Б. С.

М25 Механика сплошных сред : методы тензорного анализа : учебное пособие / Б. С. Марышев, К. Б. Циберкин ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Пермь, 2022. – 98 с.

ISBN 978-5-7944-3866-6

В учебном пособии излагаются избранные вопросы тензорной алгебры и тензорного анализа. Представлен вывод основных уравнений механики сплошных сред и решено несколько классических задач с опорой на методы тензорного анализа.

Цель пособия – помочь студентам, изучающим курс механики сплошных сред, овладеть основными понятиями предметов и приёмами работы применительно к конкретным задачам. Пособие также будет полезным при изучении тензорного анализа. Предназначено для студентов направления подготовки бакалавров «Физика».

УДК 531/534:514.743(075.8)
ББК 22.25+22.151(я7)

Печатается по решению ученого совета физического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра «Общая физика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (зав. кафедрой – д. ф.-м. н., доцент ***А. В. Перминов***);

к. ф.-м. н., доцент кафедры физики и технологии Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета ***С. В. Субботин***

ISBN 978-5-7944-3866-6

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Преобразования координат

При описании физических систем принято задавать какую-либо систему координат (СК), выбранную из соображений удобства теоретических построений или особенностей проведения эксперимента. С другой стороны, физические закономерности от выбора СК, разумеется, не зависят, и поэтому наиболее адекватным математическим языком, на котором эти закономерности следует формулировать, будет такой, который явно учитывает равноправие всех СК. Этим целям отвечает тензорный анализ, позволяющий вводить новые объекты, производить вычисления и т.д. независимо от СК, а точнее – действуя будто бы во всех СК сразу, и затем, как только это становится удобным, переходя к какой-либо конкретной и наиболее подходящей в данном случае СК.

Для построения собственно тензорного аппарата необходимо привести основные сведения из теории преобразования координат. Для упрощения на этом этапе будет рассматриваться только наиболее простой случай плоских трёхмерных декартовых СК, начала которых совпадают (правила работы в криволинейных координатах приведены в одной из следующих глав). Прежде всего, каждой точке пространства в заданной СК ставится в соответствие тройка чисел – *координаты* этой точки. Удобно обозначать координаты относительно заданной СК одной буквой, различая их с помощью индекса, например x_1, x_2, x_3 или y_1, y_2, y_3 и т.п. Возьмём какие-либо две СК. Координаты относительно одной обозначим x_1, x_2, x_3, а относительно другой – y_1, y_2, y_3. Зная координаты точки пространства в одной СК, можно найти её координаты и в другой. Такое преобразование является линейным и однородным:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3, \\ x_2 &= \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{23} y_3, \\ x_3 &= \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 + \alpha_{33} y_3, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где коэффициенты $\alpha_{11}, \alpha_{12} \ldots$ – некоторые постоянные числа для каждой СК.

Формулы (1.1) можно переписать более компактно:

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} y_j, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1.2}$$

Индексы, по которым нет суммирования, именуются *свободными*. Например, в соотношении (1.2) индекс i – свободный. В тензорном анализе принимается, что любое соотношение, содержащее свободные индексы, на самом деле является краткой записью целой системы соотношений, которые можно получить, если вместо свободных индексов подставить любые возможные их значения. В рассматриваемых трёхмерных задачах это всегда 1, 2 или 3, и далее указания типа $i = 1, 2, 3$, как в (1.2), будут опускаться.

В выражениях тензорного анализа всегда присутствует также и другой тип индексов – те, по которым ведётся суммирование. Они называются *немыми*. Так, в (1.2) индекс j – немой.

В тензорном анализе различные суммы встречаются очень часто, поэтому принято записывать их в компактном виде. Почти всегда немой индекс встречается в данной сумме, по крайней мере, два раза, и можно по этому признаку узнавать сумму, а значок Σ опускать. Например,

$$A_i B_i = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3,$$

$$A_{kk} = \sum_{k=1}^{3} A_{kk} = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

$$A_{ik} B_{ki} = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} A_{ik} B_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} A_{ik} B_{ki} \right) = \sum_{i,k=1}^{3} A_{ik} B_{ki}.$$

Такое упрощение записи сумм называется *соглашением Эйнштейна о немых индексах*. Нужно хорошо запомнить простые правила работы с индексами.

1. Количество и обозначение свободных индексов должно быть одинаково во всех одночленах данного выражения.

Примеры: записи $T_{ik} = A_i B_k$ и $T_{pq} = A_p B_q$ эквивалентны, тогда как выражения $T_j = A_i + B_j$, $T_{jk} = B_j + C_j$, $T_{jk} = B_j + C_k$ запрещены.

2. Немой индекс может быть обозначен любой буквой (отсюда его название), отличной от обозначений свободных индексов и других немых индексов того же одночлена. Примеры: $A_j B_j$ может быть записано как $A_k B_k$, $A_q B_q$ и т.д.; выражение $C_j + T_{jk} B_k$ эквивалентно $C_j + T_{js} B_s$, но нельзя написать $C_j + T_{jj} B_j$. Особенно осторожными нужно быть при работе с многократными суммами: выражения $T_{ij} D_{ji}$ и $T_{ii} D_{ii}$ несут совершенно разный смысл, в первом случае мы имеем двукратную сумму, во втором – однократную. Чтобы предупредить такого рода ошибки, используется следующее дополнительное правило.
3. Немой индекс не может появиться в каждом одночлене более двух раз.

Следует учитывать, что такое ограничение не даёт возможности, например, сумму $A_{11}B_1 + A_{22}B_2 + A_{33}B_3$ записать кратко как $A_{jj} B_j$, однако на практике в тензорном анализе такие суммы не реализуются.

Вернёмся вновь к преобразованиям координат. Теперь вместо громоздкой записи (1.1) и чуть более компактной (1.2) можно записать переход между системами ещё короче:

$$x_i = \alpha_{ij} y_j. \tag{1.3}$$

Величины, которые имеют два индексами, удобно представлять в виде матрицы. Условимся, что первый индекс будет нумеровать строки матрицы, а второй индекс – столбцы. Например, T_{23} есть элемент матрицы T_{ij}, стоящий на пересечении второй строки и третьего столбца. Матрицу α_{ij} называют матрицей преобразования координат от базиса y к базису x (или матрицей обратного преобразования).

Старая и новая СК совершенно равноправны. Поэтому наряду с (1.3) должны существовать обратные соотношения

$$y_j = \beta_{ji} x_i, \tag{1.4}$$

Матрицу β_{ji} называют матрицей прямого преобразования координат; её компоненты однозначно связаны с α_{ij}. Будем рассматривать (1.3) как систему уравнений, где x_i нам известны, а новые координаты y_j – неизвестны. Определитель матрицы α_{ij} называется *якобианом преобразования* и обозначается Δ. Из условия разрешимости системы следует, что $\Delta \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица α_{ij}^{-1}, произведение которой с исходной матрицей даёт единичную матрицу, т.е. такую, у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю. Элементы единичной матрицы обозначают δ_{ij} – *символом Кронекера* или *дельта-символом*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.5}$$

Произведение матриц по обычному правилу «строка на столбец» очень легко записывается с помощью введённых правил работы с индексами. Если, например, матрица Q_{ij} есть произведение матриц P_{ij} и T_{ij}, то

$$Q_{ij} = P_{ik} T_{kj}.$$

Таким образом, можно написать

$$\alpha_{ik}^{-1} \alpha_{kj} = \delta_{ij}. \tag{1.6}$$

Умножим правую и левую части (1.3) на α_{ki}^{-1}:

$$\alpha_{ki}^{-1} x_i = \alpha_{ki}^{-1} \alpha_{ij} y_j = \delta_{kj} y_j = y_k. \tag{1.7}$$

Последнее равенство в (1.7) получилось потому, что в сумме $\delta_{kj} y_j$ на самом деле отлично от нуля лишь одно слагаемое, в котором $k = j$, по определению дельта-символа. Иными словами, суммирование с дельта-символом сводится к переобозначению индекса. Итак, получается

$$y_k = \alpha_{kj}^{-1} x_j,$$

или, с переобозначением индексов,

$$y_i = \alpha_{ij}^{-1} x_j. \tag{1.8}$$

Сравнение (1.8) с (1.4) устанавливает соотношение между матрицами преобразования:

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij}^{-1}, \tag{1.9}$$

т.е. матрица обратного преобразования координат совпадает с обратной матрицей прямого преобразования. Учитывая (1.6), запишем (1.9) в другом виде

$$\beta_{ij} \alpha_{jk} = \delta_{ik}. \tag{1.10}$$

Рассмотрим теперь две точки пространства с координатами x_i и $x_i + a_i$, т.е. координаты которых отличаются на вектор a_i. Разности координат этих двух точек относительно новой СК y образуею вектор b_i. Так как формулы (1.3), (1.4) линейны и однородны, то разности координат преобразуются по тем же формулам, что и сами координаты. Поэтому

$$a_i = \alpha_{ij} b_j. \tag{1.11}$$

По теореме Пифагора расстояние S между точками пространства определяется формулой

$$S^2 = a_i a_i, \tag{1.12}$$

т.е. квадрат расстояния равен сумме квадратов разностей координат. В дальнейшем мы ограничимся лишь такими преобразованиями, которые не изменяют масштаба длины. Для таких преобразований должно быть

$$S^2 = a_i a_i = b_i b_i. \tag{1.13}$$

Подставив в (1.13) формулу (1.11), получим

$$a_i a_i = \alpha_{ij} \alpha_{ik} b_j b_k = b_j b_j.$$

Это условие удовлетворяется, если

$$\alpha_{ij} \alpha_{jk} = \delta_{ik}. \tag{1.14}$$

Матрицы, а также преобразования, обладающие свойством (1.14), называются *ортогональными*. Сравнив с (1.10), получаем

$$\alpha_{ij} = \beta_{ji}, \tag{1.15}$$

т.е. матрица обратного преобразования координат образуется из α_{ij} заменой строк на столбцы – операцией, которую в алгебре называют *транспонированием*. Поскольку определитель при транспонировании не меняется, определитель произведения матриц равен произведению определителей, а определитель единичной матрицы – единице, то из (1.10) и (1.15) получается

$$\Delta \cdot \Delta = 1,$$

откуда $\Delta = \pm 1$. Таким образом, возможны два типа ортогональных преобразований: с $\Delta = 1$ и $\Delta = -1$. Преобразования первого типа называют *собственными*, второго – *несобственными*. Примерами собственных преобразований могут служить различные повороты СК, несобственных – отражения.

1.2. Понятие вектора

Кроме координат и их приращений, в физике часто встречаются другие связанные с СК наборы величин, которые преобразуются друг через друга при переходе к новой СК. Приведём простейшие примеры. Скорости изменения со временем координат материальной частицы

$$v_i = \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$$

преобразуются так же, как сами координаты. Действительно, когда компоненты матрицы преобразования не зависят от времени (т.е. базисные векторы СК постоянны), выполняется

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{d(\alpha_{ij} y_j)}{dt} = \alpha_{ij} \frac{dy_j}{dt} = \alpha_{ij} \dot{y}_j,$$

$$v_i = \alpha_{ij} v'_j,$$

где обозначено $v'_j = \dot{y}_j$.

Аналогично ведут себя ускорения:

$$a_i = \dot{v}_i = \alpha_{ij} \dot{v}'_j = \alpha_{ij} a'_j,$$

а, поскольку масса не зависит от координат, то, согласно уравнениям Ньютона, и силы преобразуются так же:

$$F_i = ma_i = m\alpha_{ij} a'_j = \alpha_{ij} F'_j.$$

Можно привести и другие примеры. Но во всех случаях мы видим, что имеются наборы величин, разные в разных СК, но связанные друг с другом аналогично координатам. Обобщая это наблюдение, введём понятие вектора. *Вектором* называется совокупность троек чисел A_i, A'_j,…, заданных во всех возможных СК и связанных друг с другом так же, как координаты:

$$A_i = \alpha_{ij} A'_j, \quad A'_i = \alpha_{ji} A_j. \tag{1.16}$$

Числа A_i называются компонентами вектора в данной СК. Важно подчеркнуть, что вектор – не просто тройка чисел, а совокупность таких троек, определённых сразу во всех СК. Если в какой-либо СК компоненты вектора известны, то по формулам (1.16) можно найти компоненты в любой другой СК. Если в какой-либо СК взять произвольную тройку чисел в качестве A_i и по правилу (1.16) поставить ей в соответствие тройки чисел в других СК, мы получим, очевидно, вектор, или, как принято говорить, вектор имеет три независимые компоненты.

Далее векторы будут обозначаться преимущественно теми же буквами, что и компоненты, но без индексов. Во избежание путаницы над значком вектора принято ставить стрелку, например: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ и т.д. В литературе для векторов также часто используется полужирное начертание: **A**, **B**, **C**.

1.3. Арифметика векторов

Нулевой вектор. Из формул (1.16) видно, что если в некоторой СК все компоненты вектора равны нулю, то они равны нулю во всех СК. Такой вектор называют нулевым, или нуль-вектором, и обозначается так же, как и число 0, без всякой стрелки сверху.

Равенство. Пусть даны два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, причём в какой-то СК их компоненты совпадают, т.е. $A_i = B_i$. Докажем, что компоненты будут совпадать во всех СК. Действительно,

$$A_i' = \alpha_{ji} A_j = \alpha_{ji} B_j = B_i.$$

Это даёт возможность определить понятие равенства векторов. Два вектора равны, если в какой-либо, а значит – и во всех других СК – их компоненты совпадают.

Умножение на число. Пусть заданы вектор $\vec{A}$ и число λ. Образуем в каждой СК новую тройку чисел по правилу

$$C_i = \lambda A_i.$$

Совокупность наборов C_i также образует вектор. Для этого достаточно проверить любую из формул (1.16):

$$C_i = \lambda A_i = \lambda \alpha_{ij} A_j' = \alpha_{ij} (\lambda A_j') = \alpha_{ij} C_j'.$$

Построенный вектор $\vec{C}$ называют *произведением вектора на число*. Таким образом, любой вектор можно умножить на любое число, для чего надо умножить на это число каждую компоненту вектора.

Сложение векторов. Пусть даны два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Образуем тройки чисел по правилу

$$C_i = A_i + B_i.$$

Совокупность этих троек образует вектор, так как

$$C_i = A_i + B_i = \alpha_{ij} A'_j + \alpha_{ij} B'_j = \alpha_{ij} (A'_j + B'_j) = \alpha_{ij} C'_j.$$

Этот вектор называют *суммой векторов* $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}.$$

1.4. Инварианты векторов. Скалярное произведение

Часто бывает, что некоторая величина, не зависящая от выбора СК (такие величины называются скалярами), зависит, тем не менее, от вектора. Например, кинетическая энергия материальной точки зависит от вектора скорости, но во всех СК имеет одно и то же значение. Скалярная функция векторного аргумента называется *инвариантом вектора*. Ясно, что любая функция инварианта сама является инвариантом, поэтому возникает вопрос о числе независимых инвариантов, т.е. не являющихся функциями друг друга. Во-первых, независимых инвариантов не может быть более трёх, так как вектор имеет три независимых компоненты. Далее, так как для любого вектора $\vec{A}$ найдётся СК, в которой какая-либо ось, например первая, совмещена с вектором $\vec{A}$, т.е. $A_2 = A_3 = 0$, то у вектора имеется лишь один независимый инвариант. В качестве такого можно взять, например, сумму квадратов компонент. Докажем, что это инвариант.

$$A_i A_i = \alpha_{ip} \alpha_{iq} A'_p A'_q = \delta_{pq} A'_p A'_q = A'_p A'_p.$$

Корень квадратный из этой величины называется длиной вектора или модулем вектора и является, следовательно, тоже инвариантом. Модуль вектора $\vec{A}$ будем обозначать $\left|\vec{A}\right|$ или просто A. Таким образом, хотя скалярная функция векторного аргумента в каждой СК предстает перед нами как функция трёх переменных – компонент вектора, эта зависимость не может быть произвольной. Фактически это функция одного аргумента – длины вектора.

Рассмотрим теперь скалярные функции двух векторных аргументов – инварианты системы двух векторов. Пусть есть два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Совместим ось номер 1 СК с вектором $\vec{A}$, т.е. выберем СК, в которой $A_2 = A_3 = 0$. Этим условием система координат не определяется однозначно, так как остаётся возможность поворота вокруг оси 1. Этим произволом можно воспользоваться, чтобы обратить в нуль одну из компонент вектора $\vec{B}$, например, B_3. У нас ещё остались A_1, B_1, B_2, и далее уменьшить число отличных от нуля компонент уже невозможно. Это означает, что система двух векторов имеет ровно три независимых инварианта. Два инварианта нам уже известны – длины векторов A и B. В качестве третьего инварианта можно взять сумму попарных произведений компонент векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Действительно,

$$A_i B_i = \alpha_{ip}\alpha_{iq} A'_p B'_q = \delta_{pq} A'_p B'_q = A'_p B'_p .$$

Этот инвариант называется *скалярным произведением* векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ и обозначается $\vec{A}\cdot\vec{B}$ или $(\vec{A},\vec{B})$:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_i B_i . \tag{1.17}$$

Длина вектора тоже выражается через скалярное произведение, а именно:

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = \vec{A}^2 = A_i A_i = |\vec{A}|^2 = A^2 , \tag{1.18}$$

т.е.

$$A = \sqrt{\vec{A}^2} . \tag{1.19}$$

Рассмотрим некоторые свойства скалярного произведения:
– скалярное произведение *линейно* по каждому сомножителю:

$$\vec{A}\cdot(\alpha\vec{B} + \beta\vec{C}) = \alpha\vec{A}\cdot\vec{B} + \beta\vec{A}\cdot\vec{C} ; \tag{1.20}$$

– скалярное произведение *коммутативно*:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_i B_i = B_i A_i = \vec{B}\cdot\vec{A}; \tag{1.21}$$

– *неравенство Шварца* – модуль скалярного произведения не превосходит произведения модулей

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \le AB; \tag{1.22}$$

– *неравенство треугольника*. модуль суммы не превосходит суммы модулей

$$|\vec{A} + \vec{B}| \le A + B, \tag{1.23}$$

– неравенство Шварца позволяет также ввести понятие *угла между векторами*. А именно: всегда существует величина ϑ, которая является решением уравнения

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}. \tag{1.24}$$

В соответствии с (1.24) векторы называют *ортогональными*, если $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, и *параллельными*, если $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$.

1.5. Радиус-вектор

В соответствии с определением вектора сами координаты могут служить компонентами некоторого вектора. Вектор, компонентами которого являются координаты некоторой точки пространства, называется *радиус-вектором* этой точки. Он обозначается как $\vec{r}$ или $\vec{R}$, а его компоненты – x_i или X_i.

Пользуясь понятием радиус-вектора, можно написать теперь определение скорости материальной частицы не через её компоненты, а сразу в инвариантном виде:

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} = \frac{d\vec{R}}{dt}. \tag{1.25}$$

Хотя вектор скорости получается с помощью радиус-вектора, есть существенное отличие между радиус-вектором и векторами типа скорости. Это различие касается поведения при переносе начала координат (*трансляции*). Пусть вектор $\vec{a}$ есть радиус-вектор нового начала координат относительно другого. Тогда для произвольной точки пространства

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{R}'. \tag{1.26}$$

С учётом (1.25) получаем

$$\vec{v} = \vec{v}',$$

т.е. скорость при трансляции не меняется. Также не меняются векторы ускорения, силы, импульса, напряжённости электрического поля и др. Причина такого особого поведения радиус-вектора, разумеется, в том, что при трансляции положение начала координат меняется, и, естественно, меняется радиус-вектор.

