

ПЕРМСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

А. Е. Самойлова, А. О. Иванцов

**СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЙ  
АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ  
ГИДРОДИНАМИКИ**



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Е. Самойлова, А. О. Иванцов

# СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ

*Допущено методическим советом  
Пермского государственного национального  
исследовательского университета в качестве  
учебного пособия для студентов, обучающихся  
по направлению подготовки магистров  
«Физика»*



Пермь 2021

УДК 532(075.8)  
ББК 22.253.3я73  
С172

**Самойлова А. Е.**

С172 Слабонелинейный анализ в задачах гидродинамики [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Е. Самойлова, А. О. Иванцов ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2021. – 1,73 Мб ; 96 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/samojlova-ivancov-slabonelinejnyj-analiz-v-zadachah-gidrodinamiki.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3706-5

В данном пособии излагаются основы метода слабонелинейного анализа динамических систем на примере нескольких известных задач теории гидродинамической устойчивости (конвекция Рэлея-Бенара в замкнутых полостях, конвекция Марангони в тонкой пленке, устойчивость адвективного течения, длинноволновая конвекция). Показано применение в таких задачах метода многих масштабов, разложения по малому параметру, бифуркационного анализа.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по гидродинамике.

**УДК 532(075.8)**  
**ББК 22.253.3я73**

*Издается по решению ученого совета физического факультета  
Пермского государственного национального исследовательского университета*

*Рецензенты:* кафедра общей физики Пермского национального исследовательского политехнического университета (зав. кафедрой, д-р физ.-мат. наук, доцент **А. В. Перминов**);

научный сотрудник лаборатории вычислительной гидродинамики института механики сплошных сред УрО РАН, канд. физ.-мат. наук **О. А. Хлыбов**

ISBN 978-5-7944-3706-5

© Самойлова А. Е., Иванцов А. О., 2021  
© ПГНИУ, 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>От авторов</b> .....	4
<b>Основные обозначения</b> .....	6
<b>1. Слабонадкритическая конвекция в замкнутых областях</b> ...	7
1.1. Постановка задачи устойчивости равновесия.....	7
1.2. Основы слабонелинейного анализа устойчивости.....	9
1.3. Условие разрешимости неоднородных задач.....	13
1.4. Сопряженная задача.....	18
1.5. Амплитудное уравнение.....	21
1.6. Динамика системы вблизи точки бифуркации.....	24
1.7. Слабонадкритическая конвекция в квадрате, подогреваемом снизу.....	29
<b>2. Слабонелинейный анализ конвективных течений в незамкнутых системах</b> .....	35
2.1. Неустойчивость Экхауза.....	35
2.2. Слабонелинейный анализ длинноволновых режимов конвекции.....	42
<b>3. Слабонелинейный анализ устойчивости адвективного течения в слое</b> .....	49
3.1. Постановка задачи устойчивости термоакустического течения.....	49
3.2. Вывод и анализ амплитудного уравнения.....	55
3.3. Вычисление коэффициентов амплитудного уравнения.....	67
3.4. Сравнение с прямым численным моделированием.....	73
<b>4. Слабонелинейный анализ конвективной устойчивости тонких плёнок жидкости</b> .....	79
4.1. Приближение тонких пленок.....	81
4.2. Характерные значения параметров задачи.....	84
4.3. Уравнения длинноволновой конвекции в пленке со слабой теплоотдачей со свободной поверхности.....	85
4.4. Вывод амплитудных уравнений.....	88
<b>Библиографический список</b> .....	94

## ОТ АВТОРОВ

Слабонелинейный анализ является мощным инструментом для исследования сложного нелинейного поведения различных систем. Гидродинамические системы являются хорошим примером таких систем, где при помощи слабонелинейного анализа можно получить важные результаты, не прибегая к громоздкому численному моделированию. В теории конвективной неустойчивости при помощи слабонелинейного анализа можно изучать поведение системы вблизи порога возникновения конвекции, а также устойчивость конвективных течений при конечных надкритичностях. Как следует из названия этого метода, его применение возможно только при небольших нелинейностях.

Критические параметры возникновения конвекции, или порог потери устойчивости течения, могут быть найдены в рамках линейного анализа устойчивости, который, однако, не описывает динамику системы после начала развития неустойчивости. С другой стороны, решение полных нелинейных уравнений сопряжено с большими математическими трудностями и требует больших вычислительных мощностей. Слабонелинейный анализ позволяет учесть влияние нелинейных эффектов, предполагая при этом, что нелинейные слагаемые в уравнениях малы. Полученные в результате анализа решения корректно описывают поведение системы вблизи точек бифуркации – точек потери устойчивости. Малость этих нелинейностей позволяет получить существенно более простые уравнения для описания динамики системы вблизи положения равновесия.

Необходимо отметить, что в пособии используются различные теоремы линейной алгебры, тензорного анализа и теории функции комплексного переменного. При этом предполагается, что читатель знаком с вышеназванными дисциплинами, поэтому доказательства используемых теорем не приводятся, а только даются ссылки на литературные источники, с помощью

которых можно подробнее изучить соответствующие разделы математики.

Целью настоящего пособия является изложение метода слабонелинейного анализа на примере различных задач теории конвективной устойчивости. Рассмотрены особенности анализа монотонных и колебательных мод неустойчивости, а также основные виды амплитудных уравнений, описывающих поведение системы после начала развития неустойчивости.

*Авторы посвящают данное пособие памяти их учителей Любимова Дмитрия Викторовича и Шкляева Сергея Викторовича, которые читали на кафедре теоретической физики Пермского государственного университета большое количество курсов, связанных с применением метода слабонелинейного анализа. Лекции Сергея Викторовича и Дмитрия Викторовича во многом определили содержание данного пособия.*

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\vec{v} = (u, v, w)$	вектор скорости жидкости
$T$	температура жидкости
$p$	давление жидкости
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	единичные векторы осей $X, Y, Z$ , соответственно
$\nu$	кинематическая вязкость
$\eta$	динамическая вязкость
$\chi$	температуропроводность
$\rho$	плотность жидкости
$g$	гравитационное ускорение
$L$	характерный размер
$\Theta$	характерный перепад температуры
$\beta$	коэффициент объемного расширения жидкости: $\rho = \rho_0 (1 - \beta T)$
$\psi$	функция тока
$\varphi$	завихренность

# 1. СЛАБОНАДКРИТИЧЕСКАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЗАМКНУТЫХ ОБЛАСТЯХ

В настоящей главе описано применение метода слабонелинейного анализа для задач о конвективной устойчивости жидкости в замкнутых областях произвольной геометрии. Рассматриваются основные теоретические результаты, которые удастся получить в данном случае. Примеры решения задач для конкретных геометрий замкнутых полостей даются в следующих главах.

## 1.1. Постановка задачи устойчивости равновесия

Рассмотрим замкнутую область неравномерно нагретой жидкости с такими граничными условиями, чтобы было возможно состояние равновесия. Безразмерные уравнения свободной конвекции в приближении Буссинеска имеют вид [1]:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \Delta \vec{v} + \text{Ra} T \vec{k}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \Delta T, \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\vec{k}$  – единичный вектор, направленный вверх. На границе области  $\Gamma$  ставятся стандартные условия прилипания жидкости,  $\vec{v}|_{\Gamma} = 0$ . Температура на границе постоянна по времени и линейно зависит от вертикальной координаты, т.е. на границах задается постоянный вертикальный градиент температуры  $A$ :

$$T|_{\Gamma} = Az. \quad (4)$$



Параметры подобия данной задачи: число Прандтля и число Рэлея,

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \text{Ra} = \frac{g\beta AL^4}{\nu\chi}.$$

Задача имеет решение, соответствующее положению равновесия – состоянию, когда течение жидкости отсутствует. Как несложно убедиться, данное решение записывается в виде:

$$T_0 = Az, \quad p_0 = 0, \quad \vec{v}_0 = 0. \quad (5)$$

Исследуем устойчивость данного положения равновесия для того, чтобы определить, при каких параметрах задачи возникнет конвективное течение. Вначале кратко опишем линейный анализ устойчивости, затем изучим основы слабонелинейного анализа и разберем, какую дополнительную информацию о поведении системы вблизи точки бифуркации можно получить с помощью него.

Для проведения анализа устойчивости положения равновесия необходимо рассмотреть отклонения от основного состояния (возмущения положения равновесия):  $T = T_0 + T'$ ,  $p = p_0 + p'$ ,  $\vec{v} = \vec{v}'$ . Вследствие того, что мы изучаем поведение системы вблизи положения равновесия, возмущения можно считать малыми. Подставляя в уравнения (1)–(3), получим уравнения конвекции для возмущений

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \vec{v}' \cdot \nabla \vec{v}' \right) = -\nabla p' + \Delta \vec{v}' + \text{Ra} T' \vec{k}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{v}' \cdot \nabla T' = \Delta T', \quad (7)$$

$$\text{div} \vec{v}' = 0. \quad (8)$$

Предполагаемая малость возмущений позволяет отбросить в данных уравнениях все нелинейные члены. В результате получим задачу о линейной устойчивости. Как известно, в рамках линейной теории устойчивости можно определить критические (пороговые) параметры возникновения конвекции. При значениях числа Рэлея, меньших некоторого порогового значения  $Ra_0$ , все возмущения убывают; при  $Ra > Ra_0$  возмущения экспоненциально нарастают, развивается неустойчивость. При этом, в случае нагрева снизу ( $Ra_0 > 0$ ) возмущения выше порога устойчивости нарастают *монотонно* по экспоненциальному закону, при нагреве сверху ( $Ra_0 < 0$ ) возмущения всегда *колебательно* затухают. Очевидно, что экспоненциальный рост физических величин – это недостаток линейной теории, он нефизичен. Другими словами, в рамках линейного анализа устойчивости невозможно определить интенсивность течения даже вблизи порога устойчивости. Кроме того, возникающее конвективное течение может также оказаться неустойчивым даже в непосредственной близости к точке бифуркации. Слабонелинейный анализ позволяет выйти за пределы этих ограничений и выяснить, что на самом деле происходит с системой вблизи порога возникновения конвекции.

## 1.2. Основы слабонелинейного анализа устойчивости

Центральная идея слабонелинейного анализа – это разложение всех физических величин в ряды по малому параметру  $\varepsilon$  (ниже мы опустим штрихи у возмущений:  $p' \rightarrow p$ ,  $\vec{v}' \rightarrow \vec{v}$ ,  $T' \rightarrow T$ ):

$$\vec{v} = \varepsilon \vec{v}_1 + \varepsilon^2 \vec{v}_2 + \dots, \quad T = \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots, \quad p = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \quad (9)$$

Можно также разложить в ряд число Рэлея:

$$Ra = Ra_0 + \varepsilon Ra_1 + \varepsilon^2 Ra_2 + \dots \quad (10)$$

В этом случае смысл малого параметра  $\varepsilon$  – надкритичность. Этот параметр показывает, насколько число Релея превышает критическое значение.

Другой важной идеей слабонелинейного анализа является применение метода многих масштабов. В соответствии с этим методом все процессы вблизи порога возбуждения конвекции можно разделить на «медленные» (нарастание возмущений) и «быстрые» (период колебаний критических возмущений). Тогда производные по времени можно разложить в ряд по малому параметру:

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 \dots, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial t_j}. \quad (11)$$

Далее нужно подставить разложения (9)–(11) в уравнения (6)–(8) и собрать слагаемые в каждом порядке по  $\varepsilon$ . В нулевом порядке мы получим тривиальное решение, которое соответствует основному состоянию механического равновесия.

Разложения (9)–(11) требуют выполнения определенных условий для своей пригодности. Особенности, возникающие в высших порядках по  $\varepsilon$ , не должны превосходить особенности первого члена разложения. Это значит, что секулярные (вековые) слагаемые должны исключаться. Как будет показано ниже, задача первого порядка – линейная однородная, тогда как в высших порядках возникают неоднородные краевые задачи. Известно, что неоднородные задачи не обязаны разрешаться в общем случае, поэтому необходимо потребовать выполнения дополнительных условий их разрешимости. Следует отметить, что данные условия разрешимости неоднородных систем высших порядков очень важны и позволяют получить наиболее яркие результаты слабонелинейного анализа.

В первом порядке по  $\varepsilon$  получаются следующие линейные однородные уравнения:

$$\frac{1}{\text{Pr}} D_0 \vec{v}_1 = -\nabla p_1 + \Delta \vec{v}_1 + \text{Ra}_0 T_1 \vec{k}, \quad (12)$$

$$D_0 T_1 = \Delta T_1 + \vec{k} \cdot \vec{v}_1, \quad (13)$$

$$\text{div} \vec{v}_1 = 0, \quad (14)$$

которые, очевидно, совпадают с задачей о линейной устойчивости рассматриваемой системы. Как известно, решением линейных однородных дифференциальных уравнений может быть экспонента:

$$\vec{v}_1 = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j e^{\lambda_j t_0}, \quad T_1 = \sum_{j=1}^n \hat{T}_j e^{\lambda_j t_0}, \quad p_1 = \sum_{j=1}^n \hat{p}_j e^{\lambda_j t_0} \quad (15)$$

где  $t_0$  – «быстрое» время (см. (11)), функции  $\hat{v}_j$ ,  $\hat{T}_j$ ,  $\hat{p}_j$  не зависят от  $t_0$ ,  $\lambda_j$  – инкремент возмущений, являющийся в общем случае комплексным числом. Здесь суммирование проводится по частным решения системы (12)–(14).

Если действительная часть инкремента положительна, то возмущение с соответствующим  $\lambda_j$  нарастает со временем, если отрицательна – затухает. Границе устойчивости соответствует случай, когда действительная часть как минимум одного инкремента равна нулю, в то время как другие инкременты имеют отрицательную действительную часть.

Далее в настоящем разделе мы будем рассматривать только монотонные возмущения (колебательные возмущения изучаются в разделе 4). В этом случае инкремент возмущений  $\lambda_j$  является действительным числом, а границе устойчивости соответствует ситуация, когда один из инкрементов равен нулю,  $\lambda_{cr} = 0$ , а другие отрицательны, следовательно соответствующие возмущения затухают со временем. Возмущение, инкре-

мент которого  $\lambda_{cr} = 0$ , называют *критическим возмущением*, потому что именно оно приводит к развитию неустойчивости.

Исследуя поведение системы вблизи границы устойчивости, мы можем считать, что все возмущения с  $\lambda_j < 0$  затухли. Критическое возмущение не зависит от «быстрого» времени  $t_0$  вследствие того, что  $\lambda_{cr} = 0$ . В результате, при анализе монотонных возмущений решение задачи первого порядка не зависит от  $t_0$  и может быть записано в виде:

$$\bar{v}_1 = C(t_1, t_2, \dots) \bar{V}, \quad T_1 = C(t_1, t_2, \dots) \theta, \quad p_1 = C(t_1, t_2, \dots) P. \quad (16)$$

Функция огибающей  $C(t_1, t_2, \dots)$ , называемая также амплитудной функцией, характеризует амплитуду конвективных течений. Слабонелинейный анализ позволяет вывести одномерное уравнение для амплитудной функции, описывающее динамику системы вблизи точки бифуркации.

В результате получим следующую однородную систему уравнений:

$$-\nabla p_1 + \Delta \bar{v}_1 + \text{Ra}_0 T_1 \bar{k} = 0, \quad (17)$$

$$\Delta T_1 + \bar{k} \cdot \bar{v}_1 = 0, \quad (18)$$

$$\text{div} \bar{v}_1 = 0. \quad (19)$$

Уравнения (17)–(19) для возмущений необходимо дополнить граничными условиями. На границах области возмущения скорости, давления и температуры должны быть равны нулю, потому что граничные условия уже учтены при написании решения (5), описывающего положение равновесия:

$$\bar{v}_1|_{\Gamma} = 0, \quad p_1|_{\Gamma} = 0, \quad T_1|_{\Gamma} = 0. \quad (20)$$

Заметим, что полученная задача значительно более простая, чем исходные уравнения тепловой конвекции (1)–(3). В

дальнейшем будем предполагать, что нам удалось решить задачу линейной устойчивости (17)–(20) аналитически либо численно (пример численного решения подобных задач описан в секции 3.3).

Во втором порядке по малому параметру  $\varepsilon$  получаем неоднородную систему линейных уравнений:

$$-\nabla p_2 + \Delta \vec{v}_2 + \text{Ra}_0 T_2 \vec{k} = \frac{1}{\text{Pr}} (D_1 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{v}_1) - \text{Ra}_1 T_1 \vec{k}, \quad (21)$$

$$\Delta T_2 + \vec{k} \cdot \nabla_2 = D_1 T_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla T_1, \quad (22)$$

$$\text{div} \vec{v}_2 = 0. \quad (23)$$

Здесь учтено, что решения второго порядка  $\vec{v}_2$ ,  $T_2$ ,  $p_2$  не зависят от «быстрого» времени  $t_0$ . Действительно, неоднородности содержат только решения задачи первого порядка  $\vec{v}_1$ ,  $T_1$ , которые не зависят от  $t_0$ , таким образом, частные решения второго порядка не будут зависеть от  $t_0$ . Общее решение второго порядка также не зависит от «быстрого времени», так как однородная часть уравнений (21)–(23) имеет тот же вид, что линейные уравнения (12)–(13). Как видно из (21)–(23), однородная часть системы во втором порядке совпадает с задачей о линейной устойчивости, полученной в первом порядке по  $\varepsilon$ . Данная закономерность является особенностью используемых методов разложения по малому параметру и присуща всем задачам, получаемым в высших по  $\varepsilon$  порядках.

### 1.3. Условие разрешимости неоднородных задач

Как известно, неоднородные уравнения не обязаны решаться. Определим условия разрешимости уравнений (21)–(23). Данная неоднородная система может быть представлена в матричном виде. Для удобства будем использовать обозначения

Дирака, обычно применяемые в квантовой механике. В результате систему (21)–(23) можно записать в виде:

$$\hat{L}|X_2\rangle = |F\rangle, \quad (24)$$

где  $|X_2\rangle$  – вектор решений:

$$|X_2\rangle = \begin{pmatrix} \vec{v}_2 \\ T_2 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$\hat{L}$  – линейный дифференциальный (матричный) оператор:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \Delta & \text{Ra}_0 \vec{k} & -\nabla \\ \vec{k} \cdot & \Delta & 0 \\ \nabla \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$|F\rangle$  – вектор правых частей:

$$|F\rangle = \begin{pmatrix} (D_1 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{v}_1) / \text{Pr} - \text{Ra}_1 T_1 \vec{k} \\ D_1 T_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla T_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Необходимо отметить, что при написании формул (26)–(27) поле скорости записывалось в векторном виде в отличие от скалярных температуры и давления. В результате удастся записать формулы (26)–(27) в более кратком виде, но компоненты матриц могут быть как скалярными, так и векторными. Следует иметь в виду, что эта сокращенная форма записи используется только для удобства, и формулы (26)–(27) эквивалентны более подробным выражениям. В этом случае решение системы (24) может быть записано в виде пяти скалярных функций (три проекции скорости, температура и давление):

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \text{Ra}_0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 & \Delta & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$|X_2\rangle = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ T_2 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad |F\rangle = \begin{pmatrix} (D_1 u_1 + \bar{v}_1 \cdot \nabla u_1) / \text{Pr} \\ (D_1 v_1 + \bar{v}_1 \cdot \nabla v_1) / \text{Pr} \\ (D_1 w_1 + \bar{v}_1 \cdot \nabla w_1) / \text{Pr} - \text{Ra}_1 T_1 \\ D_1 T_1 + \bar{v}_1 \cdot \nabla T_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Заметим, что однородная задача

$$\hat{L}|X_1\rangle = 0 \quad (30)$$

совпадает с задачей (17)–(19), полученной в первом порядке по  $\varepsilon$ , т.е. с задачей о линейной устойчивости системы, если

$$|X_1\rangle = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ T_1 \\ p_1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Таким образом,  $|X_1\rangle$  – решение линейной задачи устойчивости.