1.6. Понятие тензора

В физических приложениях часто приходится иметь дело с большими наборами чисел, как-то изменяющимися при преобразованиях координат. Для примера рассмотрим освязь между векторами электрической индукции и напряжённости электрического поля. Если тело обладает различными свойствами по разным направлениям, то каждая компонента вектора индукции $\vec{D}$ определяется, в общем случае, всеми компонентами $\vec{E}$:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j.$$

Коэффициенты ε_{ij} в каждой СК различны и образуют, очевидно, набор из девяти величин.

Найдём закон преобразования для ε_{ij} :

$$D_i' = \alpha_{ki} D_k = \alpha_{ki} \varepsilon_{kj} E_j = \alpha_{ki} \varepsilon_{kj} \alpha_{jp} E_p' = \varepsilon_{ip}' E_p'.$$

Отсюда видно, что

$$\varepsilon_{ip}' = \alpha_{ki} \alpha_{jp} \varepsilon_{kj}. \tag{1.27}$$

В закон преобразования (1.27) матрица α_{ij} входит дважды, т.е. ε_{ij} преобразуется так же, как произведения координат. Так как совокупности наборов чисел с таким же поведением встречаются часто, было сформулировано обобщающее понятие.

Тензором второго ранга называется совокупность связанных с СК наборов девяти чисел T_{ij}, преобразующихся так же, как произведения двух координат:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \alpha_{ip}\alpha_{jq}T'_{pq}, \\ T'_{ij} &= \alpha_{pi}\alpha_{qj}T_{pq}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Следующая ступень обобщения этого понятия – тензоры произвольного ранга.

Тензором n-го ранга называется совокупность связанных с СК наборов 3^n чисел $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, преобразующаяся так же, как произведения n координат:

$$\begin{aligned} T_{i_1 i_2 \ldots i_n} &= \alpha_{i_1 j_1}\alpha_{i_2 j_2}\ldots\alpha_{i_n j_n}T'_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \\ T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} &= \alpha_{j_1 i_1}\alpha_{j_2 i_2}\ldots\alpha_{j_n i_n}T_{j_1 j_2 \ldots j_n}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Как видно, векторы можно рассматривать как тензоры первого ранга, скаляры – как тензоры нулевого ранга. Обозначать тензоры второго ранга и выше мы обычно будем той же буквой, что и компоненты.

1.7. Арифметика тензоров

Основные понятия и действия арифметики (нуль-тензор, равенство, умножение на число, сложение) вводятся для тензоров произвольного ранга аналогично тому, как выше делалось для векторов.

Например, сложение тензоров второго ранга: паре тензоров T и P ставится в соответствие в каждой СК набор чисел Q_{ij} по правилу

$$Q_{ij} = T_{ij} + P_{ij}.$$

Закон преобразования наборов Q_{ij}

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= T_{ij} + P_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}T'_{pq} + \alpha_{ip}\alpha_{jq}P'_{pq} = \\ &= \alpha_{ip}\alpha_{jq}(T'_{pq} + P'_{pq}) = \alpha_{ip}\alpha_{jq}Q'_{pq} \end{aligned}$$

является тензорным, поэтому совокупность полученных наборов чисел Q_{ij} образует тензор второго ранга, который называют *суммой тензоров* T *и* P:

$$Q = T + P.$$

Задание всех компонент тензора в какой-либо СК определяет с помощью (1.29) компоненты в любой СК. Пусть, например, g – тензор второго ранга, причём в некоторой СК его компоненты образуют единичную матрицу, т.е. $g_{ij} = \delta_{ij}$. Найдём компоненты тензора g в какой-либо другой СК:

$$g'_{ij} = \alpha_{pi}\alpha_{qj}g_{pq} = \alpha_{pi}\alpha_{qj}\delta_{pq} = \alpha_{pi}\alpha_{pj} = \delta_{ij}.$$

Таким образом, компоненты тензора g в любой СК образуют единичную матрицу, в соответствии с чем и сам тензор g мы будем называть *единичным*.

1.8. Транспонирование. Симметричные и антисимметричные тензоры

Пусть задан тензор второго ранга T. Составим в каждой СК набор чисел $\tilde{T}_{ij}$ путём перестановки индексов:

$$\tilde{T}_{ij} = T_{ji}, \tag{1.30}$$

т.е. матрица $\tilde{T}_{ij}$ образуется путём транспонирования матрицы компонент тензора T. Найдем закон преобразования для $\tilde{T}_{ij}$:

$$\tilde{T}'_{ij} = T'_{ji} = \alpha_{pj}\alpha_{qi}T_{pq} = \alpha_{pj}\alpha_{qi}\tilde{T}_{qp}.$$

Отсюда видно, что наборы $\tilde{T}_{ij}$ образуют компоненты тензора второго ранга $\tilde{T}$, который называют *транспонированным* по отношению к T. Тем самым мы определили операцию транспонирования.

Её основные свойства:

– операция транспонирования линейна, т.е.

$$\widetilde{(T+P)} = \tilde{T} + \tilde{P}, \quad \widetilde{(\alpha T)} = \alpha \tilde{T}; \tag{1.31}$$

– двукратное применение операции транспонирования даёт исходный тензор:

$$\widetilde{(\tilde{T})} = T. \tag{1.32}$$

Некоторые тензоры обладают специальными свойствами относительно операции транспонирования. Так, бывают тензоры, не меняющиеся при транспонировании, т.е.

$$\tilde{T} = T,$$

или в компонентах

$$T_{ij} = T_{ji}. \tag{1.33}$$

Тензоры, обладающие таким свойством, называют *симметричными*. Условия (1.33) всегда выполняются для компонент, стоящих на главной диагонали, поэтому в (1.33) фактически содержатся три условия на недиагональные компоненты. Так как у тензора второго ранга общего вида 9 независимых компонент, то у симметричного тензора получаем 9 –3 = 6 независимых компонент. В качестве таковых можно взять все диагональные компоненты и стоящие над главной диагональю. Тогда компоненты под диагональю определятся из условий симметрии тензора (1.33).

Наряду с симметричными тензорами существуют тензоры, с, в некотором смысле, противоположным свойством – тензоры, которые при транспонировании умножаются на (-1), т.е.

$$\tilde{T} = -T,$$

или

$$T_{ij} = -T_{ji}. \tag{1.34}$$

Такие тензоры называются *антисимметричными*. Из (1.34) видно, что диагональные компоненты антисимметричного тензора должны равняться нулю, так как, например $T_{11} = -T_{11}$, $2T_{11} = 0$, $T_{11} = 0$. Условия антисимметрии связывают наддиагональные и поддиагональные компоненты, так что у антисимметричного тензора всего 3 независимых компоненты, например, наддиагональные.

То, что число независимых компонент симметричного и антисимметричного тензоров в сумме составляет 9, т.е. совпадает с числом независимых компонент произвольного тензора второго ранга, наводит на мысль, что произвольный тензор можно разбить на симметричную и антисимметричную части. В этом несложно убедиться. Пусть

$$T = T^s + T^a, \tag{1.35}$$

где $\tilde{T}^s = T^s$, $\tilde{T}^a = -T^a$.

Применим к (1.35) операцию транспонирования

$$\tilde{T} = \tilde{T}^s + \tilde{T}^a = T^s + \left(-T^a\right) = T^s - T^a. \tag{1.36}$$

Складывая (1.35) и (1.36), получаем

$$2T^s = T + \tilde{T},$$

а вычитая –

$$2T^a = T - \tilde{T}.$$

Таким образом,

$$T^s = \frac{1}{2}(T + \tilde{T}), \qquad T^a = \frac{1}{2}(T - \tilde{T}). \tag{1.37}$$

В предположении существования T^s и T^a для них получены явные формулы, что доказывает единственность разложения на симметричную и антисимметричную части, когда оно возможно.

Пусть теперь нам не известно, допускает ли тензор T искомое разложение. Формулы (1.37) по-прежнему имеют смысл, однако теперь нет гарантии, что эти формулы дают то, что нужно. Исследуем T^s и T^a, вычисленные согласно (1.37). Применяя транспонирование, получаем

$$\tilde{T}^s = \frac{1}{2}\left(\tilde{T} + \widetilde{(\tilde{T})}\right) = \frac{1}{2}(\tilde{T} + T) = T^s,$$

$$\tilde{T}^a = \frac{1}{2}(\tilde{T} - T) = -T^a,$$

т.е. T^s получается симметричным, T^a – антисимметричным. Найдём их сумму:

$$T^s + T^a = \frac{1}{2}(T + \tilde{T} + T - \tilde{T}) = \frac{1}{2} \cdot 2T = T.$$

Тем самым показано, что формулы (1.37) дают возможность для любого тензора второго ранга найти его симметричную и антисимметричную части.

1.9. Тензорное произведение

Существует простой способ получения тензоров высокого ранга из тензоров низких рангов. Начнём с векторов. Пусть даны два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Составим в каждой СК набор чисел T_{ij} по правилу

$$T_{ij} = A_i B_j. \tag{1.38}$$

Используя преобразование компонент векторов (1.16), получим

$$T_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq} A'_p B'_q = \alpha_{ip}\alpha_{iq} T'_{pq}.$$

Таким образом, совокупность наборов T_{ij} образует тензор второго ранга. Этот тензор называют *тензорным* (или *прямым*) *произведением* вектора $\vec{A}$ на вектор $\vec{B}$ и обозначают

$$T = \vec{A} \otimes \vec{B}. \tag{1.39}$$

Очевидные свойства прямого произведения:

– линейность по каждому сомножителю;

– некоммутативность, т.е., вообще говоря,

$$\vec{A} \otimes \vec{B} \neq \vec{B} \otimes \vec{A}.$$

Однако между произведениями $\vec{A} \otimes \vec{B}$ и $\vec{B} \otimes \vec{A}$ есть простая взаимосвязь:

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = \widetilde{\vec{B} \otimes \vec{A}}. \tag{1.40}$$

Совершенно аналогично определяется прямое произведение произвольных тензоров. Очевидно, всегда ранг результата равен сумме рангов сомножителей. Так, если T – тензор второго ранга, а D – третьего ранга, то их произведение $T \otimes D$ – тензор пятого ранга с компонентами

$$\left(T \otimes D\right)_{ijklm} = T_{ij} D_{klm}.$$

1.10. Упрощения и свертки

Операция упрощения позволяет из любого тензора ранга больше единицы приготовить тензор меньшего ранга. Рассмотрим эту операцию на примере тензора третьего ранга. Пусть нам дан тензор D третьего ранга. В каждой СК приготовим из компонент тензора D набор чисел C_i по правилу

$$C_i = D_{ijj}. \tag{1.41}$$

Сравним C_i в разных СК:

$$C_i = D_{ijj} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{js}D'_{pqs} = \alpha_{ip}\delta_{qs}D'_{pqs} = \alpha_{ip}D'_{pqq} = \alpha_{ip}C'_p.$$

Видим, что числа C_i можно интерпретировать как компоненты некоторого вектора. Этот вектор называют *упрощением тензора* D по второму и третьему индексам. Аналогично можно упростить D по первому и второму или по первому и третьему индексам. Из тензора третьего ранга можно с помощью упрощения получить три различных вектора. Точно так же производится упрощение тензоров других рангов. Всегда при этом во всех СК какая-то фиксированная пара индексов отождествляется, т.е. по ней происходит суммирование. Число свободных индексов у компонент тензора уменьшается на два, поэтому после упрощения всегда получается тензор на два ранга меньше, чем исходный.

Часто упрощение применяют к прямому произведению двух тензоров. Такая комбинированная операция получила название *свёртки* и обозначается точкой между тензорами, например, $T \cdot P$. Ранг результата равен сумме рангов тензоров минус два. При упрощении тензоров ранга больше двух нужно указывать, по какой паре индексов происходит упрощение. В случае свёртки условились, если не оговорено противное, упрощать по внутренней паре индексов, т.е. по последнему индексу первого тензора и первому индексу второго. Например, свёртка двух тензоров T и P есть тензор второго ранга $T \cdot P$, компоненты которого в любой СК подсчитываются по правилу

$$\left(T \cdot P\right)_{ij} = T_{ik} P_{kj}.$$

Здесь индексы k образуют внутреннюю пару индексов. Если исходные тензоры имели ранг >1, можно продолжать упрощение по следующей паре внутренних индексов. Результат называют двукратной свёрткой и обозначают двумя точками между тензорами. Например, двукратная свёртка двух тензоров второго ранга есть скаляр

$$T : P = T_{ij} P_{ji}.$$

Аналогично определяется трёхкратная свёртка и т.д.

Очевидно, однократная свёртка векторов совпадает со скалярным произведением и коммутативна. Однократная свёртка тензоров более высокого ранга коммутативностью не обладает, зато коммутативна двукратная свёртка двух тензоров второго ранга

$$T : P = T_{ij} P_{ji} = P_{ji} T_{ij} = P : T.$$

Ещё одно важное свойство двукратной свёртки: если тензор T (произвольно высокого ранга >1) антисимметричен по последней паре индексов, а P симметричен по первой паре индексов, то $T : P = 0$. Действительно,

$$T : P = T_{\ldots ij} P_{ji \ldots} = T_{\ldots ji} P_{ij \ldots} = -T_{\ldots ij} P_{ji \ldots} = -T : P,$$

откуда и вытекает утверждение. При доказательстве мы воспользовались возможностью менять обозначения немых индексов и свойствами симметрии T и P.

1.11. Шпур. Разложение тензора второго ранга на неприводимые

Шпуром тензора второго ранга T называют скаляр $\mathrm{Sp}(T)$, получившийся в результате упрощения тензора T. Другое название – *след* тензора T. Из определения ясно, что

$$\mathrm{Sp}(T) = T_{ii},$$

т.е. шпур равен сумме диагональных компонент.

Простейшие свойства шпура:

– шпур антисимметричного тензора равен нулю, т.к. равны нулю все диагональные элементы;

– шпур прямого произведения векторов равен скалярному произведению

$$\mathrm{Sp}\left(\vec{A} \otimes \vec{B}\right) = A_i B_i = \vec{A} \cdot \vec{B};$$

– шпур однократной свёртки тензоров второго ранга равен двукратной свёртке:

$$\mathrm{Sp}\left(T \cdot P\right) = T : P = P : T = \mathrm{Sp}\left(P \cdot T\right);$$

– шпур единичного тензора равен 3:

$$\mathrm{Sp}(g) = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

Введём два новых определения.

Тензоры, лишь коэффициентом отличающиеся от единичного, называются *шаровыми*. Шаровой тензор полностью характеризуется этим коэффициентом и поэтому имеет одну независимую компоненту.

Тензор второго ранга, имеющий нулевой шпур, называется *бесследовым тензором*. Он имеет 5 независимых компонент (почему?).

Оказывается, любой симметричный тензор можно разбить на шаровую и бесследовую части. Как обычно, предположим сначала, что это возможно.

$$
\begin{gathered}
T = \lambda g + D, \\
\tilde{T} = T, \ \mathrm{Sp} D = 0.
\end{gathered}
\tag{1.42}
$$

Отсюда получаем

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Sp}\ \mathrm{T} = \lambda \mathrm{Sp}\ g + \mathrm{Sp}\ D = 3\lambda, \\
\lambda = \frac{1}{3} \mathrm{Sp} T, \ D = T - \frac{1}{3} g \mathrm{Sp}(T).
\end{gathered}
\tag{1.43}
$$

Бесследовую часть тензора называют *девиатором* и обозначают $Dev(T)$. Таким образом,

$$
T = \frac{1}{3} g \mathrm{Sp} T + Dev(T).
$$

Вспоминая, что произвольный тензор можно разбить на симметричную и антисимметричную части, получаем разложение произвольного тензора второго ранга на три части:

$$
T = \frac{1}{3} g \mathrm{Sp} T + T^a + Dev(T). \tag{1.44}
$$

Здесь под $Dev(T)$ понимается девиатор симметричной части.

Разбиение (1.44) тензора второго ранга на шаровую, антисимметричную и бесследовую части называют *разложением тензора на неприводимые*. Так как разложение на неприводимые инвариантно (неприводимые части являются тоже тензорами), то любое тензорное уравнение второго ранга можно записать по отдельности для каждой неприводимой части. При этом уравнение для шаровых частей сведётся к приравниванию коэффициентов при g, т.е. к скалярному уравнению для шпуров.

1.12. Тензор второго ранга как аффинор

Пусть задан некоторый закон, ставящий в соответствие каждому вектору какой-то другой вектор. В этом случае говорят также, что задан *оператор*, переводящий один вектор в другой. Это записывается следующим образом:

$$
\vec{C} = L(\vec{A}), \tag{1.45}
$$

вектор $\vec{C}$ получается из вектора $\vec{A}$ под действием оператора L. В физике есть много примеров такого рода. Так, индукция электрического поля $\vec{D}$ есть функция напряжённости $\vec{E}$, намагниченность $\vec{M}$ определяется напряжённостью магнитного поля $\vec{H}$, линейная скорость $\vec{v}$ точки движущегося тела выражается через радиус-вектор этой точки $\vec{R}$ и т.д.

Часто бывает так, что оператор L – линейный, т.е.

$$L(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B})=\alpha L(\vec{A})+\beta L(\vec{B}).$$

В этом случае он называется *аффинором.* Если L – аффинор, то в каждой СК связь $\vec{C}=L(\vec{A})$ выразится в виде линейных соотношений между компонентами $\vec{C}$ и $\vec{A}$:

$$C_i = T_{ij}A_j. \tag{1.46}$$

Коэффициенты T_{ij} являются *представителем аффинора* в данной СК. В другой СК тот же аффинор будет представлен другими коэффициентами. Поступая так же, как в п. 1.6, можем заключить, что коэффициенты T_{ij} образуют некоторый тензор второго ранга. Тогда связь (1.46) может быть записана в виде

$$\vec{C}=T\cdot\vec{A}.$$

Таким образом, любой аффинор определяет некоторый тензор второго ранга, и обратно, любой тензор второго ранга можно рассматривать как аффинор, так как свёртка тензора с вектором даёт новый вектор, причём эта свёртка удовлетворяет условию линейности.

1.13. Оператор проектирования

Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор, т.е. $n^2=1$. Составим с помощью $\vec{n}$ тензор второго ранга

$$T=\vec{n}\otimes\vec{n}$$

и будем его рассматривать как аффинор. К чему сводится действие такого аффинора на вектор?

$$\vec{C} = T \cdot \vec{A} = (\vec{n} \otimes \vec{n}) \cdot \vec{A} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{A}).$$

Но $\vec{n} \cdot \vec{A}$ есть проекция вектора $\vec{A}$ на направление $\vec{n}$, так что вектор $\vec{C}$ направлен вдоль $\vec{n}$ и имеет величину, равную проекции $\vec{A}$ на $\vec{n}$. Аффинор, ставящий в соответствие любому вектору его составляющую вдоль заданного направления, называется *проектором* на это направление. Таким образом, проектор на любое направление может быть записан как прямое произведение единичного вектора, ориентированного вдоль этого направления, на самого себя.

1.14. Собственные числа и собственные векторы аффинора

Рассмотрим аффинор, задаваемый симметричным тензором второго ранга T. Под его действием любой вектор, вообще говоря, поворачивается и изменяет длину:

$$T \cdot \vec{A} = \vec{B}.$$

Но при специальном выборе вектора $\vec{A}$ может оказаться, что новый вектор коллинеарен исходному:

$$T \cdot \vec{A} = \lambda \vec{A}. \tag{1.47}$$

В этом случае вектор $\vec{A}$ называют *собственным вектором* тензора T, а число λ, показывающее, как изменилась длина (и, возможно, направление) собственного вектора под действием T, называется *собственным числом*. Задача (1.47) всегда имеет тривиальное решение $\vec{A} = 0$, однако в контексте собственных векторов интерес представляют только нетривиальные решения.

Собственный вектор определён лишь с точностью до постоянного множителя. Действительно, пусть $\vec{A}$ – собственный вектор. Возьмём $\vec{B} = \alpha \vec{A}$. Тогда

$$T \cdot \vec{B} = \alpha T \cdot \vec{A} = \alpha \lambda \vec{A} = \lambda \vec{B},$$

т.е. $\vec{B}$ – тоже собственный вектор и ему соответствует то же самое собственное число.