Напомним, что в квантовой механике вектор вида  $|A\rangle$  является вектором столбцом, а вектор  $\langle A|$  – вектором строкой. Первый из них называется бра-вектор, второй кет-вектор. Как известно, любой кет-вектор можно легко преобразовать в бра-



вектор и наоборот. Скалярное произведение бра-вектора  $\langle A|$  и кет-вектора  $|B\rangle$  запишется просто  $\langle A|B\rangle$ . При этом в матричном виде необходимо умножить вектор строку на вектор столбец. В результате получаем известную формулу, скалярное произведение равно сумме произведений компонент векторов:  $\langle A|B\rangle = \sum_i A_i B_i$ . В нашем случае, однако, компонентами векторов являются не константы, а функции.

Известно, что для двух непрерывных комплексных функций  $u$  и  $v$ , заданных в некотором объеме  $V$ , можно ввести операцию скалярного произведения следующим образом:  $\int uv^* dV$ . Интеграл берется по всему объему, в котором определены функции, звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения. Если скалярное произведение равно нулю, то такие функции называют ортогональными, по аналогии с векторным скалярным произведением.

Скалярное произведение векторов  $\langle A|$  и  $|B\rangle$ , компонентами которых являются функции, запишется следующим образом:

$$\langle A|B\rangle = \int \sum_i A_i B_i^* dV. \quad (32)$$

Определим операцию сопряжения для линейного оператора  $\hat{L}$  следующим образом:

$$\langle A|\hat{L}|B\rangle = \langle B|\hat{L}^\dagger|A\rangle^*, \quad (33)$$

где  $\hat{L}^\dagger$  – оператор эрмитово сопряженный с  $\hat{L}$ . Заметим, что здесь происходит умножение бра- и кет-векторов, поэтому формула (33) представляет собой скалярное произведение, которое должно быть вычислено по формуле (32).

Используя оператор  $\hat{L}^\dagger$ , можно записать сопряженную однородную задачу:

$$\hat{L}^\dagger |\tilde{X}\rangle = 0, \quad (34)$$

где  $|\tilde{X}\rangle$  – решение сопряженной задачи, которое можно найти тем же методом, что и решение задачи линейной устойчивости (30).

Умножив исходную неоднородную задачу (24) на вектор решений сопряженной задачи, получим

$$\langle \tilde{X} | \hat{L} | X_1 \rangle = \langle \tilde{X} | F \rangle.$$

Применим операцию эрмитового сопряжения к правой части равенства, запишем

$$\langle X_1 | \hat{L}^\dagger | \tilde{X} \rangle^* = \langle \tilde{X} | F \rangle.$$

Легко заметить, что левая часть данного выражения равна нулю вследствие (34). Отсюда следует условие разрешимости:

$$\langle \tilde{X} | F \rangle = 0. \quad (35)$$

Таким образом, условие разрешимости требует ортогональности решения сопряженной задачи и правых частей неоднородной системы. Следует отметить, что при получении условия разрешимости не использовались свойства системы, специфичные для задачи второго порядка по  $\varepsilon$ . Поэтому во всех высших по  $\varepsilon$  порядках условие разрешимости запишется аналогично (35). Более того, сопряжённая задача (34) является однородной и, соответственно, также не зависит от порядка по  $\varepsilon$ . Таким образом, в условии разрешимости задач высших по  $\varepsilon$  порядках необходимо изменить только вектор неоднородностей системы  $|F\rangle$ .

## 1.4. Сопряженная задача

Для того чтобы применить условие разрешимости к рассматриваемой задаче о неустойчивости в замкнутой области жидкости, необходимо вначале получить решение сопряженной задачи. Обозначим решение сопряженной задачи следующим образом:  $\langle \tilde{X} | = (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{T}, \tilde{p})$ .

Определим скалярное произведение функций в нашей задаче:

$$\langle \tilde{X} | X \rangle = \int_V (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \alpha \tilde{T} T + \tilde{p} p) dV = 0, \quad (36)$$

здесь  $\alpha$  – весовой множитель, позволяющий упростить условие разрешимости для данного типа задач. Данное определение для скалярного произведения аналогично написанному ранее в (32).

Сформулируем сопряженную задачу, для этого преобразуем линейную однородную задачу первого порядка (17)–(19) таким образом, чтобы получилось выражение аналогичное левой части формулы (33). Затем преобразуем его к виду правой части (33) и получим требуемый сопряженный оператор  $\hat{L}^\dagger$ .

Умножим линейную однородную задачу (30) слева на вектор решения сопряженной задачи  $\langle \tilde{X} | = (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{T}, \tilde{p})$ . Для этого умножим уравнение (17) на  $\tilde{\mathbf{v}}$ , уравнение (18) умножим на  $\alpha \tilde{T}$ , уравнение (19) на  $\tilde{p}$ , сложим их и проинтегрируем результат по объёму замкнутой области:

$$\begin{aligned} & - \int_V \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla p_1 dV + \int_V \tilde{\mathbf{v}} \cdot \Delta \mathbf{v}_1 dV + \text{Ra}_0 \int_V \tilde{\mathbf{v}} \cdot \vec{k} T_1 dV + \\ & + \alpha \int_V \tilde{T} \Delta T_1 dV + \alpha \int_V \tilde{T} \mathbf{v}_1 \cdot \vec{k} dV + \int_V \tilde{p} \text{div} \mathbf{v}_1 dV = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Теперь преобразуем полученные интегралы с помощью известных формул: правила дифференцирования произведения и теоремы Остроградского-Гаусса, связывающей объемный интеграл с поверхностным. В результате первый интеграл запишется в виде:

$$\int_V \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla p_1 dV = \iint_S p_1 \tilde{\mathbf{v}} \cdot d\vec{S} - \int_V p_1 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} dV . \quad (38)$$

В первом слагаемом правой части тождества (38) интегрирование проводится по замкнутой поверхности, ограничивающей объем  $V$ , т.е. по границам рассматриваемой области. Поэтому под этим интегралом стоит известное значение давления на границе, определяемое из условия (20). В результате рассматриваемый интеграл по поверхности  $S$  будет равен нулю.

Граничные условия для сопряженной задачи должны совпадать с граничными условиями для задачи о линейной теории устойчивости. А именно возмущения скорости, давления и температуры на границе должны обращаться в ноль:

$$\tilde{\mathbf{v}}|_{\Gamma} = 0, \quad \tilde{p}|_{\Gamma} = 0, \quad \tilde{T}|_{\Gamma} = 0 . \quad (39)$$

Аналогичные преобразования нужно выполнить со всеми остальными интегралами. Рассмотрим, например:

$$\begin{aligned} \int_V \tilde{T} \Delta T_1 dV &= \iint_S \tilde{T} \nabla T_1 \cdot d\vec{S} - \iint_S T_1 \nabla \tilde{T} \cdot d\vec{S} + \int_V T_1 \Delta \tilde{T} dV , \\ \int_V \tilde{\mathbf{v}} \Delta \mathbf{v}_1 dV &= \iint_S \tilde{\mathbf{v}} \nabla \mathbf{v}_1 \cdot d\vec{S} - \iint_S \mathbf{v}_1 \nabla \tilde{\mathbf{v}} \cdot d\vec{S} + \int_V \mathbf{v}_1 \Delta \tilde{\mathbf{v}} dV . \end{aligned}$$

Интегралы по замкнутой поверхности в этих формулах также зануляются вследствие граничных условий (20) и (39).

Преобразовав все оставшиеся интегралы, получим:

$$\int_V p_1 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} dV + \int_V \tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \Delta \tilde{\mathbf{v}} dV + \operatorname{Ra}_0 \int_V T_1 \tilde{\mathbf{v}} \cdot \vec{k} dV + \\ + \alpha \int_V T_1 \Delta \tilde{T} dV + \alpha \int_V \tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{k} \tilde{T} dV - \int_V \tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \nabla \tilde{p} dV = 0.$$

Приведем подобные слагаемые:

$$\int_V p_1 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} dV + \int_V T_1 (\alpha \Delta \tilde{T} + \operatorname{Ra}_0 \tilde{\mathbf{v}} \cdot \vec{k}) dV + \\ + \int_V \tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot (\Delta \tilde{\mathbf{v}} + \alpha \vec{k} \tilde{T} - \nabla \tilde{p}) dV = 0. \quad (40)$$

Здесь константы занесены под интегрирование для наглядности. Полученное тождество в общем случае выполняется, если каждый из интегралов равен нулю. Вследствие того, что решение линейной задачи не нулевое, необходимо приравнять нулю подинтегральные функции, умножаемые на  $p_1$ ,  $T_1$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_1$ . В результате получим:

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0. \quad (41)$$

$$\Delta \tilde{T} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \vec{k} = 0, \quad (42)$$

$$-\nabla \tilde{p} + \Delta \tilde{\mathbf{v}} + \operatorname{Ra}_0 \tilde{T} \vec{k} = 0, \quad (43)$$

где в качестве весового множителя выбрано число Релея,  $\alpha = \operatorname{Ra}_0$ .