Может оказаться так, что одному собственному числу соответствует несколько независимых собственных векторов. В этом случае говорят, что собственное число *вырождено*. Пусть λ – вырождено, и $\vec{A}$, $\vec{B}$ – независимые собственные векторы. Любая их линейная комбинация тоже будет собственным вектором. Пусть

$$\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}.$$

Тогда

$$T \cdot \vec{C} = T \cdot (\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}) = \alpha T \cdot \vec{A} + \beta T \cdot \vec{B} =$$
$$= \alpha\lambda\vec{A} + \beta\lambda\vec{B} = \lambda(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}) = \lambda\vec{C},$$

что и требовалось.

Собственные числа произвольного тензора, вообще говоря, комплексны. Покажем, что у симметричного тензора все собственные числа вещественны. Предположим противное. Запишем задачу (1.47) в индексной форме

$$T_{ij} A_j = \lambda A_i. \tag{1.48}$$

Умножим (1.48) на A_i^*, где звёздочка означает комплексное сопряжение,

$$T_{ij} A_j A_i^* = \lambda A_i A_i^*. \tag{1.49}$$

Применим к (1.49) комплексное сопряжение

$$T_{ij} A_j^* A_i = \lambda^* A_i^* A_i. \tag{1.50}$$

Переобозначим теперь слева немые индексы $i \rightleftarrows j$ и воспользуемся симметрией тензора *T*:

$$T_{ji} A_i^* A_j = \lambda^* A_i A_i^*. \tag{1.51}$$

Вычтем, наконец, из (1.49) уравнение (1.51)

$$(\lambda - \lambda^*) A_i A_i^* = 0. \tag{1.52}$$

Число $A_i A_i^*$ равно сумме квадратов модулей компонент вектора $\vec{A}$, поэтому $A_i A_i^* \neq 0$. Сократив в (1.52), получим

$$\lambda - \lambda^* = 0, \tag{1.53}$$

т.е. мнимая часть λ равна нулю, λ вещественно, что и требовалось доказать. Как видно из (1.48), компоненты вектора $\vec{A}$ являются решением системы алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, и следовательно, могут быть выбраны вещественными.

Физически важен ещё один тип тензоров, собственные значения которых всегда вещественны, несмотря на то что сам тензор – не обязательно является вещественным и симметричным. Таким свойством обладают *эрмитовы матрицы* – матрицы, которые совпадают сами с собой при *эрмитовом сопряжении* – применении операции транспонирования и комплексного сопряжения в любой последовательности:

$$T^\dagger = (\tilde{T})^* = \widetilde{T^*} = T.$$

Такая особенность эрмитовых матриц нашла отражение в их широком применении для задания операторов различных физических величин – например, энергии, компонент спина или углового момента, – в квантовой теории.

Следующее важное свойство задачи на собственные значения – ортогональность собственных векторов. Пусть λ и $\varkappa$ – различные собственные числа тензора *T*, им соответствуют собственные векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$, т.е.

$$T_{ij} A_j = \lambda A_i, \tag{1.54}$$

$$T_{ij} B_j = \varkappa B_i. \tag{1.55}$$

Умножив (1.54) на B_i, (1.55) на A_i и поступая аналогично (1.49) –(1.52), получим

$$(\lambda - \varkappa) A_i B_i = 0. \tag{1.56}$$

По условию, $\lambda \neq \varkappa$, следовательно,

$$A_i B_i = \vec{A} \cdot \vec{B} = 0, \tag{1.57}$$

т.е. собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны. В случае вырождения независимые собственные векторы, соответствующие данному собственному числу, не обязаны быть ортогональными. В случае двукратного вырождения можно брать любые линейные комбинации двух собственных векторов, т.е. собственные векторы образуют целую плоскость. В ней всегда можно выбрать пару ортогональных векторов, чему отвечает бесконечное множество таких пар. В случае трёхкратного вырождения возможность взять любую комбинацию собственных векторов означает, что вообще любой вектор является собственным и, значит, можно взять любую тройку взаимно ортогональных векторов.

Удобно также, пользуясь произволом в выборе численного множителя, сделать все собственные векторы единичными. Занумеровав как-либо собственные векторы (номер будем писать вверху, чтобы не путать с тензорными индексами), можно резюмировать всё вышесказанное в короткой формуле

$$\vec{A}^p \vec{A}^q = \delta_{pq}. \tag{1.58}$$

Иными словами, собственные векторы образуют *ортонормированную систему*.

Ортогональность собственных векторов даёт возможность выбрать декартову СК, в которой оси направлены вдоль собственных векторов. Такая СК называется *главной* СК данного тензора. Выпишем в главной СК компоненты собственных векторов. Занумеруем оси в том же порядке, что и векторы. Тогда у каждого собственного вектора будет отлична от нуля лишь одна компонента, номер которой совпадает с номером вектора, т.е.

$$A_i^p = \delta_{pi}. \tag{1.59}$$

Подставляя (1.59) в (1.48), получим (без суммирования по p!)

$$T_{ij} A_j^p = \lambda^p A_i^p, \quad T_{ij} \delta_{jp} = \lambda^p \delta_{ip}, \quad T_{ip} = \lambda^p \delta_{ip}. \tag{1.60}$$

Таким образом, в главной СК отличны от нуля лишь диагональные компоненты, и они равны собственным числам тензора. По этой причине процедура нахождения собственных чисел и векторов часто называется *диагонализацией* матрицы.

Кратко можно описать основной способ решения задачи на собственные значения. Из (1.48) следует, что компоненты собственного вектора удовлетворяют системе однородных линейных алгебраических уравнений:

$$(\mathrm{T}_{ij} - \lambda\delta_{ij})A_j = 0. \tag{1.61}$$

Условием существования нетривиального решения такой системы является равенство нулю её определителя:

$$\det(\mathrm{T}_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0. \tag{1.62}$$

Условие (1.62) следует рассматривать как уравнение для нахождения собственных чисел λ. Запишем его в развёрнутой форме:

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1.63}$$

Раскрывая этот определитель, получим кубическое уравнение

$$J_0 + J_1\lambda + J_2\lambda^2 - \lambda^3 = 0, \tag{1.64}$$

где коэффициенты J_1, J_2, J_3 выражаются через компоненты тензора T_{ij}. Корни уравнения (1.64) и являются собственными числами тензора.

Теперь можно вернуться к системе (1.61) и, подставляя в неё поочерёдно собственные числа, найти соответствующие собственные векторы.

1.16. Псевдотензоры

Введём одно вспомогательное понятие. *Символом Ле́ви-Чиви́ты* e_{ijk} называется трёхиндексная величина, в зависимости от значений индексов принимающая значения 0, 1 и –1 по следующему правилу:

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } i, j, k \text{ - чётная перестановка чисел } 1,2,3 \\ -1, & \text{если } i, j, k \text{ - нечётная перестановка чисел } 1,2,3 \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad (1.65)$$

т.е.

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, \qquad e_{321} = e_{213} = e_{132} = -1,$$

а все остальные комбинации индексов дают 0. Из определения символа Леви-Чивиты вытекают его свойства:

– он антисимметричен по любой паре индексов;

– e_{ijk} не изменяется при циклической перестановке индексов.

Рассмотрим некоторые суммы, содержащие e_{ijk}. Начнём с суммы $e_{ijk}e_{pqk} = T_{ijpq}$. Отличный от нуля результат получается лишь, если $i \neq j$. Тогда в сумме по k присутствует лишь одно слагаемое: $k \neq i, \ k \neq j$. Но это значит, что p, q – та же двойка чисел, что и i, j. Поэтому либо $i = p, \ j = q$, либо $i = q, \ j = p$. В первом случае $T_{ijpq} = 1$, во втором случае $T_{ijpq} = -1$, т.к. e_{pqk} отличается от e_{ijk} перестановкой первых индексов. Таким образом, получается:

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}. \qquad (1.66)$$

Другую сумму получим, отождествляя в (1.66) индексы j и q:

$$e_{ijk}e_{pjk} = \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}. \qquad (1.67)$$

Наконец,

$$e_{ijk}e_{ijk} = 6. \qquad (1.68)$$

С помощью символа Леви-Чивиты удобно записывать правило вычисления определителей для матриц третьего порядка. Для произвольной матрицы T_{ij}:

$$e_{ijk}\det(T_{ij}) = e_{pqs}T_{ip}T_{jq}T_{ks}. \tag{1.69}$$

Теперь проверим, не найдётся ли такой тензор третьего ранга, компоненты которого совпадают во всех СК с e_{ijk}. Пусть G – тензор третьего ранга и в некоторой СК

$$G_{ijk} = e_{ijk}.$$

Вычислим компоненты G в других СК:

$$G'_{ijk} = \alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{sk}e_{pqs}.$$

По формуле (1.69) получаем

$$G'_{ijk} = e_{ijk}\det(\alpha_{pq}) = e_{ijk}\cdot\Delta. \tag{1.70}$$

Итак, в новой СК уже $G'_{ijk} \neq e_{ijk}$, если $\Delta \neq 1$, т.е. не существует тензора с инвариантными компонентами, равными e_{ijk}. Однако инвариантность можно спасти, изменив закон преобразования, внеся в него множитель Δ. Такие совокупности наборов чисел, для которых закон преобразования компонент отличается от тензорного множителем Δ, называются *псевдотензорами*. Например, псевдоскаляры преобразуются по закону

$$\varphi = \Delta\cdot\varphi',$$

компоненты псевдовектора – по закону

$$A_i = \Delta\cdot\alpha_{ij}A'_j, \quad A'_i = \Delta\cdot\alpha_{ji}A_j \tag{1.71}$$

и т.д.

Псевдотензоры отличаются от тензоров лишь поведением при несобственных преобразованиях СК, однако это отличие принципиально, оно резко отделяет тензоры от псевдотензоров. Складывать тензор и псевдотензор так же нелепо, как к скорости прибавлять температуру. Однако мы можем строить прямые произведения и свёртки тензоров и псевдотензоров. Тип результата определяется простым правилом: если псевдотензоры содержатся в данном произведении нечётное число раз, то результат – псевдотензор, в противном случае – тензор. Это является следствием того факта, что всегда $\Delta^2 = 1$.

Возвращаясь к символу Леви-Чивиты, мы можем построить псевдотензор – так называемый *псевдотензор Леви-Чивиты*, который принято обозначать буквой ε. Действительно, если в некоторой СК $\varepsilon_{ijk} = e_{ijk}$, то

$$\varepsilon'_{ijk} = \Delta \cdot \alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{sk}e_{pqs} = \Delta^2 e_{ijk} = e_{ijk}.$$

1.17. Соотношения дуальности

Кроме тензоров, у нас появились ещё и псевдотензоры. Казалось бы, они ничем не хуже тензоров и должны использоваться в физике наравне с последними. Однако тензоры в физике встречаются гораздо чаще. В чём причина? По-видимому, их несколько. Во-первых, наличие радиус-вектора, который является вектором, а не псевдовектором, просто потому, что мы понятие вектора вводили, фактически оглядываясь на радиус-вектор, поэтому в механике, где большую роль играют связанные с радиус-вектором понятия скорости, ускорения, а через уравнения Ньютона – и силы, преобладают истинные тензоры. Исключение составляют лишь момент импульса, момент силы и угловая скорость – всё это псевдовекторы. Если же обратиться к классической электродинамике, то принято считать, что заряд является скаляром, напряжённость электрического поля – вектором, напряжённость магнитного – псевдовектором. Однако во всём, что касается сравнения с экспериментом, ровно ничего не изменится, если считать заряд псевдоскаляром, электрическое поле – псевдовектором, а магнитное – истинным вектором. Так что в какой-то мере, что считать вектором, а что псевдовектором, – вопрос условный.

Почему же всё-таки псевдовекторы оказались в привилегированном положении по сравнению с другими псевдотензорами? По крайней мере в рамках механики. Ответ на этот вопрос дают *соотношения дуальности*.

Если свернуть дважды псевдотензор Леви-Чивиты ε и истинный тензор T, то получим псевдовектор

$$\vec{C} = \varepsilon : T. \tag{1.72}$$

Можно ли разрешить (1.72) относительно T? В общем случае нет, так как тензор T имеет 9 независимых компонент, а псевдовектор $\vec{C}$ – всего 3. Можно даже понять, где теряется информация при переходе от T к $\vec{C}$. Для этого разобьём T на симметричную и антисимметричную части:

$$T = T^s + T^a, \quad \vec{C} = \cancel{\varepsilon : T^s} + \varepsilon : T^a.$$

В $\vec{C}$, таким образом, переходит информация лишь об антисимметричной части T. Значит, с другой стороны, если T антисимметричен, соотношение (1.72) – разрешимо. Запишем (1.72) в индексной записи:

$$C_i = e_{ijk} T_{jk}. \tag{1.73}$$

Умножим (1.73) на e_{ipq}. Воспользовавшись формулой (1.67), получим

$$e_{ipq} C_i = T_{pq} - T_{qp} = 2T_{pq},$$

т.е.

$$T_{pq} = \frac{1}{2} e_{ipq} C_i. \tag{1.74}$$

Запишем (1.74) в инвариантном виде вместе с (1.72):

$$\vec{C} = \varepsilon : T, \qquad T = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \vec{C}. \tag{1.75}$$

Формулы (1.75) и являются *соотношениями дуальности.* Они показывают, что каждому антисимметричному тензору второго ранга соответствует псевдовектор и обратно, по псевдовектору можно восстановить антисимметричный тензор. Иными словами, соотношения дуальности устанавливают взаимно-однозначное соответствие между множествами всех антисимметричных тензоров и всех псевдовекторов. Эти множества совершенно, таким образом, эквивалентны. Каким из них пользоваться – вопрос удобства, поэтому можно переписать, например, всю механику так, чтобы изгнать псевдовекторы, и их место займут антисимметричные тензоры.

В заключение параграфа укажем связь компонент T и $\vec{C}$:

$$C_1 = 2T_{23},\ C_2 = 2T_{31},\ C_3 = 2T_{12},$$
$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & C_3/2 & -C_2/2 \\ -C_3/2 & 0 & C_1/2 \\ C_2/2 & -C_1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.76}$$

1.18. Векторное произведение

Тензорное произведение двух векторов, как и всякий тензор второго ранга, можно разложить на неприводимые. Антисимметричную часть может оказаться удобным представить через дуальный ей псевдовектор. Псевдовектор, дуальный антисимметричной части прямого произведения, называют *векторным произведением*. Обозначение – $\vec{A}\times\vec{B}$ или $[\vec{A},\vec{B}]$.

В соответствии с определением:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \varepsilon : (\vec{A}\otimes\vec{B}), \tag{1.77}$$

или в индексной форме:

$$(\vec{A}\times\vec{B})_i = e_{ijk}A_jB_k. \tag{1.78}$$

Из этого произведения легко получим все свойства векторного произведения:

– антикоммутативность:

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A};$$

– ортогональность к сомножителям:

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0;$$

– двойное векторное произведение:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

Докажем последнюю формулу:

$$\left(\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})\right)_i = e_{ijk} A_j e_{pqk} B_p C_q = A_j B_i C_j - A_j B_j C_i =$$

$$= B_i \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - C_i \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

2. ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

2.1. Тензорные поля

Выше рассматривались тензоры, заданные в одной и той же точке пространства. Однако в приложениях актуально рассматривать тензоры, зависящие от координат. Когда каждой точке пространства из некоторой области поставлен в соответствие некоторый тензор, компоненты которого изменяются как функции координат, то говорят, что задано *тензорное поле*. В физике имеются многочисленные примеры тензорных полей. Так, тензорные поля нулевого ранга, *скалярные поля* – это, например, поле температуры, давления, скалярного потенциала, плотности массы, заряда, энергии и т.д. *Векторные поля* – поле скоростей газа, напряжённость электрического поля, векторный потенциал магнитного поля и т.д. *Псевдовекторное поле* – напряжённость магнитного поля. Наконец, тензорные поля второго ранга: тензоры упругих напряжений, деформации сплошной среды, скоростей деформации, диэлектрической или магнитной проницаемости, электропроводности.

Все те операции, которые были изучены в разделе тензорной алгебре, можно применять и к тензорным полям, имея в виду совершение каждой операции одновременно во всех точках задания поля. Но наряду с ними появляются и новые операции, связанные со сравнением тензоров, заданных в разных точках. Иными словами, необходимо определить дифференциальные и интегральные операции над тензорными полями.

2.2. Оператор набла

Прежде чем дифференцировать, нужно просто научиться сравнивать тензоры, заданные в разных точках. Поскольку мы умеем сравнивать тензоры в одной точке, естественно сначала совместить тензоры в одной точке с помощью *параллельного переноса*. Что это значит – перенести параллельно самому себе? Чрезвычайно сложная в общем случае, в декартовых СК эта проблема решается просто – нужно перенести вектор с сохранением значений всех компонент. Теперь можно определить производную от тензорного поля по координате, например,

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1}.$$

Можно вычислить производную в каждой точке поля, однако эта производная сама тензорного поля не образует. По понятной причине – при переходе к другой СК – производная $\partial / \partial x_1$ преобразуется, причём оказываются втянутыми и другие координаты. Поэтому нужно рассматривать совместно производные по всем координатам. Рассмотрим в каждой СК набор операторов частного дифференцирования по координатам

$$\frac{\partial}{\partial x_i},$$

или в более компактном представлении

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Эти операторы могут действовать на различные числовые функции координат в данной СК.

Посмотрим, как преобразуются наборы ∇_i при переходе из одной в другую СК. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{2.1}$$

Производную $\partial x_j / \partial x'_i$ вычислим, используя закон преобразования координат

$$x_j = \alpha_{ij} x'_i,$$

поэтому $\partial x_j / \partial x'_i = \alpha_{ij}$. Подставляя в (2.1), получаем

$$\nabla'_i = \alpha_{ji} \nabla_i \tag{2.2}$$

и аналогично:

$$\nabla_i = \alpha_{ij} \nabla'_j. \tag{2.3}$$

Формулы (2.2), (2.3) очень похожи на формулы преобразования компонент вектора. По аналогии с векторами определим *инвариантный оператор дифференцирования* ∇ (читается «набла») как совокупность наборов операторов частного дифференцирования во всех СК. Формулы (2.2), (2.3) показывают, что оператор набла имеет векторную природу, поэтому образование прямых произведений и свёрток оператора ∇ с тензорными полями автоматически будет приводить к новым тензорным полям.

2.3. Градиент

Изучим действие оператора ∇ на скалярное поле. Пусть дано поле φ. Под действием оператора ∇ оно превращается в векторное поле

$$\nabla\varphi,$$

которое называется полем *градиента* скаляра φ. Компоненты этого поля

$$(\nabla\varphi)_i = \nabla_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.$$

Простейшие свойства градиента:

– *производная скалярного поля по некоторому направлению* даётся формулой

$$\vec{n}\cdot\nabla\varphi = n_i\nabla_i\varphi. \tag{2.4}$$

Для доказательства достаточно рассмотреть СК, у которой одна из осей направлена вдоль $\vec{n}$;

– градиент ортогонален к *поверхностям уровня*, т.е. к поверхностям, на которых скаляр φ сохраняет постоянное значение; это свойство сразу вытекает из предыдущего, так как производная вдоль любой касательной к поверхности уровня должна обратиться в нуль;

– градиент направлен в сторону наискорейшего возрастания функции; с точностью до неопределённости знака это свойство вытекает из предыдущего, знак же очевиден.

Вычислим градиенты для общего вида некоторых часто встречающихся полей.