Как видно, сопряжённая задача совпадает с исходной линейной задачей, поэтому её решение – выражения (16). Такие задачи называют *самосопряжёнными*.

## 1.5. Амплитудное уравнение

Применим условие разрешимости (35) для задачи второго порядка:

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ \vec{V} \cdot \left( \frac{1}{\text{Pr}} D_1 C \vec{V} + \frac{C^2}{\text{Pr}} \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} - \text{Ra}_1 C \theta \vec{k} \right) \right] dV + \\ + \int_{\mathcal{V}} \left[ \theta \text{Ra}_0 (D_1 C \theta + C^2 \vec{V} \cdot \nabla \theta) \right] dV = 0,$$

где учтено решение линейной задачи в виде (16). Рассмотрим отдельно каждое слагаемое. Легко показать, что последнее слагаемое равно нулю:

$$\int_{\mathcal{V}} \theta \vec{V} \cdot \nabla \theta dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{V} \cdot \nabla \theta^2 dV = \frac{1}{2} \oint_S \theta^2 \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (44)$$

так как на границе выполняется условие непротекания. По аналогии доказывается, что

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) dV = 0.$$

Оставшиеся интегралы приводят к выражению:

$$D_1 C \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{1}{\text{Pr}} \vec{V}^2 + \text{Ra}_0 \theta^2 \right) dV = \text{Ra}_1 C \int_{\mathcal{V}} \theta \vec{V} \cdot \vec{k} dV. \quad (45)$$

Подынтегральные выражения здесь не зависят от «медленного» времени  $t_1$ , поэтому (45) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для  $C(t_1)$ . Нормируем это выражение:

$$\int_{\mathcal{V}} \left( \frac{1}{\text{Pr}} \vec{V}^2 + \text{Ra}_0 \theta^2 \right) dV = 1. \quad (46)$$

Знак интеграла в правой части (45) можно определить, рассмотрев уравнение (13):

$$\Delta\theta + \vec{V} \cdot \vec{k} = 0.$$

Умножим его на  $\theta$  и проинтегрируем по объёму замкнутой области:

$$\int_V \theta \vec{V} \cdot \vec{k} dV = - \int_V \theta \Delta \theta dV = \int_V (\nabla \theta)^2 dV > 0. \quad (47)$$

Таким образом, эволюция медленноменяющейся функции  $C$  определяется уравнением:

$$\frac{\partial C}{\partial t_1} = \text{Ra}_1 \beta C, \quad \beta > 0. \quad (48)$$

Решением такого уравнения является экспонента  $C = C_0 \exp(\text{Ra}_1 \beta t_1)$ . Как видно, мы получили тот же результат, что предсказывает линейная теория – экспоненциальный рост возмущений. Следовательно, нелинейность «не сработала», мы слишком далеко отошли от порога. Чтобы получить нетривиальный результат, попытаемся двигаться более мелкими шагами по степени удаления от порога возникновения неустойчивости:  $\text{Ra}_1 = 0$ , так что

$$\text{Ra} = \text{Ra}_0 + \varepsilon^2 \text{Ra}_2.$$

Тогда малый параметр надкритичности  $\varepsilon$  можно определить следующим образом

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\text{Ra} - \text{Ra}_0}{\text{Ra}_2}}. \quad (49)$$

В таком случае  $D_1 = \partial/\partial t_1 = 0$ . Следовательно, в правых частях задачи второго порядка (21)–(23) остаются только квадратичные

по  $C(t_2)$  слагаемые. Поэтому частное решение задачи второго порядка можно представить в виде:

$$\vec{v}_2 = C^2(t_2)\vec{V}_2, \quad T_2 = C^2(t_2)\theta_2, \quad p_2 = C^2(t_2)P_2. \quad (50)$$

После подстановки решений (16) и (50) в уравнения (21)–(23) получим систему неоднородных линейных уравнений в частных производных:

$$-\nabla P_2 + \Delta \vec{V}_2 + \text{Ra}_0 \theta_2 \vec{k} = \frac{1}{\text{Pr}} \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}, \quad (51)$$

$$\Delta \theta_2 + \vec{V}_2 \cdot \vec{k} = \vec{V} \cdot \nabla \theta, \quad (52)$$

$$\text{div} \vec{V}_2 = 0. \quad (53)$$

В дальнейшем будем предполагать, что полученная задача (51)–(53) решена аналитически или численно. Пример аналитического решения данной задачи приведен в секции 1.7, численное решение подобных задач описано в секции 3.3.

Полученное во втором порядке по  $\varepsilon$  амплитудное уравнение не дает новой по сравнению с линейным анализом устойчивости информации. Поэтому необходимо рассмотреть задачу третьего по  $\varepsilon$  порядка, которая имеет следующий вид:

$$-\nabla p_3 + \Delta \vec{v}_3 + \text{Ra}_0 T_3 \vec{k} = \frac{1}{\text{Pr}} (D_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{v}_2 + \vec{v}_2 \cdot \nabla \vec{v}_1) - \text{Ra}_2 T_1 \vec{k}, \quad (54)$$

$$\Delta T_3 + \vec{v}_3 \cdot \vec{k} = D_2 T_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla T_2 + \vec{v}_2 \cdot \nabla T_1. \quad (55)$$

$$\text{div} \vec{V}_3 = 0. \quad (56)$$

Запишем условие разрешимости задачи третьего порядка:



$$\int_V \vec{V} \cdot \left[ \frac{1}{\text{Pr}} D_2 C \vec{V} + \frac{C^3}{\text{Pr}} (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}_2 + \vec{V}_2 \cdot \nabla \vec{V}) - \text{Ra}_2 C \theta \vec{k} \right] dV + \int_V \text{Ra}_0 \theta [D_2 C \theta + \vec{V} \cdot \nabla \theta_2 + \vec{V}_2 \cdot \nabla \theta] dV = 0.$$

Данное выражение можно упростить, учитывая нормировку (46) и граничные условия для скорости и температуры первого порядка:

$$D_2 C + C^3 \int_V \vec{V} \cdot \left( \frac{1}{\text{Pr}} \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}_2 + \vec{V} \cdot \nabla \theta_2 \right) dV - \text{Ra}_2 C \int_V \theta \vec{V} \cdot \vec{k} dV = 0.$$

Таким образом, мы получаем нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию функции  $C$ :

$$D_2 C + a C^3 - \text{Ra}_2 \beta C = 0. \quad (57)$$

Данное уравнение описывает поведение системы вблизи точки бифуркации и является главным результатом слабонелинейного анализа.

Знаки коэффициентов  $a$  и  $\beta$  подлежат определению. Выше было показано, что  $\beta > 0$  (см. (47)). Знак коэффициента  $a$ ,

$$a = \int_V \vec{V} \cdot \left( \frac{1}{\text{Pr}} \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}_2 + \vec{V} \cdot \nabla \theta_2 \right) dV,$$

не определен в общем виде. Однако разные авторы (В.С. Сорокин, В.И. Юдович и др.) исследовали эту проблему и показали, что  $a > 0$ .

## 1.6. Динамика системы вблизи точки бифуркации

Поведение системы, описываемой дифференциальным уравнением (57), удобно изобразить на фазовой плоскости

$\dot{C} - C$  (см. рис. 1.1). Нетрудно показать, что при  $Ra_2 < 0$  существует только одно решение – тривиальное, которое устойчиво и соответствует отсутствию конвекции, т.е. мы находимся в подкритической области.

Знак  $Ra_2$  показывает положение по отношению к порогу возникновения неустойчивости:  $Ra_2 < 0$  – слева от  $Ra_0$ ,  $Ra_2 > 0$  – справа от  $Ra_0$ .

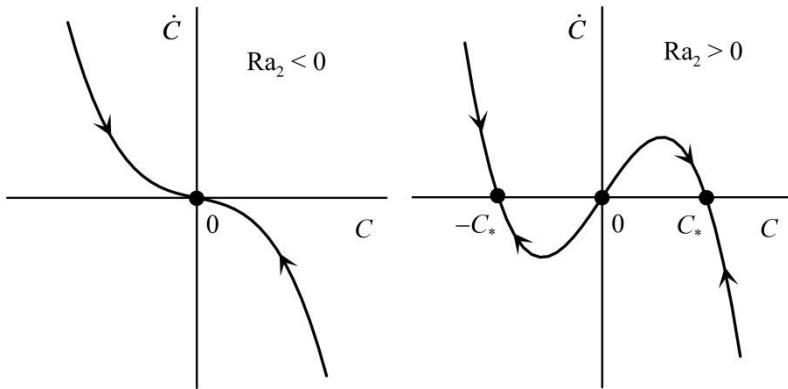


Рис. 1.1. Фазовые портреты

При  $Ra_2 > 0$  появляются два симметричных решения  $\pm C_*$  помимо тривиального:

$$C_* = \sqrt{\frac{\beta Ra_2}{a}}. \quad (58)$$

Эти решения соответствуют возникновению конвекции, т.е. стационарному состоянию с ненулевой амплитудой, значение которой непрерывно растёт от нуля с увеличением надкритичности по т.н. корневому закону Ландау.

Для последующего анализа уравнение (57) удобно переписать. Изменим масштабы медленного времени и величины амплитуды  $C$  так, чтобы получить:

$$\dot{C} + C^3 - rC = 0, \quad (59)$$

где  $r$  – это перенормированная надкритичность, а точкой сверху обозначено дифференцирование по медленному времени  $t_2$ .

Описанный выше сценарий потери устойчивости механического равновесия называется «мягкой» неустойчивостью, он соответствует надкритической вилочной бифуркации (см. рис. 1.2). При этом два решения  $\pm C_*$  соответствуют конвективным течениям с противоположными знаками закрутки.

В реальных системах вилочная бифуркация часто разрушается возникающими дополнительными нелинейностями. Так, зависимость параметров жидкости от температуры (например, вязкости) приводит к двусторонней бифуркации (см. рис. 1.2). Рассмотрим ниже, как разрушается вилочная бифуркация при учете температурной зависимости вязкости.

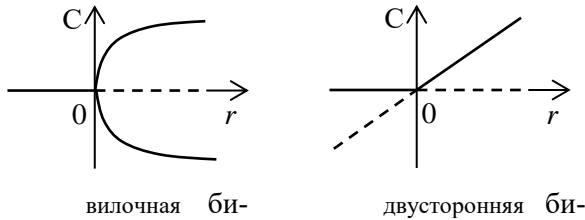


Рис. 1.2. Типы бифуркаций

Из уравнения (1) очевидно, что уже линейная зависимость вязкости от температуры  $\nu = \nu_0(1 + \alpha T)$  приведет к появлению нелинейных членов в уравнениях. Причём, так как  $\nu \Delta \vec{v} \propto T \vec{v}$ , это дополнительное слагаемое квадратично по амплитуде  $C$ .

Следовательно, при учете температурной зависимости вязкости уравнение медленной эволюции амплитуд (59) примет вид

$$\dot{C} + C^3 + \delta C^2 - rC = 0. \quad (60)$$

Фазовый портрет динамической системы, описывающейся данным уравнением, при разных значениях параметра  $\delta$  будет принимать вид, показанный на рис. 1.3.

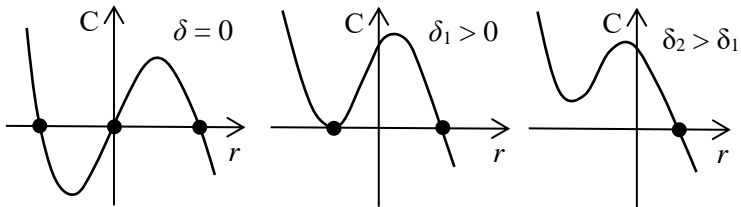


Рис. 1.3. Фазовый портрет при учете зависимости вязкости от температуры

Определим условия, при которых из трёх положений равновесия уравнения (60) останется только одно:

$$3C^2 + 2\delta C - r = 0,$$

$$C^2 + \delta C - r = 0.$$

Откуда

$$C = \frac{2r}{\delta}, \quad r(4r + \delta^2) = 0.$$

Следовательно, количество положений равновесия будет зависеть от параметров  $r$  и  $\delta$ . Очевидно, при  $r > 0$  три стационарных решения уравнения (60) существуют при любых значениях  $\delta$ . При  $r < 0$  соотношение  $r = -\delta^2/4$  разграничивает две области на бифуркационном циферблате: с одним стационарным решением и 3 стационарными решениями (см. рис. 1.4). В

итоге вилочная бифуркация распадается на две: двустороннюю (для  $C > 0$ ) и «рождение и смерть» (для  $C < 0$ ).

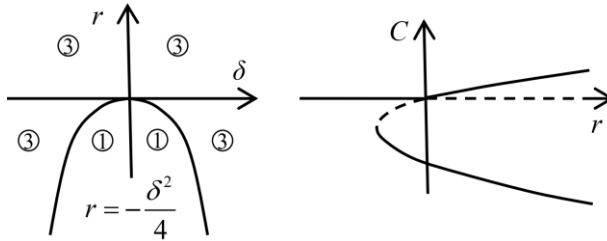


Рис. 1.4. Поведение системы при температурной зависимости вязкости: число положений равновесия (слева) и бифуркационная диаграмма (справа)

Другим примером разрушения вилочной бифуркации вследствие разрушения симметрии данной системы является нарушение строгого вертикального нагрева. Так, даже при слабом боковом нагреве поведение системы значительно изменится. Во-первых, ясно, что механическое равновесие уже будет недостижимо. Во-вторых, вилочная бифуркация, очевидно, будет невозможна. В самом деле, при наличии бокового нагрева  $\varepsilon$  уравнение (59) примет вид:

$$\dot{C} + C^3 - rC + \varepsilon = 0. \quad (61)$$

Рассматривая стационарные точки данного уравнения, можно определить для фиксированного  $\varepsilon$  следующую связь:

$$r = \frac{\varepsilon}{C} + C^2.$$

Это позволяет схематично изобразить кривую, в которую превращается вилочная бифуркация (см. рис. 1.5). Очевидно, что существует только одна бифуркация «рождение-смерть», а также состояние очень близкое к механическому равновесию (в меру малости  $\varepsilon$ ).

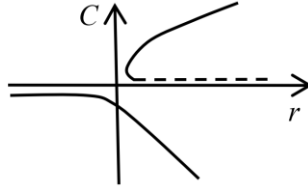


Рис. 1.5. Ветвление решений при слабом боковом нагреве

### 1.7. Слабонадкритическая конвекция в квадрате, подогреваемом снизу

Рассмотрим пример задачи о конвективной устойчивости жидкости в замкнутой полости, имеющей аналитическое решение. Пусть полость имеет квадратную форму, при этом будем считать все стенки непроницаемыми, но свободными от касательных напряжений. Заметим, что все общие выводы, сделанные в предыдущих разделах, будут справедливы для данной конкретной задачи.

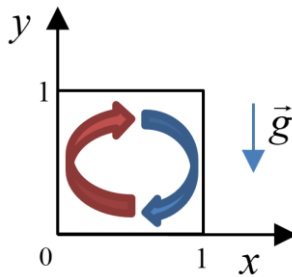


Рис. 1.6. Конвекция в квадратной полости

Уравнения в безразмерном виде (1)–(3) дополняются граничными условиями:

$$x = 0, 1: u = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (62)$$

$$y = 0: v = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, T = 1, \quad (63)$$

$$y = 1: v = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, T = 0. \quad (64)$$

Удобно ввести функцию тока  $\psi$ , так как её изолинии совпадают с линиями тока жидкости:

$$\vec{v} = \text{rot}(\psi \vec{k}) \Rightarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (65)$$

Избавимся от давления в уравнении (1), применив к нему оператор ротора. Спроектировав результат на ось  $Z$ , получим итоговую задачу в терминах функции тока  $\psi$  и завихренности  $\varphi$ :

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi \right) = \Delta \varphi + \text{Ra} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (66)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \Delta T, \quad (67)$$

$$\varphi = -\Delta \psi, \quad (68)$$

$$x = 0, 1: \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad y = 0, 1: T = 1. \quad (69)$$

Граничные условия для функции тока и завихренности вытекают из условий для скорости. Вследствие того, что мы рассматриваем непроницаемые границы, на границах  $\psi = \text{const}$ , более того эту константу можно положить равной нулю благодаря аддитивности функции тока. В силу отсутствия касательных напряжений на границах зануляется и завихренность:

$$\psi|_{\Gamma} = 0, \quad \phi|_{\Gamma} = 0. \quad (70)$$

Краевая задача (66)–(70) допускает существование стационарного решения, соответствующего состоянию механического равновесия с линейным профилем температуры:

$$\psi_0 = 0, \quad T_0 = 1 - y. \quad (71)$$

Рассмотрим возмущения равновесных полей:

$$\psi = \psi', \quad \phi = \phi', \quad T = 1 - y + \mathcal{G}.$$

Задача для монотонных возмущений принимает вид (штрихи у возмущений опущены):

$$\frac{1}{\text{Pr}} \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \phi = \Delta \phi + \text{Ra} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}, \quad (72)$$

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathcal{G} = \Delta \mathcal{G} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (73)$$

$$\phi = -\Delta \psi, \quad (74)$$

$$x = 0, 1: \psi = \phi = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = 0, \quad y = 0, 1: \psi = \phi = \mathcal{G} = 0. \quad (75)$$

Известно решение линейной задачи:

$$\psi = a \sin \pi n x \sin \pi m y,$$

$$\phi = a \pi^2 (n^2 + m^2) \sin \pi n x \sin \pi m y,$$

$$\mathcal{G} = -\frac{a n}{\pi (n^2 + m^2)} \cos \pi n x \sin \pi m y.$$

Нейтральная кривая монотонных возмущений определяется выражением

$$\text{Ra} = \pi^4 \frac{(n^2 + m^2)^3}{n^2}. \quad (76)$$



Как видно, число Рэлея растёт с увеличением  $m$ , поэтому наиболее опасные возмущения соответствуют  $m_{\min} = 1$ . Для таких возмущений минимум нейтральной кривой достигается при  $n_{\min} = 1$  и равен  $\text{Ra}_* = 8\pi^4$ .

Таким образом, наиболее опасные возмущения, приводящие к развитию монотонной неустойчивости, имеют следующий нормированный ( $a = 1$ ) вид:

$$\psi = \sin \pi x \sin \pi y, \quad \varphi = \pi^2 \sin \pi x \sin \pi y, \quad \mathcal{G} = -\frac{1}{2\pi} \cos \pi x \sin \pi y. \quad (77)$$

Проведем слабонелинейный анализ развития данных возмущений. Разложим возмущения в ряд по малому параметру:

$$\psi = \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots, \quad \varphi = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots, \quad \mathcal{G} = \varepsilon \mathcal{G}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{G}_2 + \dots,$$

$$\text{Ra} = \text{Ra}_* + \varepsilon^2 \text{Ra}_2 + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} + \dots,$$

где уже учтены результаты для замкнутых областей при подогреве снизу: чтобы нелинейность сработала, она должна быть квадратична.