1. Градиент модуля радиус-вектора r:

$$\nabla_i r = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_j x_j} = \frac{2x_j\delta_{ij}}{2r} = \frac{x_i}{r}.$$

Здесь использована очевидная формула

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}. \tag{2.5}$$

Полученную формулу

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \tag{2.6}$$

полезно помнить наизусть, так как она часто бывает нужна. В векторном виде получаем

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}. \tag{2.7}$$

2. Градиент центрально-симметричного скалярного поля

$$\varphi = \varphi(r).$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\nabla\varphi(r) = \varphi'\nabla r = \varphi'\frac{\vec{r}}{r}. \tag{2.8}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по r и использована формула (2.7).

3. Градиент поля $\varphi(\vec{r}) = \vec{n}\cdot\vec{r}$,

$$\begin{gathered}\nabla_i\varphi = \nabla_i n_j x_j = n_j\delta_{ij} = n_i,\\ \nabla(\vec{n}\cdot\vec{r}) = \vec{n}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

2.4. Действие оператора набла на векторное поле

Самое общее, что можно сделать из двух векторов с сохранением свойств линейности по каждому сомножителю – это вычислить их тензорное произведение. Поэтому и действие оператора ∇ на векторное поле $\vec{A}$ можно начать изучать с их произведения Кронекера, которое является тензорным полем второго ранга:

$$\nabla \otimes \vec{A}$$

с компонентами

$$(\nabla \otimes \vec{A})_{ij} = \nabla_i A_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}.$$

Разложим этот тензор на неприводимые части и рассмотрим их по отдельности.

Девиаторная часть такого тензора применяется редко, поэтому её рассмотрение лежит за рамками данного пособия. Что касается шаровой и антисимметричной частей, то они используются весьма часто, и им посвящён следующий параграф.

2.5. Операции дивергенции и ротора

Шаровая часть тензора полностью определяется его шпуром, поэтому выпишем сразу шпур

$$\mathrm{Sp}(\nabla \otimes \vec{A}) = \nabla \cdot \vec{A} = \nabla_i A_i.$$

Это скалярное поле имеет специальное название – *дивергенция* поля $\vec{A}$ и специальное обозначение

$$\mathrm{div}\,\vec{A}.$$

Итак,

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \nabla_i A_i. \tag{2.10}$$

Вычислим дивергенцию некоторых полей.

1. Дивергенция центрально-симметричного векторного поля $\vec{A} = f(r)\vec{r}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\vec{A} &= \nabla_i (f\,x_i) = \nabla_i f \cdot x_i + f \nabla_i x_i = \\ &= f' \frac{x_i}{r} x_i + f \delta_{ii} = rf' + 3f = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^3 f). \end{aligned} \tag{2.11}$$

2. Частный случай – кулоновское поле:

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

По формуле (2.11) получаем

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2}\left(r^3\frac{1}{r^3}\right)' = 0. \tag{2.12}$$

Кулоновское поле имеет особенность при $r = 0$, поэтому полученный результат годится всюду, кроме начала координат. Мы ещё вернёмся к обсуждению этого примера в п. 2.10.

Перейдём к обсуждению антисимметричной части поля $\nabla \otimes \vec{A}$. Как обычно, вместо антисимметричного тензора рассматривают дуальный ему псевдовектор. В нашем случае мы получаем псевдовекторное поле, которое называют *ротором* поля и обозначают $\operatorname{rot}\vec{A}$. По формулам дуальности (1.75) имеем

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \varepsilon : (\nabla \otimes \vec{A}), \tag{2.13}$$

или, в индексной записи,

$$(\operatorname{rot}\vec{A})_i = e_{ijk}\nabla_j A_k. \tag{2.14}$$

Вычислим ротор некоторых полей.

1. Ротор центрально-симметричного векторного поля

$$\operatorname{rot}_i(f(r)\vec{r}) = e_{ijk}\nabla_j(f\,x_k) = \mathrm{e}_{ijk}\,x_k\nabla_j f + e_{ijk} f \nabla_j x_k =$$
$$= e_{ijk}x_k x_j\frac{f'}{r} + e_{ijk} f \delta_{jk} = 0.$$

Получился нуль, так как в обоих слагаемых последнего выражения имеется двукратная свёртка антисимметричного символа Леви-Чивиты с симметричной комбинацией $x_k x_j$ в первом слагаемом и δ_{jk} во втором.

2. Ротор поля скорости $\vec{v}$, соответствующего твердотельному вращению с угловой скоростью $\vec{\omega}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

$$\mathrm{rot}_i\, \vec{v} = e_{ijk} \nabla_j e_{pqk} \omega_p x_q = 2\delta_{ip}\omega_p = 2\omega_i,$$

$$\mathrm{rot}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\omega}.$$

2.6. Дифференциальные операции второго порядка

К тензорным полям, получившимся в результате действия оператора набла, можно снова применить этот оператор. Рассмотрим получающиеся здесь варианты.

Пусть исходное поле φ – скалярное. Все, что можно из него приготовить однократным применением оператора набла – это векторное поле градиента. Рассмотрим дивергенцию получившегося поля

$$\mathrm{div} \nabla \varphi = \nabla_i \nabla_i \varphi. \tag{2.15}$$

В результате получается новое скалярное поле, для которого есть специальное обозначение

$$\mathrm{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi. \tag{2.16}$$

Оператор Δ называют *лапласианом* или *оператором Лапласа*.

Вычислим лапласиан центрально-симметричного поля $\varphi = \varphi(r)$:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \mathrm{div} \nabla \varphi = \mathrm{div}\left(\varphi' \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^3 \frac{\varphi'}{r} \right) = \\ = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Например,

$$\Delta r = \frac{2}{r}, \quad \Delta r^2 = 6, \quad \Delta \frac{1}{r} = 0.$$

Вычислим лапласиан осесимметричного поля, т.е. поля, не меняющегося при поворотах вокруг некоторой оси. Направим вдоль оси симметрии единичный вектор $\vec{n}$ и выберем начало координат в какой-то точке этой оси. В качестве переменных, от которых зависит поле φ, обычно выбирают r и угол ϑ между $\vec{r}$ и $\vec{n}$. Тогда $\varphi = \varphi(r, \vartheta)$,

$$\Delta\varphi = \nabla_i \nabla_i \varphi = \nabla_i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \nabla_i r + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \nabla_i \vartheta \right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} \nabla_i r \nabla_i r +$$
$$+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\vartheta} \nabla_i \vartheta \nabla_i r + \frac{\partial\varphi}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2} \nabla_i \vartheta \nabla_i \vartheta + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \Delta\vartheta. \tag{2.18}$$

Мы уже вычислили $\nabla_i r = x_i / r$. Для вычисления $\nabla_i \vartheta$ заметим, что по определению угла между векторами

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{r} = \frac{n_j x_j}{r},$$

откуда

$$-\sin\vartheta\, \nabla_i \vartheta = \nabla_i \frac{n_j x_j}{r} = \frac{n_j \delta_{ij}}{r} - \frac{n_j x_j x_i}{r^3} = \frac{n_i}{r} - \frac{x_i \cos\vartheta}{r^2},$$

или

$$\nabla_i \vartheta = \operatorname{ctg}\vartheta \frac{x_i}{r^2} - \frac{n_i}{r\sin\vartheta}. \tag{2.19}$$

Заметим, что $x_i \nabla_i \vartheta = \operatorname{ctg}\vartheta - \operatorname{ctg}\vartheta = 0$ и $\nabla_i \vartheta\, \nabla_i \vartheta = 1/r^2$. Подставляя (2.19) в (2.18), получим

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}, \tag{2.20}$$

или в более удобной форме

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \right). \tag{2.21}$$

Иногда более удобны не переменные r, ϑ, а r и проекция $\vec{r}$ на $\vec{n}$, $\vec{r}\cdot\vec{n} = z$. Вычислим последовательно:

$$\nabla_i z = \nabla_i (n_j x_j) = n_i,$$
$$\nabla_i \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \nabla_i r + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \nabla_i z = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{x_i}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} n_i, \tag{2.22}$$
$$\Delta\varphi = \nabla_i \nabla_i \varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + 2\frac{z}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Рассмотрим теперь ротор градиента

$$(\mathrm{rot}\nabla\varphi)_i = e_{ijk}\nabla_j\nabla_k\varphi = 0,$$

так как смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования и, следовательно, $\nabla_j\nabla_k\varphi = \nabla_k\nabla_j\varphi$. Итак, ротор градиента всегда равен нулю,

$$\mathrm{rot}\nabla\varphi = 0. \tag{2.23}$$

Возьмём теперь в качестве исходного векторное поле $\vec{A}$. Если применить к нему дивергенцию, то из получившегося скалярного поля, используя ∇, получаем опять векторное поле $\nabla\,\mathrm{div}\,\vec{A}$.

Если взять ротор поля $\vec{A}$, то к получившемуся псевдовекторному полю можно применять как rot, так и div. Начнём с дивергенции.

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla_i(\mathrm{rot}\,\vec{A})_i = \nabla_i e_{ijk}\nabla_j A_k = e_{ijk}\nabla_i\nabla_j A_k = 0,$$

снова из-за симметрии $\nabla_i\nabla_j = \nabla_j\nabla_i$. Таким образом, всегда

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0. \tag{2.24}$$

Рассмотрим теперь ротор ротора

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A})_i = e_{ijk}\nabla_j(\mathrm{rot}\,\vec{A})_k = e_{ijk}\nabla_j e_{pqk}\nabla_p A_q = \\ = \nabla_j\nabla_i A_j - \nabla_j\nabla_j A_i,$$

или, в безиндексной форме,

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}. \tag{2.25}$$

Как и должно быть, двойной ротор, т.е. операция, дважды содержащая псевдотензор Леви-Чивиты, выразилась через операции, никаких псевдотензоров не содержащие.

Резюмируя, составим небольшую таблицу операций второго порядка:

Дифференциальные операции второго порядка
над скалярными и векторными полями

Поле	Первый порядок	Второй порядок
φ	$\nabla\varphi$	$\operatorname{div}\nabla\varphi = \Delta\varphi$
		$\operatorname{rot}\nabla\varphi = 0$
$\vec{A}$	$\operatorname{div}\vec{A}$	$\nabla\operatorname{div}\vec{A}$
	$\operatorname{rot}\vec{A}$	$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$
		$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$

2.7. Потенциальные поля. Скалярный потенциал

Поля, ротор которых равен нулю, называются *безвихревыми*. В предыдущем параграфе было показано, что градиент любого скалярного поля является безвихревым. Убедимся в справедливости обратного утверждения – любое безвихревое поле является градиентом некоторого скалярного поля.

Пусть $\vec{A}$ – безвихревое поле, т.е.

$$\operatorname{rot}\vec{A} = 0,$$

или, в индексной форме,

$$e_{ijk}\nabla_j A_k = 0. \tag{2.26}$$

В формуле (2.26) придадим индексам конкретные значения

$$\nabla_2 A_3 - \nabla_3 A_2 = 0, \tag{2.27}$$

$$\nabla_3 A_1 - \nabla_1 A_3 = 0, \tag{2.28}$$

$$\nabla_1 A_2 - \nabla_2 A_1 = 0. \tag{2.29}$$

Фактически здесь выписаны компоненты антисимметричной части тензора $\nabla\otimes\vec{A}$. Соотношения (2.27)–(2.29) представляют собой систему уравнений в частных производных первого порядка для трёх функций A_1, A_2 и A_3. Наша цель – найти общее решение этой системы уравнений.

Проинтегрируем по x_1 уравнение (2.29)

$$A_2 = \int \nabla_2 A_1 dx_1 = \nabla_2 \int A_1 dx_1. \tag{2.30}$$

Введём обозначение

$$\chi = \int A_1 dx_1. \tag{2.31}$$

Тогда (2.30) запишется в виде

$$A_2 = \nabla_2 \chi, \tag{2.32}$$

а из (2.31) следует, что

$$A_1 = \nabla_1 \chi, \tag{2.33}$$

т.е. общее решение уравнения (2.29) даётся формулами (2.32), (2.33), содержащими произвольную функцию χ. Подставляя A_1 и A_2 в (2.28), получим

$$A_3 = \int \nabla_3 A_1 dx_1 = \nabla_3 \int A_1 dx_1 = \nabla_3 \chi. \tag{2.34}$$

Наконец, (2.27) даёт

$$\nabla_2 \nabla_3 \chi = \nabla_3 \nabla_2 \chi, \tag{2.35}$$

но это тождество. Таким образом, общее решение уравнения

$$\operatorname{rot} \vec{A} = 0$$

имеет вид

$$\vec{A} = \nabla \chi, \tag{2.36}$$

где χ – произвольная функция. Иными словами, для любого безвихревого поля $\vec{A}$ существует такое скалярное поле χ, что выполняется (2.36). Это поле χ называют *скалярным потенциалом* поля $\vec{A}$, поэтому безвихревое поле называют ещё *потенциальным*.

Для заданного безвихревого поля $\vec{A}$ потенциал определён неоднозначно. Возьмём два потенциала χ_I и χ_{II} одного и того же поля $\vec{A}$, т.е.

$$\vec{A} = \nabla \chi_I, \qquad \vec{A} = \nabla \chi_{II}.$$

Вычитая из первого выражения второе, получим

$$\nabla(\chi_I - \chi_{II}) = 0,$$

но это означает, что

$$\chi_I - \chi_{II} = \mathrm{const}.$$

Таким образом, скалярный потенциал определён с точностью до константы.

2.8. Соленоидальные поля. Векторный потенциал

Векторные поля, дивергенция которых равна нулю, называют *соленоидальными*. Найдём общий вид таких полей, т.е. найдём общее решение уравнения

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0. \tag{2.37}$$

Распишем подробнее уравнение (2.37):

$$\nabla_1 A_1 + \nabla_2 A_2 + \nabla_3 A_3 = 0. \tag{2.38}$$

Введём функции φ и ψ соотношениями

$$A_2 = -\nabla_1 \varphi, \quad A_3 = \nabla_1 \psi. \tag{2.39}$$

Такие φ и ψ существуют, если только существуют интегралы по x_1 от A_2 и A_3. Заметим, что для заданных A_2, A_3 соотношение (2.39) определяет φ и ψ с точностью до произвольных функций от x_2 и x_3. Подставляя (2.39) в (2.38), получим

$$\nabla_1(\mathrm{A}_1 - \nabla_2 \varphi + \nabla_3 \psi) = 0,$$

т.е.

$$A_1 - \nabla_2 \varphi + \nabla_3 \psi = \mathrm{const}(x_1).$$

Пользуясь произволом в φ и ψ, можно изгнать константу из правой части. Следовательно,

$$A_1 = \nabla_2 \varphi - \nabla_3 \psi. \qquad (2.40)$$

Формулы (2.39), (2.40) дают общее решение уравнения (2.37). Удобно придать им более симметричную форму. Для этого запишем φ и ψ в виде $\varphi = \overline{\varphi} + u$, $\psi = \overline{\psi} + v$,

$$\nabla_2 u + \nabla_3 v = 0,$$

откуда

$$u = \nabla_3 \chi, \quad v = \nabla_2 \chi.$$

Тогда

$$A_2 = -\nabla_1 \overline{\varphi} - \nabla_3 \nabla_1 \chi,$$
$$A_3 = \nabla_1 \overline{\psi} - \nabla_2 \nabla_1 \chi.$$

Наконец, обозначим

$$B_1 = -\overline{\varphi},\ B_2 = \overline{\psi},\ B_3 = -\nabla_1 \chi.$$

Тогда

$$A_1 = \nabla_3 B_2 - \nabla_2 B_3,$$
$$A_2 = \nabla_3 B_1 - \nabla_1 B_3,$$
$$A_3 = \nabla_1 B_2 - \nabla_2 B_1,$$

или, короче,

$$\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}.$$

Таким образом, каждое соленоидальное поле $\vec{A}$ может быть представлено в виде ротора некоторого другого поля, которое в этом случае называют *векторным потенциалом* поля $\vec{A}$.

Рассмотрим вопрос о степени произвола при выборе векторного потенциала. Пусть $\vec{B}_I$ и $\vec{B}_{II}$ – два разных векторных потенциала одного и того же поля $\vec{A}$. Тогда их разность удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}(\vec{B}_I - \vec{B}_{II}) = 0.$$

Но это означает, согласно результатам предыдущего параграфа, что

$$\vec{B}_I - \vec{B}_{II} = \nabla\varphi, \qquad (2.41)$$

т.е. векторный потенциал определён с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Это даёт возможность накладывать на векторный потенциал те или иные дополнительные условия, удобные при рассмотрении конкретных задач. Назначение дополнительных условий для векторного потенциала называют его *калибровкой*. Одной из наиболее употребительных является следующая калибровка:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0. \qquad (2.42)$$

Посмотрим, всегда ли такая калибровка возможна. Пусть потенциал $\vec{B}_{II}$ не удовлетворяет (2.42). Постараемся подобрать другой потенциал $\vec{B}_I$, этому условию удовлетворяющий. В соответствии с (2.41), $\vec{B}_I = \vec{B}_{II} + \nabla\varphi$, поэтому

$$\operatorname{div}\vec{B}_I = \operatorname{div}\vec{B}_{II} + \Delta\varphi = 0,$$

и задача сводится к уравнению для φ

$$\Delta\varphi = -\operatorname{div}\vec{B}_{II}.$$

Уравнения такого рода, называемые уравнениями Пуассона, изучаются в курсе методов математической физики. Известно, что уравнение Пуассона (при обычно выполняемых в физике ограничениях на правую часть) всегда имеет решение, т.е. калибровка (2.42) всегда возможна.

2.9. Криволинейные системы координат

В общем случае при переходе из одной системы координат (СК) в другую координаты второй (q_i) являются некоторыми функциями координат первой (x_i) и наоборот, т.е.

$$\begin{cases} q_1 = q_1\left(x_1, x_2, x_3\right), \\ q_2 = q_2\left(x_1, x_2, x_3\right), \\ q_3 = q_3\left(x_1, x_2, x_3\right), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1\left(q_1, q_2, q_3\right), \\ x_2 = x_2\left(q_1, q_2, q_3\right), \\ x_3 = x_3\left(x_1, q_2, q_3\right). \end{cases} \tag{2.43}$$

Найдем малое расстояние ds между двумя бесконечно близкими точками, т.е.

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}. \tag{2.44}$$

Найдем малые приращения координат dx_i:

$$dx_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j, \tag{2.45}$$

или согласно *соглашению Эйнштейна* (см. с. 5) в компактной индексной форме:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j = \alpha_{ij} dq_j. \tag{2.46}$$

Подставляя (2.46) в (2.44) и записывая в индексной форме, получим

$$ds^2 = dx_k dx_k = \alpha_{kj} dq_j \alpha_{ki} dq_i. \tag{2.47}$$

Видно, что выражения (2.47) с точностью до обозначения дифференциалов совпадают с (1.12).