Решение задачи в первом порядке по малому параметру выразим через известное решение линейной задачи (77):

$$\psi_1 = C(\tau)\psi, \quad \varphi_1 = C(\tau)\varphi, \quad \mathcal{G}_1 = C(\tau)\mathcal{G}. \quad (78)$$

Задача второго порядка малости имеет вид:

$$\Delta \varphi_2 + \text{Ra}_* \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \nabla \varphi_1, \quad (79)$$

$$\Delta \mathcal{G}_2 - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \nabla \mathcal{G}_1. \quad (80)$$

Условие разрешимости (35) для данной системы неоднородных уравнений приобретает вид:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \int_S \psi \bar{v}_1 \cdot \nabla \varphi_1 dS + \text{Ra}_* \int_S \vartheta \bar{v}_1 \cdot \nabla \vartheta_1 dS = 0. \quad (81)$$

Вследствие непроницаемости границ второй интеграл обращается в ноль (см. уравнение (44)). Первый интеграл преобразуем:

$$\begin{aligned} \int_S \psi \bar{v}_1 \cdot \nabla \varphi_1 dS &= \int_S \psi \operatorname{div}(\bar{v}_1 \varphi_1) dS - \int_S \psi \varphi_1 \operatorname{div} \bar{v}_1 dS = \\ &= \left[ \int_{\Gamma} \psi \bar{v}_1 \varphi_1 d\vec{l} - \int_S \varphi_1 \bar{v}_1 \cdot \nabla \psi dS \right] = 0. \end{aligned}$$

Здесь учтено общее свойство  $\bar{v} \perp \nabla \psi$ . Таким образом, условие разрешимости во втором порядке даёт тривиальный результат.

Прежде чем переходить к задаче третьего порядка, найдём решение задачи второго порядка. Несложно показать, что  $\bar{v}_1 \cdot \nabla \varphi_1 = 0$ , тогда неоднородность уравнения (79) обратится в ноль. Неоднородность уравнения (80) вычислим отдельно:

$$\bar{v}_1 \cdot \nabla \vartheta_1 = C^2(\tau) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) = \frac{\pi}{4} C^2(\tau) \sin 2\pi y.$$

Учитывая, что неоднородность не зависит от координаты  $x$ , частное решение второго порядка также не будет зависеть от  $x$ . Окончательно получаем

$$\psi_2 = 0, \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{16\pi} C^2(\tau) \sin 2\pi y \equiv C^2(\tau) \tilde{\vartheta}. \quad (82)$$

Задача третьего порядка малости имеет вид (с учетом решения второго порядка (82)):

$$\Delta \varphi_3 + \text{Ra}_* \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_2} - \text{Ra}_2 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}, \quad (83)$$

$$\Delta \mathcal{G}_3 - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \tau_2} + \bar{v}_1 \cdot \nabla \mathcal{G}_2. \quad (84)$$

Применяя условие разрешимости к данной неоднородной задаче, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \int_S \psi \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_2} dS - \text{Ra}_2 \int_S \psi \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x} dS + \\ + \text{Ra}_* \int_S \mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \tau_2} dS + \text{Ra}_* \int_S \mathcal{G} \bar{v}_1 \cdot \nabla \mathcal{G}_2 dS = 0. \end{aligned} \quad (85)$$

С учетом (78) преобразуем:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{d\tau_2} \left( \frac{1}{\text{Pr}} \int_S \psi \varphi dS + \text{Ra}_* \int_S \mathcal{G}^2 dS \right) - \\ - \text{Ra}_2 C \int_S \psi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} dS + \text{Ra}_* C^3 \int_S \mathcal{G} \bar{v} \cdot \nabla \tilde{\mathcal{G}} dS = 0. \end{aligned} \quad (86)$$

После вычисления интегралов с помощью решений (77), (82) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее медленную эволюцию огибающей  $C(\tau_2)$ :

$$\dot{C} \left( \frac{\text{Pr}+1}{\text{Pr}} \right) \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^4}{16} C^3 - \frac{\text{Ra}_2}{8} C = 0, \quad (87)$$

где уже учтено значение критического числа Рэлея  $\text{Ra}_* = 8\pi^4$ . Выбором новых единиц измерения медленного времени  $\tau_2$  и  $C$  можно перейти к стандартной форме записи (59). Таким образом, слабонелинейный анализ данной конкретной задачи приводит нас к тем же выводам, которые были получены в общем виде в предыдущем параграфе. А именно, конвекция в квадратной полости, подогреваемой снизу, возбуждается мягко, этот процесс описывается вилочной бифуркацией.

## 2. СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В НЕЗАМКНУТЫХ СИСТЕМАХ

Отличительная особенность задач о конвекции в слое – это наличие одного (двух) направлений, вдоль которого задача однородна. Таким образом, спектр собственных значений (инкрементов, волновых чисел) непрерывен. Даже при слабой надкритичности образуется целый интервал значений управляющего параметра (например, числа Рэлея), т.е. пространство решений становится бесконечномерным (см. рис. 2.1).

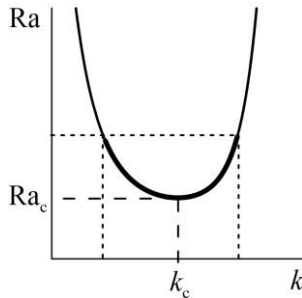


Рис. 2.1. Нейтральная кривая с выделенным интервалом возрастающих возмущений при надкритической конвекции в слое

Отдельной проблемой является согласование результатов, полученных для длинных замкнутых областей, с результатами для слоёв. Например, влияние боковых стенок может быть весьма существенным.

### 2.1. Неустойчивость Экхауза

Рассмотрим горизонтальный слой, в котором развивается конвекция в виде цилиндрических валов (см. рис. 2.2). Линейная теория позволяет нам определить критическое волновое число  $k_c$  – характерный размер конвективных валов. Однако уже при

небольшой надкритичности целый интервал волновых чисел может приводить к развитию неустойчивости. Рассмотрим такие возмущения конвективных валов, которые могут приводить к изменению волнового числа.

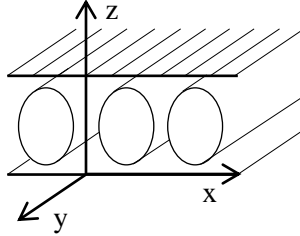


Рис. 2.2. Течение в виде цилиндрических валов в слое

Для простоты рассмотрим плоскую задачу, чтобы можно было ввести функцию тока и завихренность:

$$\vec{v} = \text{rot}(\psi \vec{j}), \quad \varphi = -\Delta\psi.$$

Тогда уравнения движения запишутся в виде:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi \right) = \Delta \varphi + \text{Ra} \frac{\partial \vartheta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vartheta = \Delta \vartheta + \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Задача имеет стационарное решение, соответствующее положению равновесия, в котором течения в слое отсутствуют. Проведем анализ устойчивости данного положения равновесия по отношению к возмущениям в форме валов.

Для слабонелинейного анализа, как и ранее, разложим все функции в ряды по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\psi = \varepsilon\psi_1 + \dots, \quad \vartheta = \varepsilon\vartheta_1 + \dots, \quad \text{Ra} = \text{Ra}_c + \varepsilon\text{Ra}_1 + \varepsilon^2\text{Ra}_2 + \dots,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots$$

Отметим, что теперь метод многих масштабов применяется не только к временной координате, но и к пространственной. Это значит, что мы вводим не только «медленные» времена  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ , но и «растянутую» координату  $x_1$ . Разложение пространственной производной в ряд по малому  $\varepsilon$  позволяет учесть вклад возмущений с чуть отличающимся от  $k_c$  волновым числом.

В первом порядке по  $\varepsilon$  получаем задачу линейной устойчивости:

$$\Delta^2 \psi_1 + \text{Ra}_c \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x_0} = 0,$$

$$\Delta \mathcal{G}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_0} = 0.$$

Решение данной задачи может быть найдено в виде:

$$\psi_1 = A e^{ik_c x_0} f(z) + \text{к.с.} \quad \mathcal{G}_1 = A e^{ik_c x_0} g(z) + \text{к.с.}$$

Во втором порядке получаем систему неоднородных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \psi_2 + \text{Ra}_c \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial x_0} &= \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial \tau_1} + \bar{v}_1 \cdot \nabla \Delta \psi_1 \right) - \\ &\quad - \text{Ra}_c \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x_1} - \text{Ra}_1 \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x_0} - 2 \frac{\partial^2 \Delta \psi_1}{\partial x_0 \partial x_1}, \\ \Delta \mathcal{G}_2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_0} &= \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \tau_1} + \bar{v}_1 \cdot \nabla \mathcal{G}_1 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial x_0 \partial x_1}. \end{aligned} \quad (88)$$

Различные слагаемые в уравнениях (88) будут давать разные вклады в решение задачи второго порядка:  $\partial\Delta\psi_1/\partial\tau_1 \propto e^{ik_c x_0}$ ,  $\vec{v}_1 \cdot \nabla\Delta\psi_1 \propto (e^{2ik_c x_0} + 1)$ ,  $\partial\mathcal{G}_1/\partial x_0 \sim ie^{ik_c x_0}$ ,  $\partial\mathcal{G}_1/\partial x_1 \sim e^{ik_c x_0}$ ,  $\partial^2\Delta\psi_1/\partial x_0\partial x_1 \propto ie^{ik_c x_0}$ . Следовательно, решение во втором порядке по малому  $\varepsilon$  можно представить в виде

$$\psi_2 = A^2 e^{2ik_c x_0} f_{21}(z) + A^2 f_{22}(z) + \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{ik_c x_0} f_{23}(z) + \text{к.с.},$$

$$\mathcal{G}_2 = A^2 e^{2ik_c x_0} g_{21}(z) + A^2 g_{22}(z) + \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{ik_c x_0} g_{23}(z) + \text{к.с.}.$$

В третьем порядке по малому  $\varepsilon$  получаем

$$\Delta^2\psi_3 + \text{Ra}_c \frac{\partial\mathcal{G}_3}{\partial x_0} = -\text{Ra}_2 \frac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial x_0} - \text{Ra}_c \frac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial x_2} - 2 \frac{\partial^2\Delta\psi_1}{\partial x_0\partial x_2} - \frac{\partial^2\Delta\psi_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial\tau_2} + \vec{v}_2 \cdot \nabla\Delta\psi_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla\Delta\psi_2 - \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial x_1} \right), \quad (89)$$

$$\Delta\mathcal{G}_3 + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_0} = \frac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial\tau_2} + \vec{v}_2 \cdot \nabla\mathcal{G}_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla\mathcal{G}_2 - \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \frac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - 2 \frac{\partial^2\mathcal{G}_1}{\partial x_0\partial x_2} - \frac{\partial^2\mathcal{G}_1}{\partial x_1^2}. \quad (90)$$

Несложно убедиться, что секулярные члены  $\sim e^{ik_c x_0}$  будут давать слагаемые  $\propto \partial A/\partial\tau_2$ ,  $|A|^2 A$ ,  $\text{Ra}_2 A$ ,  $\partial^2 A/\partial x_1^2$ . Типичное уравнение, описывающее эволюцию длинноволновых возмущений, имеет вид (кроме случая теплоизолированных границ, который будет рассмотрен отдельно в следующем разделе):

$$\frac{\partial A}{\partial\tau_2} = C_1 \text{Ra}_2 A + C_2 A |A|^2 + C_3 \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}. \quad (91)$$

Линеаризованное стационарное уравнение (91) должно описывать нейтральную кривую вблизи порога возбуждения неустойчивости:

$$C_1 \text{Ra}_2 A + C_3 \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = 0.$$

Решение этого уравнения запишется в виде:

$$A \propto e^{iqx_1}, \quad q^2 = \text{Ra}_2 \frac{C_3}{C_1}.$$

Из линейной теории известно, что нейтральная кривая вблизи порога описывается квадратичной зависимостью:

$$\text{Ra} = \text{Ra}_c + \alpha(k - k_c)^2,$$

где коэффициент  $\alpha > 0$  известен из линейной задачи. Следовательно,  $\text{Ra}_2 = \alpha q^2$ ,  $q$  – волновое число, характеризующее пространственную «модуляцию» исходной конвективной неустойчивости. Таким образом,  $C_3/C_1 = \alpha > 0$ .

Соотношение между коэффициентами  $C_1$  и  $C_2$  можно определить, если учесть, что строго в минимуме нейтральной кривой конвекция возбуждается мягким образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow |A|^2 = -\frac{C_1}{C_2} \text{Ra}_2 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} < 0.$$

По линейной теории малые возмущения должны нарастать в надкритической области, т.о.  $C_1 > 0$ . Следовательно,  $C_2 < 0$ ,  $C_3 > 0$ . Правильным выбором масштабов мы можем записать уравнение (91) в стандартном виде

$$\frac{\partial A}{\partial \tau_2} = rA - A|A|^2 + \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}. \quad (92)$$



Стационарные решения этого уравнения могут быть представлены в виде

$$A_0 = B e^{iqx_1}, \quad |B|^2 = r - q^2, \quad (93)$$

т.е. нейтральная кривая описывается кривой  $r = q^2$ .

Ограничиваясь действительными значениями  $B$ , запишем стационарное решение в виде

$$A_0 = \sqrt{r - q^2} e^{iqx_1}.$$

Исследуем устойчивость этого решения, подставляя в (92)  $A = A_0 + a$  и линеаризуя для малых  $a$ :

$$\frac{\partial a}{\partial \tau_2} = ra - 2a |A_0|^2 - a^* A_0^2 + \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2}.$$

Заменяя переменные  $a = b e^{iqx_1}$ , это уравнение можно перевести в уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial b}{\partial \tau_2} = -rb + q^2 b + 2iq \frac{\partial b}{\partial x_1} - b^* B^2 + \frac{\partial^2 b}{\partial x_1^2},$$

которое разделяется на два уравнения для действительной и мнимой частей:  $b = u + iv$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau_2} = -ru + q^2 u - 2q \frac{\partial v}{\partial x_1} - u B^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad (94)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau_2} = -rv + q^2 v + 2q \frac{\partial u}{\partial x_1} + v B^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}. \quad (95)$$

Решение уравнений (94)–(95) можно искать в виде нормальных возмущений  $\sim \exp(\lambda \tau_2 + ipx_1)$ , что приводит к системе алгебраических уравнений:

$$\lambda u + 2(r - q^2)u + 2ipqv + p^2 u = 0,$$

$$\lambda v - 2ipqu + p^2 v = 0.$$

Условие приводит к квадратному уравнению для инкремента  $\lambda$ :

$$\lambda^2 + \lambda(2p^2 + 2B^2) + 2p^2(B^2 - 2q^2) + p^4 = 0.$$

Неустойчивость (хотя бы один из корней  $\lambda$  положителен) возникает при условии

$$2B^2 + p^2 - 4q^2 < 0.$$

Очевидно, наиболее опасны малые  $p$ . В этом случае  $B^2 - 2q^2 < 0$ . С учетом выражения (93) для  $B^2$ , а также с учетом существования конвекции получаем условие существования неустойчивости:

$$q^2 < r < 3q^2. \quad (96)$$

Такая неустойчивость пространственных конвективных движений называется неустойчивостью Экхауза.

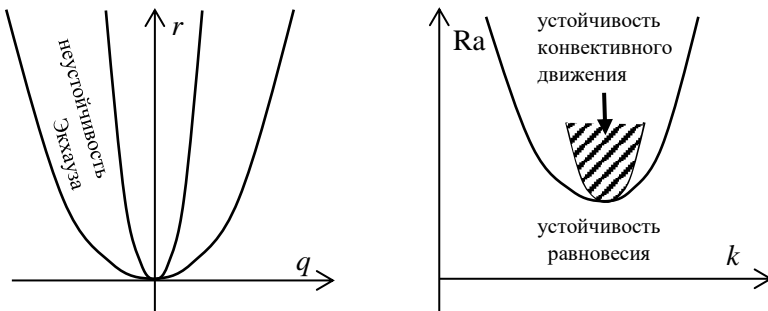


Рис. 2.3. Нейтральные кривые. Неустойчивость Экхауза наблюдается между границей устойчивости линейной теории и полученной уточненной кривой

## 2.2. Слабонелинейный анализ длинноволновых режимов конвекции

В горизонтальном слое жидкости с фиксированным теплотокотом на границах (это означает, что теплопроводность стенок мала по сравнению с теплопроводностью жидкости) наиболее опасными возмущениями оказываются возмущения с  $k_c = 0$ . Такие возмущения называют длинноволновыми, так как характерный масштаб этих возмущений значительно превышает характерный масштаб задачи (например, толщину слоя).

Рассмотрим горизонтальный слой жидкости, подогреваемый снизу. Конвективная неустойчивость в таком слое описывается уравнениями и граничными условиями:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi \right) = \Delta \varphi - Ra \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (97)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \Delta T - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (98)$$

$$\varphi = -\Delta \psi, \quad (99)$$

$$y = 0, 1: \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (100)$$

Линейная задача для малых возмущений допускает решение в виде нормальных возмущений  $\propto \exp(\lambda t + ikx)$ . Удовлетворение граничным условиям приводит к нейтральной кривой

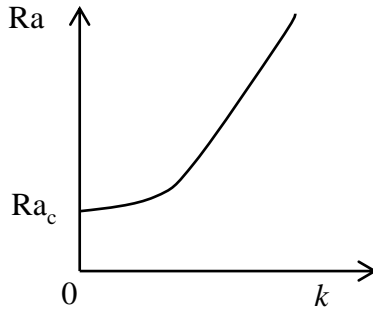


Рис. 2.4. Нейтральная кривая длинноволновой неустойчивости

Изучим поведение линейного решения вблизи минимума нейтральной кривой. Для этого к линеаризованным уравнениям малых нормальных возмущений:

$$\frac{\lambda}{Pr} \Delta \psi = \Delta^2 \psi + ikRaT, \quad (101)$$

$$\lambda T = \Delta T - ik\psi \quad (102)$$

применим разложение собственных функций и собственных значений (инкремента) в ряд по малым значениям волнового числа:

$$\lambda = \lambda_1 k + \lambda_2 k^2 + \dots,$$

$$\psi = \psi_1 k + \psi_2 k^2 + \dots, \quad (103)$$

$$T = T_0 + T_1 k + \dots$$

В первом порядке по малым  $k$  получаем:

$$\frac{d^4 \psi_1}{dy^4} + i Ra T_0 = 0, \quad (104)$$

$$\frac{d^2 T_1}{dy^2} = \lambda_1 T_0. \quad (105)$$

Решение уравнения (104) совместно с граничными условиями (100) даёт

$$\psi_1 = -i \text{Ra} T_0 \frac{y^2}{24} (y-1)^2. \quad (106)$$

Уравнение для температуры в первом порядке с учетом граничных условий (100) имеет нетривиальное решение только при  $\lambda_1 = 0$ .