Как было замечено выше, переход из одной декартовой (СК) в другую может быть осуществлен с помощью матрицы перехода (см. (1.3)). Если обе СК декартовы, то преобразование координат (2.43) линейно и формула (2.46) полностью совпадает с (1.3). Таким образом, общий вид *матрицы Якоби*:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial q_3} & \dfrac{\partial x_3}{\partial q_3} & \dfrac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{pmatrix}. \qquad (2.48)$$

Введем понятие базисного вектора: *базисный вектор* – это производная радиус-вектора по соответствующей координате:

$$\vec{\varepsilon}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}. \qquad (2.49)$$

Система из трёх *базисных векторов* составляет *базис* СК; если СК *ортогональна*, то базисные вектора взаимно ортогональны:

$$\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j = 0, \quad i \neq j,$$

или, что то же самое:

$$\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j = H_{(i)}^2 \delta_{ij}, \qquad (2.50)$$

где $H_{(i)}, i = 1,2,3$ – *коэффициенты Ламэ*. В правой части уравнения (2.50) нет суммирования по индексу i. *Коэффициенты Ламэ* показывают изменение масштаба вдоль соответствующей координаты при преобразовании. Через них может быть записан *метрический тензор* g_{ij}:

$$g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j, \qquad g = \begin{pmatrix} H_{(1)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_{(2)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_{(3)}^2 \end{pmatrix}. \qquad (2.51)$$

Коэффициенты Ламэ полностью определяют все свойства ортогональной системы координат. Так, элементы площади координатных поверхностей (поверхности ортогональной к i-му базисному вектору) выражаются следующим образом:

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3,\; d\sigma_2 = H_1 H_3 dq_1 dq_3,\; d\sigma_1 = H_1 H_2 dq_1 dq_2, \qquad (2.52)$$

а элемент объема пространства

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \qquad (2.53)$$

2.10. Связь ортогональных криволинейных координат с декартовыми

Пусть одна из рассматриваемых СК декартова (для определённости координаты декартовой СК обозначим x_i). Тогда радиус-вектор $\vec{r} = \left(x_1, x_2, x_3\right)$, а *базисные вектора* криволинейной системы координат (её координаты обозначим q_i) можно записать следующим образом:

$$\vec{\varepsilon}_i = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}, \frac{\partial x_2}{\partial q_i}, \frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right). \qquad (2.54)$$

Если криволинейная система координат ортогональна, то, согласно свойству (2.50), имеем

$$(\varepsilon_i)_k \cdot (\varepsilon_j)_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} = \alpha_{ki}\alpha_{kj} = H_{(i)}^2 \delta_{ij}. \qquad (2.55)$$

Здесь использована общая форма записи матрицы Якоби (2.48).

Возвращаясь к формуле (2.47), получим

$$ds^2 = dx_k dx_k = H_{(i)}^2 \delta_{ij} dq_j dq_i = H_{(i)}^2 dq_i dq_i. \qquad (2.56)$$

Формула (2.56) дает простой способ поиска *коэффициентов Ламэ* для различных криволинейных ортогональных систем.

Рассмотрим в качестве примера сферическую систему координат $\left(r, \theta, \varphi\right)$. Декартовы координаты выражаются через сферические следующим образом:

$$x_1 = r\cos\varphi\sin\theta,$$
$$x_2 = r\sin\varphi\sin\theta,$$
$$x_3 = r\cos\theta.$$

Найдём дифференциалы:

$$dx_1 = \cos\varphi\sin\theta dr + r\cos\varphi\cos\theta d\theta - r\sin\varphi\sin\theta d\varphi,$$
$$dx_2 = \sin\varphi\sin\theta dr + r\sin\varphi\cos\theta d\theta + r\cos\varphi\sin\theta d\varphi,$$
$$dx_3 = \cos\theta dr + r\cos\theta d\theta.$$

Найдем квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками (2.56):

$$ds^2 = dx_k dx_k = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = H_{(1)}^2 dr^2 + H_{(2)}^2 d\theta^2 + H_{(3)}^2 d\varphi^2,$$

или, подставляя выражения для дифференциалов,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

Сравнивая две формулы, получим коэффициенты Ламэ:

$$H_{(1)} = 1, H_{(2)} = r, H_{(3)} = r\sin\theta\ . \qquad (2.57)$$

2.11. Оператор градиента в криволинейных координатах

Запишем градиент некоторого скалярного поля φ в индексной форме:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}. \qquad (2.58)$$

Как видно, для получения записи градиента в криволинейных координатах необходимо найти производную $\partial q_j / \partial x_i$. Для этого найдём дифференциал dq_j, аналогично (2.46):

$$dq_j = \frac{\partial q_j}{\partial x_i} dx_i, \qquad (2.59)$$

или

$$dq_j dq_j = \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial q_j}{\partial x_k}dx_i dx_k. \tag{2.60}$$

Найдём $dx_i dx_k$ с помощью формулы (2.56):

$$dx_k dx_k = dx_i dx_k \delta_{ik} = H_{(j)}^2 dq_j dq_j. \tag{2.61}$$

Сравнивая формулы (2.60) и (2.61), получим:

$$\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial q_j}{\partial x_k} = \frac{1}{H_{(j)}^2}\delta_{ik}. \tag{2.62}$$

Очевидно, что длина вектора не должна зависеть от СК. Найдем квадрат длины градиента φ:

$$\begin{gathered}\operatorname{grad}^2\varphi = \nabla_i\varphi\nabla_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial x_i} = \\ \frac{1}{H_{(j)}^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\delta_{jk} = \frac{1}{H_{(j)}^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}.\end{gathered} \tag{2.63}$$

Исходя из формулы (2.63), градиент в криволинейных координатах может быть записан следующим образом:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{H_{(j)}}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}. \tag{2.64}$$

2.12. Интегрирование тензорных полей

Далее кратко рассмотрены вопросы, связанные с интегрированием тензорных полей. Строгое определение интегралов различных типов, встречающихся в тензорном анализе, лежит за рамками данного пособия, и поэтому ниже дано только их перечисление.

Интегралы по контуру. Пусть в пространстве дана некоторая линия, соединяющая две заданные точки (они могут и совпадать), или, как мы будем говорить, задан контур Γ (замкнутый или незамкнутый). На интуитивном уровне под интегралом от тензорного поля по контуру Γ

$$\int \ldots d\Gamma$$

следует понимать предел суммы, получающейся при разбиении контура на кусочки $\Delta\Gamma$

$$\sum \ldots \Delta\Gamma$$

при $\Delta\Gamma \to 0$, где $\Delta\Gamma$ – длина отдельного кусочка. Часто интегрируемое тензорное поле содержит в качестве сомножителя единичный вектор касательной к контуру $\vec{\tau}$. Комбинацию $\vec{\tau}\, d\Gamma$ называют *ориентированным элементов контура* и обозначают

$$\vec{\tau}\, d\Gamma = d\vec{\Gamma},$$

или в индексной форме:

$$\tau_i d\Gamma = d\Gamma_i.$$

Если контур Γ замкнутый, это обозначают кружком у знака интеграла $\oint \ldots d\Gamma$. Наиболее часто встречается интеграл по замкнутому контуру от скалярного произведения векторного поля на вектор касательной

$$\oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{\Gamma} = \oint_\Gamma A_i \cdot d\Gamma_i.$$

Такой интеграл называют *циркуляцией* поля $\vec{A}$ по контуру Γ. Встречаются и другие виды интегралов, например,

$$\oint_\Gamma \vec{A} \times d\vec{\Gamma}, \quad \oint_\Gamma \vec{A} \otimes d\vec{\Gamma}, \quad \oint_\Gamma \vec{A} d\Gamma, \quad \oint_\Gamma T_{ij} d\Gamma_j$$

и т.д.

Интегралы по поверхности. Элементом интегрирования являются «кусочки» поверхности S площадью dS. Часто встречающаяся комбинация $\vec{n} dS$, где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности, называется *ориентированным элементом поверхности* и обозначается $d\vec{S}$, а в индексной записи $n_i dS = dS_i$. При интегрировании должно быть указано, какая нормаль, по какую сторону поверхности находящаяся, имеется в виду. При интегрировании по замкнутой поверхности

$$\oint_S \ldots d\vec{S}$$

считается, если не оговорено противное, что берётся внешняя нормаль. Наиболее часто встречаются интегралы вида

$$\int_S T \cdot d\vec{S},$$

где T – обычно тензорное поле первого или второго ранга. Такие интегралы называются *потоком* поля T через поверхность S.

2.13. Теорема Гаусса

Теорема Гаусса связывает интегралы по замкнутой поверхности и ограниченному этой поверхностью объёму. Доказательство теоремы Гаусса для частного случая векторных полей можно найти в учебниках по математическому анализу, доказательство же для произвольных тензорных полей производится совершенно аналогично. Поэтому мы ограничимся общей формулировкой, обсуждением частных случаев и примерами.

Итак, пусть имеется замкнутая поверхность S и ограниченный ею объём V. Пусть задано тензорное поле T произвольного ранга, не имеющее особых точек внутри V и на S. Тогда (пишем в индексной форме)

$$\oint_S T\ldots dS_j = \int_V \nabla_j T\ldots dV. \tag{2.65}$$

Многоточие здесь заменяет индексы компонент тензорного поля T, которые могут быть произвольными.

Наиболее распространённый частный случай – поле T векторное, причём в левой части теоремы Гаусса стоит скалярное произведение поля на $d\vec{S}$:

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint_S A_j dS_j = \int_V \nabla_j A_j dV = \int_V \operatorname{div}\vec{A} dV,$$
$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{A} dV, \qquad (2.66)$$

т.е. поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S равен интегралу по объёму, ограниченному этой поверхностью, от дивергенции поля $\vec{A}$. Именно этот частный случай теоремы Гаусса доказывается в большинстве учебников по математическому анализу.

Некоторые примеры:

$$\oint_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = 3\int_V dV = 3V,$$
$$\oint_S \vec{r}\otimes d\vec{S} = \oint_S x_i dS_j = \int_V \nabla_j x_i dV = \delta_{ij}V,$$

т.е. $\oint_S \vec{r}\otimes d\vec{S} = Vg$ – шаровой тензор.

Особенно важное значение имеет теорема Гаусса для кулоновского поля:

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla\frac{1}{r}.$$

Если начало координат лежит вне объёма V, то особых точек внутри V нет и теорема Гаусса применима. Мы уже вычисляли дивергенцию кулоновского поля

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = 0,$$

поэтому

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} dV = 0.$$

Если же начало координат попадает внутрь V, то теорема Гаусса не может быть применена. Однако ей всё же можно придать смысл. Для этого сначала найдём поток кулоновского поля через сферу радиуса a, центр которой совпадает с началом координат

$$\oint_{S_a} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = \oint_{S_a} \frac{dS}{r^2} = \frac{1}{a^2} \oint_{S_a} dS = \frac{1}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi.$$

Здесь использовано то, что нормаль к поверхности сферы и радиус-вектор параллельны, т.е.

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = r\,|\,\vec{n}\,| = r,$$

а r на поверхности сферы сохраняет постоянное значение a.

Перейдём теперь к случаю произвольной поверхности S, причём начало координат лежит внутри S. Окружим начало координат сферой S_ε радиуса ε, достаточно малого, чтобы S_ε целиком была внутри S. К области $V - V_\varepsilon$, ограниченной поверхностью $S + S_\varepsilon$, теорема Гаусса применима:

$$\oint_{S+S_\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = \int_{V-V_\varepsilon} \mathrm{div} \frac{\vec{r}}{r^3} dV = 0.$$

С другой стороны, $\oint_{S+S_\varepsilon} \ldots = \oint_S \ldots - \oint_{S_\varepsilon} \ldots$, где учтено, что в $\oint_{S+S_\varepsilon} \ldots$ нормаль берётся наружная по отношению к объёму $V - V_\varepsilon$, т.е. на S_ε нормаль направлена внутрь сферы. Когда же пишем $\oint_{S_\varepsilon} \ldots$, то имеем в виду нормаль, направленную из сферы наружу. Поэтому получаем

$$\oint_S \ldots = \oint_{S_\varepsilon} \ldots = 4\pi.$$

Итак, всегда, когда начало координат внутри поверхности S,

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = 4\pi.$$

Поскольку $\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r^3}=0$ всюду, кроме начала координат, этот результат формально можно получить из теоремы Гаусса, если положить

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}=4\pi\delta(\vec{r}), \tag{2.67}$$

где $\delta(\vec{r})$ – *дельта-функция* Дирака.

Полученный результат находит многочисленные применения в электродинамике, так как кулоновское поле описывает *электрическое поле точечного заряда*, и в теории *гармонических функций*, т.е. функций $u(\vec{r})$, удовлетворяющих уравнению Лапласа,

$$\Delta u=0.$$

Поскольку полученный результат с учётом соотношения

$$\frac{\vec{r}}{r^3}=-\nabla\frac{1}{r}$$

можно записать и так:

$$\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{r}), \tag{2.68}$$

то $\dfrac{1}{r}$ является фундаментальним решением уравнения Лапласа.

2.14. Дивергенция, ротор и оператор Лапласа в криволинейных координатах

Поток векторного поля через некоторую замкнутую поверхность не должен зависеть от СК. Найдем поток некоторого векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V, и применим теорему Гаусса:

$$F=\oint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=\int_V\operatorname{div}\vec{A}dV. \tag{2.69}$$

Вектор $d\vec{S}$ может быть записан в различной форме. Его наиболее общий вид: $d\vec{S} = dS\vec{n} = \left(d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3\right)$, где $d\sigma_i$ – элементарная площадка, перпендикулярная соответствующему базисному вектору. К примеру, для декартовой системы координат можно записать $d\vec{S} = \left(dydz, dxdz, dydx\right)$. Запишем уравнение (2.69) в криволинейных координатах, учитывая преобразования элементарного объёма (2.52) и площади (2.53):

$$
\begin{aligned}
F &= \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \\
&= \oint_S \vec{A} \cdot \left(H_2 H_3 dq_2 dq_3, H_1 H_3 dq_1 dq_3, H_1 H_2 dq_1 dq_2\right) = \\
&= \iint_{q_2, q_3} A_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3 + \iint_{q_1, q_3} A_2 H_1 H_3 dq_1 dq_3 + \\
&\quad + \iint_{q_1, q_2} A_3 H_1 H_2 dq_1 dq_2 = \\
&= \iiint_{q_1, q_2, q_3} \operatorname{div} \vec{A} H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV.
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

Продифференцируем уравнение (2.70) по трем координатам криволинейной СК:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3} \iint_{q_2, q_3} A_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3 + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3} \iint_{q_2, q_3} A_2 H_1 H_3 dq_1 dq_3 + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3} \iint_{q_1, q_2} A_3 H_1 H_2 dq_1 dq_2 = \\
&\qquad = \frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3} \iiint_{q_1, q_2, q_3} \operatorname{div} \vec{A} H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.
\end{aligned}
$$

Поскольку дифференцирование по соответствующей координате уничтожает интеграл, то

$$\frac{\partial A_1 H_2 H_3}{\partial q_1} + \frac{\partial A_2 H_1 H_3}{\partial q_2} + \frac{\partial A_3 H_1 H_2}{\partial q_3} = \operatorname{div} \vec{A} H_1 H_2 H_3. \qquad (2.71)$$

Выражая дивергенцию векторного поля, получим ее запись в криволинейных координатах:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial A_1 H_2 H_3}{\partial q_1} + \frac{\partial A_2 H_1 H_3}{\partial q_2} + \frac{\partial A_3 H_1 H_2}{\partial q_3} \right). \qquad (2.72)$$

Получим запись ротора в криволинейных координатах. Заметим, что для дивергенции векторного произведения справедлива следующая формула:

$$\begin{gathered} \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \nabla_i (e_{ijk} a_j b_k) = e_{ijk} a_j \nabla_i b_k + e_{ijk} b_k \nabla_i a_j = \\ = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}. \end{gathered} \qquad (2.73)$$

Выберем в качестве вектора $\vec{b}$ базисный вектор i-й оси криволинейной системы координат, тогда для i-й компоненты ротора имеем

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{\varepsilon}_i) = \vec{\varepsilon}_i \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{\varepsilon}_i = \vec{\varepsilon}_i \cdot \operatorname{rot} \vec{a} = \left(\operatorname{rot} \vec{a} \right)_i. \qquad (2.74)$$

здесь учтено, что производная базисного вектора по координатам базиса равна нулю. Определим компоненты ротора, для чего найдём результат векторного произведения для всех трёх базисных векторов:

$$\begin{gathered} \vec{a} \times \vec{\varepsilon}_1 = \left(0, a_3, -a_2\right), \\ \vec{a} \times \vec{\varepsilon}_2 = \left(-a_3, 0, a_1\right), \\ \vec{a} \times \vec{\varepsilon}_3 = \left(a_2, -a_1, 0\right). \end{gathered} \qquad (2.75)$$

Применяя оператор дивергенции в виде (2.72) к каждому из векторов (2.75), получим выражение для компонент ротора в криволинейной ортогональной системе координат:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{rot}\vec{a})_1 &= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial a_3H_1H_3}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2H_1H_2}{\partial q_3}\right),\\
(\operatorname{rot}\vec{a})_2 &= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial a_1H_1H_2}{\partial q_3} - \frac{\partial a_3H_2H_3}{\partial q_1}\right),\\
(\operatorname{rot}\vec{a})_3 &= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial a_2H_2H_3}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1H_1H_3}{\partial q_2}\right).
\end{aligned} \tag{2.76}
$$

Получим запись оператора Лапласа в криволинейных координатах. Поскольку оператор Лапласа – это $\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, применим последовательно формулы (2.64) и (2.72):

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{A} &= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial A_1H_2H_3}{\partial q_1} + \frac{\partial A_1H_2H_3}{\partial q_2} + \frac{\partial A_3H_1H_2}{\partial q_3}\right),\\
\vec{A} &= \operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}, \frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right).
\end{aligned} \tag{2.77}
$$

Окончательно для оператора Лапласа имеем

$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\Bigg(&\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \\
&+\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3}\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\Bigg).
\end{aligned} \tag{2.78}
$$

2.15. Теорема Стокса

Теорема Стокса связывает интегралы по замкнутому контуру Γ и по поверхности *S*, натянутой на этот контур, т.е. по поверхности, для которой контур Γ служит границей. Как и для теоремы Гаусса, мы не будем проводить доказательство, ограничившись общей формулировкой. Для произвольного тензорного поля *T* выполняется

$$
\oint_\Gamma T\ldots d\Gamma_j = \int_S e_{ijk}\nabla_i T\ldots dS_k, \tag{2.79}
$$

причём должны быть определённым образом согласованы направление обхода контура и направление нормали к поверхности $\vec{n}$. Именно, если смотреть от конца вектора нормали $\vec{n}$, то контур должен обходиться против часовой стрелки. Иными словами, выполняется *правило буравчика*: если вкручивать буравчик по направлению нормали, то направление его вращения укажет направление обхода контура. Появление правил, позволяющих различать правые и левые СК, связано с тем, что в теореме Стокса появился псевдотензор Леви-Чивиты и уже невозможно считать вектор касательной $\vec{\tau}$ и вектор нормали $\vec{n}$ одновременно истинными векторами. Какой из них считать псевдовектором, для теоремы Стокса безразлично.

В наиболее распространённом случае теорема Стокса применяется к циркуляции векторного поля:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A}\cdot d\vec{\Gamma} = \oint_{\Gamma} A_j d\Gamma_j = \int_S e_{ijk} \nabla_i A_j dS_k = \int_S \operatorname{rot} \vec{A}\cdot d\vec{S}\,. \qquad (2.80)$$

Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через поверхность, натянутую на этот контур.

Подчеркнём, что для данного контура существует бесконечно много натянутых на него поверхностей, и для всех теорема Стокса справедлива. По этой причине нет таких сложностей с особыми точками поля, какие мы видели в случае теоремы Гаусса – если особые точки изолированные, то поверхность всегда можно провести так, чтобы миновать особенности. Такое отличие от теоремы Гаусса связано с тем, что замкнутая поверхность, в отличие от замкнутого контура, делит пространство на две части.

3. ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ В ГИДРОДИНАМИКЕ

3.1. Закон сохранения массы для жидкости, несжимаемые жидкости

Рассмотрим некоторую замкнутую область пространства, заполненную жидкостью. Пусть площадь внешней поверхности этой области – S, а ее объем – V. Плотность жидкости может отличаться в различных точках области, а также она может меняться со временем. Соответственно, плотность $\rho(\vec{r},t)$ является функцией координат и времени. Очевидно, что полная масса жидкости, находящейся в рассматриваемой области, может быть вычислена с помощью интеграла:

$$M = \iiint_V \rho(\vec{r},t)dV\,, \tag{3.1}$$

где интегрирование предполагается по всему объему рассматриваемой области. Масса жидкости M в отсутствие внешних полей, для изотермической химически нейтральной жидкости может измениться только при втекании и вытекании жидкости в рассматриваемую область. Проще говоря, единственной механической причиной изменения массы может быть «доливание» или наоборот «отлив» жидкости. В этом случае жидкость обязана пересекать границу области. Масса жидкости, пересекающая границу области через малый элемент поверхности площадью dS за малый промежуток времени dt, может быть выражена как:

$$dM = \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS\,dt\,, \tag{3.2}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный по нормали к элементу поверхности dS, а $\vec{u}$ – вектор скорости течения жидкости. Выберем внешнее по отношению к рассматриваемой области направление нормали $\vec{n}$ (как это сделано в пп. 2.12, 2.13). Тогда уравнение (3.2) будет описывать вытекание жидкости, то есть – убыль массы. Полная убыль массы может быть найдена с помощью интегрирования вдоль всей поверхности S:

$$\frac{dM}{dt} = -\oiint_S \rho\vec{u}\cdot\vec{n}dS = -\iiint_V \operatorname{div}\left(\rho\vec{u}\right)dV. \tag{3.3}$$

В силу теоремы Остроградского–Гаусса (см. п. 2.13) перейдем к интегралу по объему области. С другой стороны, (3.1) даёт следующее выражение для убыли массы:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{d\rho}{dt}dV. \tag{3.4}$$

Равенство (3.3) и (3.4) приводит к соотношению

$$\iiint_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}\left(\rho\vec{u}\right)\right)dV = 0\,. \tag{3.5}$$

Поскольку сама область, как и ее объем, нами были выбраны произвольно, то уравнение (3.5) справедливо вне зависимости от того, по какому конкретному объему происходит интегрирование. Это означает равенство нулю подынтегрального выражения, а именно:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div}(\rho\vec{u}). \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) представляет собой *закон сохранения массы жидкости*. В случае несжимаемой жидкости будем иметь постоянное значение плотности, т.е. $\rho = \mathrm{const}$. Тогда уравнение (3.6) будет иметь вид:

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0. \tag{3.7}$$

Последнее уравнение часто называют *условием несжимаемости* жидкости.

3.2. Уравнение Эйлера

Рассмотрим силу, действующую на некоторый объем идеальной жидкости, в которой отсутствует внутреннее трение. Согласно второму закону Ньютона, она может быть вычислена как

$$M\vec{a}=\iiint_V \rho\frac{d\vec{u}}{dt}dV=\vec{F}\ , \tag{3.8}$$

где $\vec{a}$ – ускорение жидкости, $\vec{u}$ – скорость жидкости, $\vec{F}$ – суммарная сила. В отсутствие трения внутри жидкости присутствует только сила давления, которая может быть вычислена с помощью теоремы Остроградского–Гаусса как

$$\vec{F}=-\oiint_S P\vec{n}ds=-\iiint_V \nabla P dV\ , \tag{3.9}$$

где P – давление. Приравнивая выражения для силы (3.8) и (3.9), получаем:

$$\iiint_V \rho\frac{d}{dt}\vec{u}dV=-\iiint_V \nabla P dV. \tag{3.10}$$

Выражение (3.10) верно для любого объема жидкости, и поэтому может быть переписано в дифференциальном виде:

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt}=-\nabla P\ . \tag{3.11}$$

Жидкость является движущейся средой, поэтому координаты заданного элемента жидкости зависят от времени. Рассмотрим движение малого объема жидкости (малого в том смысле, что в любой момент времени скорости всех точек этого объема одинаковы). Тогда его скорость даётся функцией $\vec{u}\left(\vec{r}(t),t\right)$, а производная от скорости по времени в индексной форме примет следующий вид:

$$\frac{du_i\left(x_j(t),t\right)}{dt}=\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t}=\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_j. \tag{3.12}$$

Последнее выражение может быть записано в инвариантной векторной форме в виде $\partial\vec{u}/\partial t+\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u}$. Тогда выражение (3.11) можно переписать в форме:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P. \tag{3.13}$$

Выражение (3.13) называется *уравнением Эйлера*. Оно описывает движение жидкости в отсутствие сил внутреннего трения (вязкости). Такая жидкость называется *идеальной*.

В случае присутствия внешней силы (например, силы тяжести) она должна быть добавлена в выражение (3.9), а именно

$$\vec{F} = \iiint\limits_V \left(-\nabla P + \vec{f}\right) dV, \tag{3.14}$$

где $\vec{f}$ – плотность внешней силы (внешняя сила, действующая на единицу объема жидкости). В этом случае уравнение Эйлера изменится следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{1}{\rho}\vec{f}. \tag{3.15}$$

3.3. Завихренность. Уравнение эволюции завихренности

Выполним простое упражнение по преобразованию двойного векторного произведения, а именно, преобразуем выражение $\vec{u} \times \operatorname{rot}\vec{u}$ к виду, не содержащему векторных произведений. Для этого запишем выражение в индексной форме:

$$\begin{gathered} e_{ijk}u_j\left(\operatorname{rot}\vec{u}\right)_k = e_{ijk}u_j e_{kpq}\nabla_p u_q = e_{kij}e_{kpq}u_j\frac{\partial}{\partial x_p}u_q = \\ = \left(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{jp}\delta_{iq}\right)u_j\frac{\partial u_q}{\partial x_p} = \delta_{ip}\delta_{jq}u_j\frac{\partial u_q}{\partial x_p} - \delta_{jp}\delta_{iq}u_j\frac{\partial u_q}{\partial x_p} = \\ = u_q\frac{\partial u_q}{\partial x_p} - u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_q^2}{\partial x_i} - u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \end{gathered} \tag{3.16}$$

или в инвариантной векторной форме:

$$\vec{u} \times \operatorname{rot}\vec{u} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{u}^2) - \left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{u}\ .$$

С учетом полученного выражения уравнение Эйлера может быть преобразовано к виду:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{u}^2) = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{u} \times \mathrm{rot}\,\vec{u} \;. \qquad (3.17)$$

Ротор скорости часто называют завихренностью и обозначают как $\vec{w} = \mathrm{rot}\,\vec{u}$. Завихренность – это псевдовекторное поле, аналог угловой скорости, использующейся при описании вращения твердых тел. Уравнение (3.17) для несжимаемой жидкости может быть переписано в форме:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\vec{u}^2}{2} + \frac{P}{\rho}\right) = \vec{u} \times \mathrm{rot}\,\vec{u} \;. \qquad (3.18)$$

Здесь учтено, что для несжимаемой жидкости $\rho = \mathrm{const}$. Применяя операцию ротора ко всему выражению (3.18), получим $\partial(\mathrm{rot}\,\vec{u}) / \partial t = \mathrm{rot}(\vec{u} \times \mathrm{rot}\,\vec{u})$, поскольку ротор градиента любого вектора равен нулю, как это отмечено в п. 2.6. В терминах завихренности получим:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\vec{u} \times \vec{w}) \,. \qquad (3.19)$$

Выражение (3.19) описывает эволюцию завихренности при течении идеальной несжимаемой жидкости.

3.4. Потенциал. Потенциальное течение

Уравнение эволюции завихренности (3.19) имеет очевидное решение $\vec{w} = \mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$. Как известно, векторное поле, ротор которого равен нулю, называется потенциальным полем (см. п. 2.7). Такие поля однозначно определяются с помощью скалярной функции, называемой потенциалом. Введем потенциал скорости φ. Его связь со скоростью течения дается выражением $\vec{u} = \nabla\varphi$. Вспоминая, что полученное уравнение эволюции завихренности (3.19) актуально для случая несжимаемой жидкости, когда выполняется условие несжимаемости $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$, получим уравнение, описывающее распределение потенциала скорости:

$$\operatorname{div}\nabla\varphi = \Delta\varphi = 0\,. \qquad (3.20)$$

Течение, описываемое выражением (3.20), называется *потенциальным* течением жидкости.

3.5. Перенос импульса жидкости

Найдем скорость изменения импульса со временем. Для этого запишем производную по времени от импульса, содержащегося в единице объема, а именно:

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} = \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial\rho}{\partial t}. \qquad (3.21)$$

С учетом закона сохранения массы (3.6) и уравнения Эйлера (3.13), уравнение (3.21) может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} = -\rho\left((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla P\right) - \vec{u}\operatorname{div}(\rho\vec{u}). \qquad (3.22)$$

Запишем правую часть выражения (3.22) в индексной форме:

$$\begin{aligned}
&-\rho\left(u_k\nabla_k u_i + \frac{1}{\rho}\nabla_i P\right) - u_i\nabla_k(\rho u_k) = \\
&= -\rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} - u_i\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = \qquad (3.23)\\
&= -\delta_{ik}\frac{\partial P}{\partial x_k} - \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left[P\delta_{ik} + \rho u_i u_k\right].
\end{aligned}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, является тензором второго ранга и называется *тензором плотности потока импульса* – $\overline{\overline{\Pi}}$. В индексной форме $\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho u_i u_k$. Очевидно, что тензор $\overline{\overline{\Pi}}$ симметричен, а его производная по координате $\partial\Pi_{ik}/\partial x_k$ может быть записана в инвариантной векторной форме как $\operatorname{div}\overline{\overline{\Pi}}$. Тогда уравнение переноса импульса принимает вид:

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} = -\operatorname{div}\overline{\overline{\Pi}}\,. \qquad (3.24)$$

3.6. Тензор вязких напряжений

До сих пор мы рассматривали движение идеальной жидкости, то есть такой жидкости, в которой отсутствуют силы внутреннего трения. Идеальная жидкость – это математическая модель, упрощающая реальное положение вещей. Она может быть использована в случаях, когда силы трения достаточно малы. В реальности при течении любой жидкости существуют силы внутреннего трения. Трение связано с необратимым процессом переноса импульса внутри жидкости. Тогда в тензор плотности потока импульса должно быть добавлено дополнительное слагаемое, описывающее трение в жидкости, которое называется термином *вязкость*:

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho u_i u_k - \sigma'_{ik}, \tag{3.25}$$

тензор σ'_{ik} – называется *тензором вязких напряжений*, тогда как тензор $\sigma_{ik} = \sigma'_{ik} - P\delta_{ik}$ называется *тензором напряжений*. Как показывают эксперименты, впервые проведенные И. Ньютоном, для большинства жидкостей импульс переносится от областей с наибольшей скоростью движения в области с наименьшей скоростью. То есть вязкий поток импульса пропорционален производной от скорости по координатам: $\sigma'_{ik} \sim \partial u_i / \partial x_k$. Жидкости, для которых такое соотношение верно, называются *ньютоновскими*.

Мы знаем (см. п. 1.11), что каждый тензор второго ранга может быть разложен на неприводимые части: антисимметричный тензор, девиатор и след. Представим тензор производных в виде суммы неприводимых:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = T^a_{ik} + D_{ik} + \frac{1}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}, \\
T^a_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \\
D_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}.
\end{gathered} \tag{3.26}$$

Поскольку тензор вязких напряжений пропорционален тензору (3.26), то в общем виде выражение для σ'_{ik} может быть записано как линейная комбинация неприводимых с некоторыми коэффициентами, а именно:

$$\begin{aligned}\sigma'_{ik} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) + \\ + \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}.\end{aligned} \qquad (3.27)$$

В выражении (3.27) первое слагаемое связано с внутренним вращением в жидкости, а коэффициент μ называется *вращательной вязкостью*. Второе слагаемое в (3.27) связано с динамическим смещением слоев жидкости относительно друг друга, а коэффициент η называется *динамической вязкостью*. Последнее слагаемое связано со сжимаемостью жидкости, а коэффициент ζ называется *второй вязкостью*.

Как показывают эксперименты, при вращении большинства жидкостей как целого никакого перераспределения импульса от областей, находящихся на расстоянии от оси вращения к областям вблизи оси вращения не происходит. Такие жидкости называют *жидкостями без внутреннего вращения*. В этом случае скорость жидкости задается соотношением $\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ или $u_i = e_{ijq}\Omega_j x_q$, где $\vec{\Omega}$ – псевдовектор угловой скорости вращения. Факт отсутствия вязкости при вращении можно выразить уравнением:

$$\begin{aligned}\sigma'_{ik} = \mu\left(\frac{\partial e_{ijq}\Omega_j x_q}{\partial x_k} - \frac{\partial e_{kjq}\Omega_j x_q}{\partial x_i}\right) + \\ + \eta\left(\frac{\partial e_{ijq}\Omega_j x_q}{\partial x_k} + \frac{\partial e_{kjq}\Omega_j x_q}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial e_{ljq}\Omega_j x_q}{\partial x_k}\right) + \\ + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial e_{ljq}\Omega_j x_q}{\partial x_k} = 0.\end{aligned} \qquad (3.28)$$

В рассматриваемом случае угловая скорость постоянна, тензор Леви-Чивиты – тоже постоянная величина. Тогда уравнение (3.28) перепишется в виде:

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{ik} &= \mu\Omega_j\left(e_{ijq}\frac{\partial x_q}{\partial x_k} - e_{kjq}\frac{\partial x_q}{\partial x_i}\right) + \\
&\quad + \eta\Omega_j\left(e_{ijq}\frac{\partial x_q}{\partial x_k} + e_{kjq}\frac{\partial x_q}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\Omega_j e_{ljq}\frac{\partial x_q}{\partial x_l}\right) + \\
&\quad + \zeta e_{ljq}\Omega_j\delta_{ik}\frac{\partial x_q}{\partial x_l} = \mu\Omega_j\left(e_{ijq}\delta_{qk} - e_{kjq}\delta_{qi}\right) + \\
&\quad + \eta\Omega_j\left(e_{ijq}\delta_{qk} + e_{kjq}\delta_{qi} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\Omega_j e_{ljq}\delta_{ql}\right) + \zeta e_{ljq}\Omega_j\delta_{ik}\delta_{ql} = \\
&= \mu\Omega_j\left(e_{ijk} - e_{kji}\right) + \eta\Omega_j\left(e_{ijk} + e_{kji} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\Omega_j \underbrace{e_{ljl}}_{0}\right) + \zeta \underbrace{e_{ljl}}_{0}\Omega_j = \\
&= \mu\Omega_j\left(e_{ijk} + e_{ijk}\right) + \eta\Omega_j\left(e_{ijk} - e_{ijk}\right) = 2\mu e_{ijk}\Omega_j = 0.
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Решением уравнения (3.29) будет $\mu = 0$. При выводе (3.29) были учтены свойства и правила перестановки индексов символа Леви-Чивиты, (см. (1.65)), а так же тот факт, что $\partial x_i / \partial x_k = \delta_{ik}$ (см. (2.5)).

3.7. Уравнение Навье–Стокса

Получим уравнение, выражающее перенос импульса для вязкой жидкостию Для этого запишем уравнение переноса импульса (3.24) с учетом выражения для тензора плотности потока импульса в форме (3.25). Будем рассматривать случай Ньютоновской жидкости без вращательной вязкости. Уравнение запишем в индексной форме, а именно:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\Big[P\delta_{ik} + \rho u_i u_k -$$
$$-\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) - \zeta\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\Big]. \quad (3.30)$$

Перепишем левую часть, используя соотношение (3.21) с учетом закона сохранения массы:

$$\frac{\partial\left(\rho u_i\right)}{\partial t} = \rho\frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i\frac{\partial\left(\rho u_k\right)}{\partial x_k} =$$
$$= \rho\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial\left(\rho u_k u_i\right)}{\partial x_k} + \rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (3.31)$$

Раскроем скобки в правой части выражения (3.30):

$$\frac{\partial\left(\rho u_i\right)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial\left(\rho u_i u_k\right)}{\partial x_k} +$$
$$+\eta\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_l} =$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial\left(\rho u_i u_k\right)}{\partial x_k} + \eta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \quad (3.32)$$
$$+\eta\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \zeta\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}.$$

Подставим (3.31) в (3.32) и приведем подобные слагаемые:

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} =$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \eta\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}. \quad (3.33)$$

Поделим уравнение (3.33) на плотность ρ и запишем в инвариантной векторной форме:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{u}+ \\
+\frac{\eta}{\rho}\nabla\operatorname{div}\vec{u}+\left(\frac{\zeta}{\rho}-\frac{2}{3}\frac{\eta}{\rho}\right)\nabla\operatorname{div}\vec{u}= \\
=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{u}+\left(\frac{\zeta}{\rho}+\frac{1}{3}\frac{\eta}{\rho}\right)\nabla\operatorname{div}\vec{u}.
\end{gathered}
\tag{3.34}
$$

Уравнение (3.34) называют *уравнением Навье–Стокса*, оно описывает движение вязкой жидкости и является основным уравнением гидродинамики ньютоновской жидкости. Для случая несжимаемой жидкости с учетом (3.7) будем иметь:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{u}, \\
\operatorname{div}\vec{u}=0,
\end{gathered}
\tag{3.35}
$$

где параметр $\nu=\eta/\rho$ называется *кинематической вязкостью* жидкости. Кинематическую вязкость принято измерять во внесистемных единицах – стоксах (*Ст*), 1 Ст = 10^{-4} м^2/с.

В случае наличия внешней силы в уравнение (3.35) необходимо добавить слагаемоле по аналогии с (3.15), а именно:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{u}+\frac{1}{\rho}\vec{f}, \\
\operatorname{div}\vec{u}=0.
\end{gathered}
\tag{3.36}
$$

3.8. Форма поверхности в цилиндрическом вращающемся сосуде в присутствие тяжести

Рассмотрим цилиндрический сосуд, вращающийся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Найдём форму поверхности жидкости, налитой в него. Выберем направление оси Z вдоль оси вращения так, что $\vec{\Omega}=(0,0,\Omega)$. Тогда для скорости течения будем иметь: $\vec{u}=\vec{\Omega}\times\vec{r}$, или в индексной форме:

$$u_i = e_{ijk}\Omega_j x_k \Rightarrow u_1 = \underbrace{e_{123}\Omega_2 x_3}_{0} + \underbrace{e_{132}}_{-1}\Omega_3 x_2 = -\Omega y,$$

$$u_2 = \underbrace{e_{213}\Omega_1 x_3}_{0} + \underbrace{e_{231}}_{1}\Omega_3 x_1 = \Omega x, \tag{3.37}$$

$$u_3 = \underbrace{e_{321}\Omega_2 x_1}_{0} + \underbrace{e_{312}}_{-1}\Omega_1 x_2 = 0.$$

Мы решаем задачу в присутствии силы тяжести, то есть плотность внешней силы $\vec{f} = \rho\vec{g}$, где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения. Для того, чтобы жидкость не выливалась из сосуда, очевидно, нужно рассматривать случай, когда сила тяготения направлена вниз, и $\vec{g} = \left(0, 0, -g\right)$. Подставим выражения для компонент скорости и плотности силы тяжести в уравнения (3.36) и запишем проекции первого уравнения на оси координат:

$$\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial t}}_{0} + \underbrace{u_1}_{-\Omega y}\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x}}_{0} + \underbrace{u_2}_{\Omega x}\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial y}}_{-\Omega} + \underbrace{u_3}_{0}\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial z}}_{0} = -\Omega^2 x =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}}_{0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial t}}_{0} + \underbrace{u_1}_{-\Omega y}\underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial x}}_{\Omega} + \underbrace{u_2}_{\Omega x}\underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial y}}_{0} + \underbrace{u_3}_{0}\underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial z}}_{0} = -\Omega^2 y =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}}_{0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\underbrace{\frac{\partial u_3}{\partial t}}_{0} + \underbrace{u_1}_{-\Omega y}\underbrace{\frac{\partial u_3}{\partial x}}_{0} + \underbrace{u_2}_{\Omega x}\underbrace{\frac{\partial u_3}{\partial y}}_{0} + \underbrace{u_3}_{0}\underbrace{\frac{\partial u_3}{\partial z}}_{0} = 0 =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}}_{0} - g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g, \tag{3.38}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = -\frac{\partial \Omega y}{\partial x} + \frac{\partial \Omega x}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 0.$$

Давление здесь также является функцией координат.

Проинтегрируем первое уравнение по x:

$$\Omega^2 x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow P = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 x^2 + G(y,z), \tag{3.39}$$

где $G(y, z)$ – некоторая неизвестная функция координат (y, z), играющая роль константы интегрирования. Подставим теперь (3.39) во второе из уравнений (3.38) и проинтегрируем по y:

$$\Omega^2 y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial G}{\partial y} \Rightarrow G = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 y^2 + H(z), \tag{3.40}$$

где $H(z)$ – некоторая неизвестная функция координаты z.

Наконец, подставляя (3.40) в третье из уравнений (3.38), получим:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + g = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial z} = -g \Rightarrow H = -\rho g z + C, \tag{3.41}$$

где C – константа интегрирования, определяющая начало отсчета давления. Положим ее равной атмосферному давлению $C = P_a$. В этом случае решение для давления имеет вид:

$$P = \frac{1}{2}\rho\Omega^2\left(x^2 + y^2\right) - \rho g z + P_a. \tag{3.42}$$

Очевидно, что на поверхности жидкости во вращающемся сосуде давление должно быть равно атмосферному. Поэтому можно сделать вывод, что поверхность жидкости имеет форму параболоида:

$$z = \frac{\Omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2\right). \tag{3.43}$$

3.9. Потенциальное обтекание шара

Рассмотрим потенциальное обтекание шара радиуса R идеальной жидкостью. Жидкость вдали от шара течет с постоянной скоростью $\vec{U}$, то есть $\lim\limits_{r\to\infty}\vec{u} = \vec{U}$. Поскольку шар твердый и жидкость в него не проникает, то проекция скорости на нормаль к поверхности шара отсутствует: $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ при $r = R$. Задача решается в невязкой постановке. Будем далее искать стационарное решение, которое предполагает отсутствие зависимости от времени.

Исходя из конфигурации задачи (во всяком случае, вдали от шара), очевидно, что $\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$. Такое условие позволяет решать задачу в предположении потенциального течения, используя уравнение для потенциала в форме (3.20). Потенциал – скалярная функция координат, уравнение (3.20) – линейное, а граничные условия зависят только от радиальной координаты и постоянного вектора $\vec{U}$. Наиболее простая скалярная комбинация постоянного вектора и функции, зависящей от радиальной координаты, дается скалярным произведением вектора на градиент функции.

Пусть искомая функция радиальной координаты $h(r)$. Тогда будем искать решение для потенциала в следующем виде:

$$\varphi = \vec{U} \cdot \nabla h(r).$$

Градиент функции, зависящей от радиальной координаты, может быть вычислен как

$$\nabla h(r) = h'(r)\frac{\vec{r}}{r},$$

где $h'(r)$ – производная от функции по аргументу (см. (2.8)). В индексной форме имеем:

$$\nabla_i h(r) = \frac{\partial h(r)}{\partial x_i} = h'(r)\frac{x_i}{r}. \qquad (3.44)$$

Исходя из формулы (3.44), потенциал зависит только от производной функции $h(r)$, и поэтому удобно ввести новую функцию $f(r) = h'(r)$. В терминах этой функции имеем:

$$\varphi = f(r)\frac{U_i x_i}{r}. \qquad (3.45)$$

Подставляя в уравнение для потенциала (3.20), получим:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(\frac{U_i x_i}{r} f(r)\right) = U_i \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{f(r)}{r}\frac{\partial x_i}{\partial x_k} + x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{f(r)}{r}\right) =$$

$$= U_i \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{f(r)}{r}\delta_{ik} + x_i \frac{x_k}{r}\left[\frac{f(r)}{r}\right]\right) =$$

$$= U_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(r)}{r}\right) + U_i \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_i \frac{x_k}{r}\left[\frac{f(r)}{r}\right]'\right) = U_i \left[\frac{f(r)}{r}\right]' \frac{x_i}{r} +$$

$$+ U_i \left(\left[\frac{f(r)}{r}\right]'\left(\frac{x_k}{r}\frac{\partial x_i}{\partial x_k} + \frac{x_i}{r}\frac{\partial x_k}{\partial x_k}\right) + \frac{x_i x_k x_k}{r}\left[\frac{1}{r}\left[\frac{f(r)}{r}\right]'\right]'\right) =$$

$$= U_i \left[\frac{f(r)}{r}\right]'\left(\frac{x_i}{r} + \frac{x_k}{r}\delta_{ik} + \frac{x_i}{r}\delta_{kk}\right) + U_i \left(\frac{x_i r^2}{r}\left[\frac{1}{r}\left[\frac{f(r)}{r}\right]'\right]'\right) =$$

$$= U_i \left[\frac{f(r)}{r}\right]'\left(\frac{x_i}{r} + \frac{x_i}{r} + 3\frac{x_i}{r}\right) + U_i x_i \left(r\left[\frac{1}{r}\left[\frac{f(r)}{r}\right]'\right]'\right) = \qquad (3.46)$$

$$= U_i x_i \left(\frac{5}{r}\left[\frac{f(r)}{r}\right]' + r\left[\frac{1}{r}\left[\frac{f(r)}{r}\right]'\right]'\right) = 0.$$

При выводе формулы (3.46) несколько раз использовано соотношение (3.44) для градиента функции, зависящей от радиальной координаты. Соответствующие выражения помещены в квадратные скобки. Выпишем отдельно выражения для производных, стоящих в скобках:

$$\left[\frac{f(r)}{r}\right]' = \frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2}. \qquad (3.47)$$

$$\left[\frac{1}{r}\left(\frac{f(r)}{r}\right)'\right]' = \left[\frac{f'(r)}{r^2} - \frac{f(r)}{r^3}\right]' =$$
$$= \left[\frac{f''(r)}{r^2} - \frac{2f'(r)}{r^3} - \frac{f'(r)}{r^3} + \frac{3f(r)}{r^4}\right] = \qquad (3.48)$$
$$= \frac{f''(r)}{r^2} - \frac{3f'(r)}{r^3} + \frac{3f(r)}{r^4}.$$

Подставив (3.47) и (3.48) в уравнение (3.46), получим:

$$U_i x_i \left(\frac{5}{r}\left[\frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2}\right] + r\left[\frac{f''(r)}{r^2} - \frac{3f'(r)}{r^3} + \frac{3f(r)}{r^4}\right]\right) =$$
$$= U_i x_i \left(\frac{5f'(r)}{r^2} - \frac{5f(r)}{r^3} + \frac{f''(r)}{r} - \frac{3f'(r)}{r^2} + \frac{3f(r)}{r^3}\right) = \qquad (3.49)$$
$$= U_i x_i \left(\frac{2f'(r)}{r^2} - \frac{2f(r)}{r^3} + \frac{f''(r)}{r}\right) = 0.$$

Поскольку жидкость вдали от шара течет с постоянной ненулевой скоростью $\vec{U}$, то решение уравнения (3.49) задается равенством нулю выражения, стоящего в скобках:

$$\frac{2f'(r)}{r^2} - \frac{2f(r)}{r^3} + \frac{f''(r)}{r} = 0\,. \qquad (3.50)$$

Уравнение (3.50) является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) типа Бернулли, и его решение может быть найдено в форме $f = Cr^{\alpha}$, тогда $f' = \alpha C r^{\alpha-1}$, а $f'' = \alpha(\alpha-1)Cr^{\alpha-2}$. Подставляя в (3.50), получим уравнение для показателя степенной функции:

$$2\alpha C r^{\alpha-3} - 2Cr^{\alpha-3} + aC(\alpha-1)r^{\alpha-3} =$$
$$= Cr^{\alpha-3}\left(\alpha^2 + \alpha - 2\right) = 0. \qquad (3.51)$$

Квадратное уравнение, стоящее в скобках выражения (3.51), имеет два решения: $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = -2$ Согласно теории решения линейных ОДУ общее решение уравнения (3.50) имеет вид:

$$f(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}, \tag{3.52}$$

где C_1 и C_2 – константы интегрирования, которые должны быть определены из граничных условий. Запишем выражение для скорости течения $\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi$, используя решение (3.52) и соотношение (3.45):

$$\varphi = \frac{U_i x_i}{r}\left(C_1 r + C_2 \frac{1}{r^2} \right),$$

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{\partial}{\partial x_k} U_i x_i \left(C_1 + \frac{C_2}{r^3} \right) = \\ &= U_i \left(C_1 + \frac{C_2}{r^3} \right) \frac{\partial x_i}{\partial x_k} + U_i x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{C_2}{r^3} \right) = \\ &= U_i \left(C_1 + \frac{C_2}{r^3} \right) \delta_{ik} + U_i x_i \frac{x_k}{r}\left(\frac{C_2}{r^3} \right)' = \\ &= U_k \left(C_1 + \frac{C_2}{r} \right) - U_i x_i \frac{x_k}{r}\left(\frac{3C_2}{r^4} \right) = \\ &= U_k \left(C_1 + \frac{C_2}{r^3} \right) - \frac{3C_2 U_i x_i x_k}{r^5}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Граничное условие вдали от шара $\lim\limits_{r\to\infty} \vec{u} = \vec{U}$ в индексной форме имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} u_k &= \lim_{r\to\infty}\left(U_k \left(C_1 + \underbrace{\frac{C_2}{r^3}}_{0} \right) - \underbrace{\frac{3C_2 U_i x_i x_k}{r^5}}_{0} \right) = \\ &= \lim_{r\to\infty} C_1 U_k = U_k, \end{aligned} \tag{3.54}$$

следовательно, $C_1 = 1$.

Запишем второе граничное условие $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ на поверхности шара $r = R$, также в индексной форме:

$$u_k n_k\big|_{r=R} = \frac{u_k x_k}{r}\bigg|_{r=R} = \frac{U_k x_k}{R}\left(1+\frac{C_2}{R^3}\right) - \frac{3C_2 U_i x_i \overbrace{x_k x_k}^{R^2}}{R^5 R} =$$

$$\frac{U_k x_k}{R}\left(1+\frac{C_2}{R^3}\right) - \frac{3C_2 U_i x_i R^2}{R^6} = \frac{U_k x_k}{R}\left(1+\frac{C_2}{R^3}\right) - \frac{3C_2 U_i x_i}{R^4} \quad (3.55)$$

$$= U_k x_k\left(\frac{1}{R}+\frac{C_2}{R^4}-\frac{3C_2}{R^4}\right)=0.$$

Из уравнения (3.55) получаем $C_2 = R^3/2$ и окончательно для потенциала и скорости течения найдём:

$$\varphi = \vec{U}\cdot\vec{r}\left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right),$$
$$\vec{u} = \vec{U}\left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right) - \frac{3R^3\left(\vec{U}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{2r^5}. \quad (3.56)$$

3.10. Сила, действующая на шар при потенциальном обтекании

Из повседневного опыта нам известно, что на любое тело, находящееся в потоке жидкости действует сила со стороны жидкости. Вычислим силу, действующую на шар при потенциальном обтекании идеальной жидкостью. Сила определяется соотношением (3.9) и зависит от давления оказываемого потоком на поверхность шара. Давление может быть вычислено с помощью уравнения (3.18). Поскольку рассматриваемое течение потенциально и стационарно, то $\partial\vec{u}/\partial t = 0$ и $\mathrm{rot}\,\vec{u}=0$, а уравнение (3.18) принимает вид:

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}+\frac{P}{\rho}\right)=0. \quad (3.57)$$

Для давления же имеем:

$$P = P_0 + \frac{\rho \vec{u}^2}{2}, \tag{3.58}$$

где P_0 – начало отсчета давления. Используя выражение для скорости (3.56), получим:

$$\begin{gathered}
P = P_0 + \frac{\rho \vec{u}^2}{2} = P_0 + \frac{\rho}{2}\Bigg[U^2\left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right)^2 - \\
-\frac{3R^3}{2r^5}\left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right)\left(\vec{U}\cdot\vec{r}\right)^2 + \frac{9R^6\left(\vec{U}\cdot\vec{r}\right)^2}{4r^8}\Bigg] = \\
= \rho U^2\left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right)^2 - \rho\left(\frac{3R^3}{r^5}-\frac{3R^6}{4r^8}\right)\left(\vec{U}\cdot\vec{r}\right)^2.
\end{gathered} \tag{3.59}$$

Используя выражение (3.9), найдем искомую силу:

$$\begin{gathered}
\vec{F} = -\oiint_S P\vec{n}ds = \\
= -\oiint_S \left(\rho U^2\left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right)^2 - \rho\left(\frac{3R^3}{r^5}-\frac{3R^6}{4r^8}\right)\left(\vec{U}\cdot\vec{r}\right)^2\right)\frac{\vec{r}}{r}ds = \\
= -\oiint_S \left(\rho U^2\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 - \rho\left(3-\frac{3}{4}\right)\left(\vec{U}\cdot\vec{r}\right)^2\right)\frac{\vec{r}}{r}ds = \\
= -\frac{9}{4}\rho\oiint_S \left(U^2 - \frac{\left(\vec{U}\cdot\vec{r}\right)^2}{R^2}\right)\frac{\vec{r}}{R}ds = \\
= -\frac{9}{4}\rho\oiint_S \left(U^2 - \left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)^2\right)\vec{n}ds = \\
= \frac{9}{4}\rho\oiint_S \left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)^2\vec{n}ds - \frac{9}{4}\rho U^2\oiint_S \vec{n}ds.
\end{gathered} \tag{3.60}$$

здесь учтен тот факт, что интегрирование производится по поверхности сферы, где $r = R$. Для определенности определим систему координат так, чтобы вектор $\vec{U}$ был направлен вдоль оси абсцисс. Тогда $\vec{U} = \left(U, 0, 0\right)$.

На поверхности сферы компоненты вектора нормали определяются выражениями соответствующих декартовых координат через сферические координаты (см. п. 2.10), а именно:

$$n_1 = \cos\varphi \sin\theta,$$
$$n_2 = \sin\varphi \sin\theta,$$
$$n_3 = \cos\theta.$$

Элемент площади ds, ортогональный радиальной оси, может быть записан с помощью (2.51):

$$ds = R^2 \sin\theta \ .$$

Используя эти выражения, найдем компоненты силы:

$$F_1 = \frac{9}{4}\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(U \cdot \cos\phi \sin\theta\right)^2 \cos\phi \sin\theta R^2 \sin\theta d\theta -$$
$$-\frac{9}{4}\rho U^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi \sin\theta R^2 \sin\theta d\theta =$$
$$= \frac{9}{4}\rho U^2 R^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos^3\phi d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4\theta d\theta - \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta \right] =$$
$$= \frac{9}{4}\rho U^2 R^2 \left[\underbrace{\left. \sin\phi \left(\frac{\cos^2\phi}{3} + \frac{2}{3} \right) \right|_0^{2\pi}}_{0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4\theta d\theta - \right.$$
$$\left. - \underbrace{\sin\phi \Big|_0^{2\pi}}_{0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta \right] = 0,$$

$$F_2 = \frac{9}{4}\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(U \cdot \cos\phi \sin\theta\right)^2 \sin\phi \sin\theta R^2 \sin\theta d\theta -$$

$$-\frac{9}{4}\rho U^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\phi \sin\theta R^2 \sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{9}{4}\rho U^2 R^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos^2\phi \sin\phi d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4\theta d\theta - \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta \right] =$$

$$= \frac{9}{4}\rho U^2 R^2 \left[\underbrace{\left. -\frac{\cos^3\phi}{3} \right|_0^{2\pi}}_{0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4\theta d\theta + \underbrace{\cos\phi\Big|_0^{2\pi}}_{0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta \right] = 0,$$

$$F_3 = \frac{9}{4}\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(U \cdot \cos\phi \sin\theta\right)^2 \cos\theta R^2 \sin\theta d\theta -$$

$$-\frac{9}{4}\rho U^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta R^2 \sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{9}{4}\rho U^2 R^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \sin^3\theta d\theta - \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \right] =$$

$$= \frac{9}{4}\rho U^2 R^2 \left[\underbrace{\left. \frac{\sin^4\theta}{4} \right|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{0} \int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi - \underbrace{\left. \frac{\sin^2\theta}{2} \right|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{0} \int_0^{2\pi} d\phi \right] = 0.$$

Как видим из выражений, сила, действующая на тело, при потенциальном обтекании равна нулю. Этот факт связан с отсутствием вязкости. Жидкость обтекает тело без всякого сопротивления, не оказывая в ответ на него никакого воздействия, что является подтверждением третьего закона Ньютона.

3.11. Задача Стокса

Рассмотрим медленное обтекание шара потоком вязкой жидкости. Постановка задачи полностью совпадает с п. 3.9, однако теперь необходимо учесть вязкость. В присутствие вязкости потенциальное течение невозможно из-за вязкой диссипации, поэтому не удается составить линейное уравнение, описывающее течение в общем виде. Аналитическое решение полного нелинейного уравнения Навье–Стокса невозможно, поэтому приходится решать задачу в рамках приближения медленного обтекания, т.е. предполагать скорость потока достаточно малой. Критерий «малости» скорости потока будет приведен ниже. Запишем уравнение Навье–Стокса для несжимаемой жидкости (3.35) описывающее стационарный поток:

$$\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{u},\qquad \operatorname{div}\vec{u}=0. \tag{3.61}$$

Напомним, что радиус шара в рассматриваемой задаче равен R, а скорость потока вдали от шара постоянна и равна $\vec{U}$. Обезразмерим решаемую задачу. Логично в качестве единицы длины выбрать радиус шара, а в качестве единицы скорости выбрать модуль скорости потока вдали от шара. Тогда уравнения (3.61) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{U^2}{R}\left(\vec{u}^*\cdot\nabla^*\right)\vec{u}^*=-\frac{1}{\rho R}\nabla^*P+\frac{\nu U}{R^2}\Delta^*\vec{u}^*,\quad \frac{U}{R}\operatorname{div}\vec{u}^*=0. \tag{3.62}$$

Здесь $\vec{u}^*=U\vec{u}$ – безразмерная скорость потока, $\nabla^*=R\nabla$ – безразмерный оператор набла, $\Delta^*=\nabla^{*2}=R^2\nabla^2=\Delta$ – безразмерный оператор Лапласа. Перепишем уравнение (3.62), опуская знак «*». В дальнейшем будем работать с безразмерными переменными.

$$\frac{UR}{\nu}\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u}=-\frac{R}{\rho\nu U}\nabla P+\Delta\vec{u},\qquad \operatorname{div}\vec{u}=0. \tag{3.63}$$

В уравнении (3.63) возник безразмерный комплекс $\mathrm{Re}=UR/\nu$, называемый числом Рейнольдса (не путайте его обозначение с обозначением вещественной части комплексного числа). Число Рейнольдса – это отношение характерной скорости потока к характерной скорости распространения вязких возмущений. Предположим, что скорость потока мала, а $\mathrm{Re}\ll 1$. Тогда можно пренебречь нелинейным членом уравнения (3.63). В этом случае первое из уравнений (3.63) становится линейным. Исключим из него давление, применив операцию ротора:

$$\underbrace{\operatorname{rot}\left[\frac{R}{\rho\nu U}\nabla P\right]}_{0}+\operatorname{rot}\left(\Delta\vec{u}\right)=0,\quad \operatorname{div}\vec{u}=0\,. \tag{3.64}$$

Учтем, что согласно таблице (см. п. 2.7), $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}=\nabla\operatorname{div}\vec{u}-\Delta\vec{u}$. С учетом условия несжимаемости это дает следующее уравнение для скорости в форме:

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}\right)=0\,. \tag{3.65}$$

Поскольку полученное уравнение линейно, как и для невязкого случая, а граничные условия те же самые, разумно искать решение для скорости в форме (3.56), зависимость от радиальной координаты, конечно, будет другой, поскольку уравнения отличаются. Сохраним форму решения, заменив функции, зависящие от координаты, на неизвестные, которые необходимо определить в процессе решения задачи:

$$\vec{u}=\vec{U}f(r)+g(r)\left(\vec{U}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}\,. \tag{3.66}$$

Подставим решение (3.66) в уравнение несжимаемости:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{u}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x_i}\left[fU_i+g\left(U_jx_j\right)x_i\right]&=\\
=U_i\frac{\partial}{\partial x_i}f+U_jx_jx_i\frac{\partial}{\partial x_i}g+gU_jx_j\frac{\partial x_i}{\partial x_i}+gU_jx_i\frac{\partial x_j}{\partial x_i}&=\\
=f'U_i\frac{x_i}{r}+U_jx_jx_ig'\frac{x_i}{r}+gU_jx_j\underbrace{\delta_{ii}}_{3}+gU_jx_i\delta_{ij}&=\\
=f'U_i\frac{x_i}{r}+U_jx_jg'\frac{r^2}{r}+3gU_jx_j+gU_jx_j&=\\
=f'U_i\frac{x_i}{r}+g'r\left(U_jx_j\right)+4g\left(U_jx_j\right)&=\\
=\left[\frac{f'}{r}+g'r+4g\right]\left(U_jx_j\right)=0\Rightarrow f'=-g'r^2-4gr.&
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Уравнение (3.67) дает связь между неизвестными функциями $f(r)$ и $g(r)$. Теперь найдем ротор скорости, необходимый для решения уравнения $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}) = 0$:

$$\operatorname{rot}_i \vec{u} = e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k = e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(fU_k + g\left(U_p x_p\right)x_k\right) =$$

$$= e_{ijk}\left(f'U_k \frac{x_j}{r} + g'\frac{x_j}{r}\left(U_p x_p\right)x_k + g\left(U_p x_p\right)\delta_{jk} + gU_j x_k\right) =$$

$$= \frac{f'}{r} e_{ijk} U_k x_j + \frac{g'}{r} \underbrace{e_{ijk} x_j x_k}_{0} \left(U_p x_p\right) + \qquad (3.68)$$

$$+ \underbrace{e_{ijk}\delta_{jk}}_{0} g\left(U_p x_p\right) + e_{ijk} gU_j x_k = \frac{f'}{r} e_{ijk} U_k x_j + e_{ijk} gU_j x_k,$$

$$\operatorname{rot}\vec{u} = \vec{U}\times\vec{r}\left(g - \frac{f'}{r}\right).$$

Здесь учтен факт, что свертка антисимметричного символа Леви-Чивиты с любым симметричным тензором равно нулю (см. п. 1.17). Вычислим двойной ротор скорости:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = \operatorname{rot}\left[\vec{U}\times\vec{r}\left(\frac{f'}{r} + g\right)\right],$$

$$e_{sqi} e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_q}\left[U_j x_k\left(\frac{f'}{r} + g\right)\right] =$$

$$= \left(\delta_{js}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{ks}\right)\left(U_j \frac{\partial x_k}{\partial x_q}\left(\frac{f'}{r} + g\right) + U_j x_k \frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{f'}{r} + g\right)\right) =$$

$$= \left(\delta_{js}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{ks}\right)\left(f''\frac{x_q}{r} U_k \frac{x_j}{r} + f'U_k \frac{\delta_{jq}}{r} - \right.$$

$$\left. - f'U_k \frac{x_j x_q}{r^3} + g'U_j \frac{x_q}{r} x_k + gU_j \delta_{kq}\right) =$$

$$=\left(f''\frac{x_q}{r}U_q\frac{x_s}{r}+f'U_s\frac{1}{r}-f'U_q\frac{x_sx_q}{r^3}+g'U_s\frac{x_q}{r}x_q+3gU_s\right)-$$

$$\left(f''\frac{x_j}{r}U_s\frac{x_j}{r}+3f'U_s\frac{1}{r}-f'U_s\frac{x_jx_j}{r^3}+g'U_q\frac{x_q}{r}x_s+gU_s\right)=$$

$$=x_s\left(x_qU_q\right)\left[\frac{f''}{r^2}-\frac{f'}{r^3}-\frac{g'}{r}\right]+U_s\left[g'r+2g-f''-\frac{f'}{r}\right]=$$

$$=FU_s+Gx_s\left(x_qU_q\right).$$

В обобщённом векторном виде это даёт следующий результат:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}=F\vec{U}+G\left(\vec{U}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}\ . \qquad (3.69)$$

Как видно из полученного соотношения, двойной ротор скорости имеет ту же структуру, что и сама скорость (3.66). Тогда искомое уравнение может быть записано в форме, подобной (3.68), а именно:

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}\right)=\vec{U}\times\vec{r}\left(G-\frac{F'}{r}\right)=0,\quad G=\frac{F'}{r}, \qquad (3.70)$$

где $F=g'r+2g-f''-\dfrac{f'}{r}$, а $G=\dfrac{f''}{r^2}-\dfrac{f'}{r^3}-\dfrac{g'}{r}$. С учетом соотношения (3.67), имеем:

$$F=g'r+2g-f''-\frac{f'}{r}=$$

$$=g'r+2g+g''r^2+2rg'+4g'r+4g+g'r+4g=$$

$$=g''r^2+8g'r+10g,$$

$$G=\frac{f''}{r^2}-\frac{f'}{r^3}-\frac{g'}{r}= \qquad (3.71)$$

$$=-\frac{g''r^2+2rg'+4g'r+4g}{r^2}+\frac{g'r^2+4gr}{r^3}-\frac{g'}{r}=$$

$$=-g''-6\frac{g'}{r}-4\frac{g}{r^2}+\frac{g'}{r}+4\frac{g}{r^2}-\frac{g'}{r}=-g''-6\frac{g'}{r}.$$

Уравнение (3.70) принимает вид:

$$-g'' - 6\frac{g'}{r} = \frac{\left[g''r^2 + 8g'r + 10g\right]'}{r} =$$

$$= \frac{g'''r^2 + 2g''r + 8g''r + 8g' + 10g'}{r} = \tag{3.72}$$

$$= g'''r + 11g'' + 24\frac{g'}{r} = 0.$$

Уравнение (3.72) является обыкновенным дифференциальным уравнением типа Бернулли второго порядка относительно функции g', а это значит, что его решение может быть найдено тем же способом, что для идеальной жидкости: $g' = Cr^{\alpha}$, $g'' = \alpha C r^{\alpha-1}$, $g''' = \alpha(\alpha-1)Cr^{\alpha-2}$. Подставляя в (3.72), получим уравнение для показателя α:

$$Cr^{\alpha-1}\left(\alpha(\alpha-1) + 11\alpha + 24\right) = Cr^{\alpha-1}\left(\alpha^2 + 10\alpha + 24\right) = 0\,. \tag{3.73}$$

Уравнение (3.73) имеет два решения: $\alpha_1 = -6$, $\alpha_2 = -4$. Тогда общее решение уравнения (3.72):

$$g' = A_1 r^{-6} + B_1 r^{-4} \Rightarrow g = Ar^{-5} + Br^{-3} + C\,. \tag{3.74}$$

Здесь A, B, C – константы интегрирования, которые должны быть определены из граничных условий. Найдем функцию $f(r)$ из соотношения (3.67):

$$f' = -g'r^2 - 4gr = 5\frac{A}{r^4} + 3\frac{B}{r^2} - 4\frac{A}{r^4} - 4\frac{B}{r^2} - 4C =$$

$$= \frac{A}{r^4} - \frac{B}{r^2} - 4C, \tag{3.75}$$

$$f = -\frac{A}{3r^3} + \frac{B}{r} - 4Cr + D.$$

Найдем константы интегрирования A, B, C, D. Для этого подставим полученное решение в граничное условие на поверхности шара:

$$\vec{u}\big|_{r=R} = \vec{U}\cdot\vec{n}f(r) + g(r)(\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r}\cdot\vec{n} \Rightarrow$$

$$f(R) = -\frac{A}{3R^3} + \frac{B}{R} - 4CR + D = 0, \qquad (3.76)$$

$$g(R) = \frac{A}{R^5} + \frac{B}{R^3} + C = 0.$$

В задаче с учетом вязкости уравнения имеют более высокий порядок, потому приходится ставить более сильное условие. Теперь не только нормальная компонента скорости должна быть равна нулю (т.е. жидкость не проникает внутрь шара), но и касательная – благодаря вязкости жидкость «прилипает» к поверхности шара. Поэтому полное значение скорости должно быть равно нулю, что эквивалентно равенству нулю обеих функций f и g. На бесконечности имеем:

$$\lim_{r\to\infty}\vec{u} = \lim_{r\to\infty}\left(\vec{U}f(r) + g(r)(\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r}\right) = \vec{U}, \Rightarrow$$

$$\lim_{r\to\infty} g(r) = \lim_{r\to\infty}\left(\underbrace{Ar^{-5}}_{0} + \underbrace{Br^{-3}}_{0} + C\right) = C = 0, \qquad (3.77)$$

$$\lim_{r\to\infty} f(r) = \lim_{r\to\infty}\left(-\underbrace{\frac{A}{3r^3}}_{0} + \underbrace{\frac{B}{r}}_{0} - 4\underbrace{C}_{0}r + D\right) = D = 1.$$

С учетом (3.76) имеем:

$$\frac{A}{R^5} + \frac{B}{R^3} = 0 \Rightarrow A = -BR^2 \Rightarrow A = \frac{3}{4}R^3,$$

$$-\frac{A}{3R^3} + \frac{B}{R} = -1 \Rightarrow \frac{B}{3} + B = \frac{4}{3}B = -R \Rightarrow B = -\frac{3}{4}R, \qquad (3.78)$$

$$g = \frac{3}{4}\left(\frac{R^3}{r^5} - \frac{R}{r^3}\right), \quad f = 1 - \frac{R^3}{4r^3} - \frac{3R}{4r}.$$

Окончательно для скорости течения получаем:

$$\vec{u} = \vec{U}\left(1 - \frac{R^3}{4r^3} - \frac{3R}{4r}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{R^3}{r^5} - \frac{R}{r^3}\right)(\vec{U}\cdot\vec{r})\vec{r}\,. \qquad (3.79)$$

3.12. Сила Стокса

Найдем теперь силу, действующую на шар при его обтекании потоком вязкой жидкости в форме (3.79). Сила может быть определена как интеграл по поверхности сферы от возникающих напряжений. Поскольку тензор напряжений дается выражением $\sigma_{ik} = \sigma'_{ik} - P\delta_{ik}$, компоненты силы равны

$$F_i = \oiint\limits_s \left(\sigma'_{ik} - P\delta_{ik}\right) n_k dS = \oiint\limits_s \left(\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) - P\delta_{ik}\right)\frac{x_k}{R} dS. \quad (3.80)$$

Найдем давление для вычисления силы из уравнения (3.61) с учетом отсутствия нелинейного члена:

$$\frac{1}{\rho}\nabla P = \nu\Delta\vec{u} \Rightarrow \nabla P = \eta\Delta\vec{u} = -\eta\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} =$$

$$= -\eta\left[F\vec{U} + G\left(\vec{U}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}\right],$$

$$F = g''r^2 + 8g'r + 10g, \quad G = -g'' - 6\frac{g'}{r},$$

$$g = \frac{3}{4}\left(\frac{R^3}{r^5} - \frac{R}{r^3}\right), \quad g' = \frac{3}{4}\left(-\frac{5R^3}{r^6} + \frac{3R}{r^4}\right), \quad g'' = \frac{3}{4}\left(\frac{30R^3}{r^7} - \frac{12R}{r^5}\right),$$

$$G = -g'' - 6\frac{g'}{r} = -\frac{3}{4}\left(\frac{30R^3}{r^7} - \frac{12R}{r^5}\right) -$$

$$-\frac{18}{4}\left(-\frac{5R^3}{r^7} + \frac{3R}{r^5}\right) = -\frac{18}{4}\frac{R}{r^5},$$

$$F = g''r^2 + 8g'r + 10g =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{15R^3}{r^5} - \frac{6R}{r^3}\right)r^2 + 6\left(-\frac{5R^3}{r^5} + \frac{3R}{r^3}\right) + \frac{15}{2}\left(\frac{R^3}{r^5} - \frac{R}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{R^3}{r^5}\left(\frac{45}{2} - 30 + \frac{15}{2}\right) + \frac{R}{r^3}\left(-\frac{18}{2} + 18 - \frac{15}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{R}{r^3}, \quad (3.81)$$

$$\nabla P = \eta\Delta\vec{u} = -\eta\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = -\eta\left[\frac{3}{2}\frac{R}{r^3}\vec{U} - \frac{18}{4}\frac{R}{r^5}\left(\vec{U}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}\right].$$

Перепишем последнее выражение в индексной форме:

$$\frac{\partial}{\partial x_s}P = -\eta\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}u\right]_s = \eta\frac{\partial}{\partial x_s}\left[h(r)x_qU_q\right] =$$

$$= \eta\left(h'\frac{x_s}{r}x_qU_q + hU_s\right),$$

$$\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}u\right]_s = \frac{3}{2}\frac{R}{r^3}U_s - \frac{9}{2}\frac{R}{r^5}U_qx_qx_s = h'\frac{x_s}{r}x_qU_q + hU_s,$$

$$h = \frac{3}{2}\frac{R}{r^3},\quad \frac{h'}{r} = -\frac{9}{2}\frac{R}{r^4}, \tag{3.82}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_s}P = -\frac{\partial}{\partial x_s}\left[\eta h(r)x_qU_q\right],$$

$$P = P_0 - \eta h(r)x_qU_q = P_0 - \eta\frac{3}{2}\frac{R}{r^3}x_qU_q.$$

Для тензора вязких напряжений имеем:

$$\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = \eta U_i f'\frac{x_k}{r} + \eta g'\frac{x_k}{r}\left(U_jx_j\right)x_i +$$

$$+\eta g\left(U_jx_j\right)\delta_{ik} + \eta gU_kx_i + \eta u_k f'\frac{x_i}{r} + \eta g'\frac{x_k}{r}\left(u_jx_j\right)x_i + \tag{3.83}$$

$$+\eta g\left(u_jx_j\right)\delta_{ik} + \eta gu_ix_k.$$

Найдем вклад в силу, связанный с тензором (3.83):

$$\oiint_s \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\frac{x_k}{R}dS =$$

$$= \oiint_s \eta\left(U_i f'\frac{x_kx_k}{R^2} + g'\frac{x_kx_k}{R^2}U_jx_jx_i + \right.$$

$$\left. +gU_jx_j\delta_{ik}\frac{x_k}{R} + gU_kx_i\frac{x_k}{R}\right)dS +$$

$$+\oiint_s \eta\left(U_k f'\frac{x_ix_k}{R^2} + g'\frac{x_kx_k}{R^2}U_jx_jx_i + \right.$$

$$\left. +gU_jx_j\delta_{ik}\frac{x_k}{R} + gU_ix_k\frac{x_k}{R}\right)dS =$$

$$=\oiint_s \eta\left(U_i f' + g' U_j x_j x_i + g U_j x_j \frac{x_i}{R} + g U_k x_k \frac{x_i}{R}\right) dS +$$

$$+\oiint_s \eta\left(U_k f' \frac{x_i x_k}{R^2} + g' U_j x_j x_i + g U_j x_j \frac{x_i}{R} + g U_i R\right) dS =$$

$$=\oiint_s \eta\left(U_i f' + 2g'\left(U_j x_j\right) x_i + 3g\left(U_j x_j\right)\frac{x_i}{R} + \right. \tag{3.84}$$

$$\left. +\left(U_k x_k\right) f' \frac{x_i}{R^2} + grU_i\right) dS =$$

$$=\oiint_s \eta\left(U_i\left(f' + gR\right) + \left(U_j x_j\right) x_i \left(2g' + 3\frac{g}{R} + \frac{f'}{R^2}\right)\right) dS.$$

Подставим известные функции f и g (3.78):

$$g = \frac{3}{4}\left(\frac{R^3}{r^5} - \frac{R}{r^3}\right),$$

$$f = 1 - \frac{R^3}{4r^3} - \frac{3R}{4r}.$$

$$\left(f' + gr\right)\Big|_{r=R} = \left[\frac{3R^3}{4r^4} + \frac{3R}{4r^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{R^3}{r^4} - \frac{R}{r^2}\right)\right]\Bigg|_{r=R} =$$

$$= \frac{3R^3}{2R^4} = \frac{3}{2R},$$

$$\left(2g' + 3\frac{g}{r} + \frac{f'}{r^2}\right)\Bigg|_{r=R} = \tag{3.85}$$

$$= \left(\frac{6}{4}\left(\frac{-5R^3}{r^6} + \frac{3R}{r^4}\right) + \frac{9}{4}\left(\frac{R^3}{r^6} - \frac{R}{r^4}\right) + \frac{3R^3}{4r^6} + \frac{3R}{4r^4}\right)\Bigg|_{r=R} = -\frac{3}{2R^3}.$$

Подставляя полученные выражения в интеграл (3.84) и добавляя вклад давления в силу в форме (3.80), получаем:

$$F_i = \oiint_s \left(\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - P\delta_{ik} \right) \frac{x_k}{R} dS =$$

$$= \oiint_s \eta \left(U_i \left(f' + gR \right) + \left(U_j x_j \right) x_i \left(2g' + 3\frac{g}{R} + \frac{f'}{R^2} \right) \right) dS -$$

$$- \oiint_s \left(P_0 \delta_{ik} - \eta \frac{3}{2} \frac{R}{R^3} x_q U_q \delta_{ik} \right) \frac{x_k}{R} dS =$$

$$= \oiint_s \eta \left(U_i \frac{3}{2R} - \frac{3}{2R^3} \left(U_j x_j \right) x_i \right) dS - \tag{3.86}$$

$$- \oiint_s \left(P_0 \frac{x_i}{R} - \eta \frac{3}{2} \frac{x_i}{R^3} x_q U_q \right) dS =$$

$$= \eta U_i \frac{3}{2R} \oiint_s dS - \frac{3\eta}{2R^3} \oiint_s U_j x_j x_i dS +$$

$$+ \frac{3\eta}{2R^3} \oiint_s U_j x_j x_i dS - \oiint_s P_0 \frac{x_i}{R} dS =$$

$$= \eta U_i \frac{3}{2R} \oiint_s dS - \frac{P_0}{R} \underbrace{\oiint_s x_i dS}_{0} = \eta U_i \frac{3}{2R} \oiint_s dS =$$

$$= \eta U_i \frac{3}{2R} 4\pi R^2 = 6\pi R^2 \eta U_i .$$

Окончательно, сила Стокса, связанная с вязким трением, определяется соотношением:

$$\vec{F} = 6\pi R^2 \eta \vec{U} . \tag{3.87}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. Изд. 3-е. М.: Физматлит, 2005. 304 с.
2. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности. Изд. 4-е. СПб.: Лань, 2010. 480 с.
3. Речкалов В. Г. Векторная и тензорная алгебра для будущих физиков и техников: учеб. пособие для вузов. Челябинск: ИИУМЦ «Образование», 2008. 140 с.
4. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу. Изд. 3-е. М.: изд-во МГУ, 1986. 264 с.
5. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике, физике / пер. с англ.; под ред. Г. В. Коренева. М.: Физматгиз, 1963. 411 с.
6. Димитренко Ю. И. Тензорное исчисление: учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001. 575 с.
7. Коренев Г. В. Тензорное исчисление: учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во МФТИ, 2000. 240 с.
8. Любимов Д. В., Марышев Б. С., Циберкин К. Б. Векторный и тензорный анализ: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2016. 92 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов: в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 5-е изд., стереот М.: Физматлит. 2001. 736 с.

Учебное издание

Марышев Борис Сергеевич
Циберкин Кирилл Борисович

**Механика сплошных сред:
методы тензорного анализа**

Учебное пособие

Редактор *А. С. Серебреников*
Корректор *С. А. Вороненко*
Компьютерная верстка: *К. Б. Циберкин*

Подписано в печать 23.08.2022. Формат 60×84/16
Усл. печ. л. 5,7. Тираж 300 экз. Заказ 133

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета.
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография ПГНИУ.
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15