Во втором порядке по малому  $k$  уравнения имеют вид

$$\frac{d^4 \psi_2}{dy^4} + i \text{Ra} T_1 = 0, \quad (107)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dy^2} = \lambda_2 T_0 + T_0 + i \psi_1. \quad (108)$$

Условие разрешимости краевой задачи для  $T_2$  приводит к нахождению добавки к инкременту  $\lambda_2$ :

$$\lambda_2 = \frac{i}{T_0} \int_0^1 \psi_1 dy - 1 = \frac{\text{Ra} - 720}{720}, \quad (109)$$

где учтено выражение для  $\psi_1$  (106). Очевидно, вблизи минимума нейтральная кривая аппроксимируется параболой с вершиной  $\text{Ra}_c = 720$ .

Для изучения нелинейных режимов проведем слабонелинейный анализ, применив к задаче (97)–(100) метод малого параметра и метод многих масштабов:

$$\psi = \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots, \quad T = T_0 + \varepsilon T_1 + \dots, \quad \text{Ra} = \text{Ra}_* + \varepsilon^2 \text{Ra}_2 + \dots,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial \tau_3} \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \dots,$$

где уже учтены выводы из линейной задачи:  $\text{Ra}_1 = 0$ ,  $\lambda_1 = \partial/\partial \tau_1 = 0$ .

В нулевом порядке по малому параметру  $\varepsilon$  остается только задача для температуры:

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0, 1: \quad \frac{\partial T_0}{\partial y} = 0. \quad (110)$$

Очевидно, в нулевом порядке решение зависит только от медленных координат и времени:  $T_0 = T_0(x_1, x_2, t_2, \dots)$ .

Задача в первом порядке по  $\varepsilon$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial y^4} + \text{Ra}_c \frac{\partial T_0}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = 0, \\ y = 0, 1: \quad \psi_1 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{\partial T_1}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (111)$$

Решение этой задачи легко найти:

$$\psi_1 = -\frac{\text{Ra}_c}{24} \frac{\partial T_0}{\partial x_1} y^2 (1-y)^2, \quad T_1 = \text{const}. \quad (112)$$

Во втором порядке по малому параметру  $\varepsilon$  получим

$$\frac{\partial^4 \psi_2}{\partial y^4} + \text{Ra}_c \frac{\partial T_0}{\partial x_2} = 0, \quad (113)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \tau_2} + \frac{\partial T_0}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}. \quad (114)$$

Для упрощения в дальнейшем будем полагать, что  $\partial/\partial x_2 = 0$ , тогда решение для функции тока во втором порядке

оказывается тривиальным:  $\psi_2 = 0$ . Условие разрешимости уравнения (114) с учетом того, что  $\int_0^1 \psi_1 dy = 0$ , и граничных условий для температуры получаем

$$\frac{\partial T_0}{\partial \tau_2} = \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_1^2}.$$

Нелинейности «не зацепились» во втором порядке. Линеинная теория предсказывает, что вблизи нейтральной кривой  $\lambda \sim \varepsilon^2 \lambda_2$  (см. (109)). Однако, по-видимому, вблизи минимума нейтральной кривой эволюция ещё медленнее,  $\partial/\partial \tau_2 = 0$ . С учетом этого из уравнения (114) можно найти  $T_2$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_1} \right)^2 f_2 + \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_1^2} f_3, \quad f_2'' = f_1', \quad f_3'' = f_1 - 1,$$

где введено обозначение  $\psi_1 = f_1(y) \partial T_0 / \partial x_1$ .

В третьем порядке по малому параметру  $\varepsilon$  получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \psi_3}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \text{Ra}_c \frac{\partial T_2}{\partial x_1} + \text{Ra}_2 \frac{\partial T_0}{\partial x_1} = \\ = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x_1 \partial y^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \quad (115)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \tau_3} = \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2}. \quad (116)$$

Из условия разрешимости уравнения (116) очевидно, что  $\partial/\partial \tau_3 = 0$ . Из уравнения (115) следует

$$\psi_3 = \frac{\partial^3 T_0}{\partial x_1^3} f_4 + f_5 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial T_0}{\partial x_1} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_1^2} f_6 + \frac{\text{Ra}_2}{\text{Ra}_c} \frac{\partial T_0}{\partial x_1} f_1, \quad (117)$$

$$f_4^{IV} = -2f_1'' - \text{Ra}_c f_3, \quad f_5^{IV} = -\text{Ra}_c f_2,$$

$$f_6^{IV} = \frac{1}{\text{Pr}}(f_1'' f_1' - f_1''' f_1).$$

В четвертом порядке по малому параметру  $\varepsilon$  нам понадобится только уравнение для температуры:

$$\frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial T_0}{\partial \tau_4} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \frac{\partial T_0}{\partial x_1}, \quad (118)$$

Условие разрешимости этого уравнения, наконец, приводит к уравнению, описывающему крупномасштабную пространственно-временную эволюцию возмущений

$$\frac{\partial T_0}{\partial \tau_4} + \frac{17}{462} \frac{\partial^4 T_0}{\partial x_1^4} + \frac{\text{Ra}_2}{720} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_1^2} - \frac{10}{7} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial T_0}{\partial x_1} \right)^3 = 0. \quad (119)$$

Для удобства введём продольный градиент температуры  $\partial T_0 / \partial x_1 \equiv N$ , тогда уравнение (119) переписется (после нормировки)

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} + \frac{\partial^4 N}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N^3}{\partial x^2} = 0. \quad (120)$$

Здесь и далее опущены индексы у медленного времени и растянутой координаты  $\tau_4 \rightarrow \tau$ ,  $x_1 \rightarrow x$ .

Иследуем устойчивость стационарных решений  $N_s(x)$  данного уравнения. Для начала дважды проинтегрируем (120) вдоль  $x$  при  $\partial / \partial \tau = 0$ :

$$N_s'' + N_s - N_s^3 = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (121)$$

Чтобы избежать решений, нарастающих вдоль  $x$ , следует занулить  $\alpha_2 = 0$ . Тогда уравнение (121) похоже на уравнение



Дюффинга для нелинейных колебаний при  $\alpha_1$ . Таким образом, решение данного уравнения должно быть периодическим по  $x$  и выражаться в эллиптических функциях.

Уравнение, описывающее возмущения стационарного периодического решения  $N_s$  получается при подстановке  $N = N_s + n$  в уравнение (121):

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} + \frac{\partial^4 n}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 (N_s^2 n)}{\partial x^2} = 0. \quad (122)$$

Очевидно, так как  $N_s$  – периодическая функция,  $n$  также является периодической,  $n \sim g(x) \exp(\lambda \tau + i \beta x)$ , где  $g(x)$  – функция периодичная как  $N_s^2$ . При подстановке периодического решения в (122) получается дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} & \lambda g + g^{IV} + 4i\beta g''' - 6\beta^2 g'' - 4i\beta^3 g' + \beta^4 g + g'' + \\ & + 2i\beta g' - \beta^2 g + 3N_s^2 g'' + 6(i\beta N_s + 2N_s')g' + \\ & + 3 \left[ 2(N_s')^2 + 2N_s N_s'' + 4i\beta N_s N_s' - \beta^2 N_s^2 \right] g = 0. \end{aligned}$$

Инкремент  $\lambda$  определяется из требования о периодичности решения данного уравнения [2]. Анализ показывает, что при  $\beta = 0$  инкремент  $\lambda = 0$ , при малых  $\beta \ll 1$  все стационарные решения неустойчивы,  $\lambda > 0$ .

В заключение обсудим, как с экспериментом согласуется предсказание слабонелинейного анализа о том, что вблизи критической точки все стационарные периодические решения неустойчивы. Оказывается, длина волны критических возмущений всё увеличивается, пока слой «не кончится». В конце концов, устанавливается одновихревое движение, охватывающее всю область. Поэтому вместо описанного выше слабонелинейного анализа можно также исследовать поведение решения в виде конвективного вала с медленного меняющейся фазой.

### 3. СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В СЛОЕ

Рассмотрим применение метода слабонелинейного анализа для задачи устойчивости конвективного течения в слое. В настоящем разделе изучается влияние бегущей звуковой волны на устойчивость адвективного течения по отношению к спиральным возмущениям. Слабонелинейный анализ устойчивости дополнен описанием методов численного решения получаемых однородных и неоднородных систем. Проведено также сравнение с результатами прямого численного моделирования на основе полных нелинейных уравнений.

#### 3.1. Постановка задачи устойчивости термоакустического течения

Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой жидкости толщиной  $2h$ , заключенный между твердыми границами, на которых поддерживается линейное распределение температуры:  $T(x, y, \pm h) = Ax$  (плоскость  $x, y$  расположена на середине слоя, ось  $z$  вертикальна). В слое параллельно градиенту температуры распространяется бегущая звуковая волна, поле скорости которой имеет вид

$$\vec{v} = a\omega\vec{i} \cos \omega(t - x/c_{36}), \quad (123)$$

где  $a$  – амплитуда смещения частиц жидкости в волне,  $\omega$  – частота волны,  $c_{36}$  – скорость звука в жидкости,  $\vec{i}$  – орт оси  $x$ . Длина звуковой волны предполагается сравнимой с толщиной слоя.

Для описания возникающих в слое конвективных течений применимы осредненные уравнения термоакустической конвекции, полученные в работе [6]. Вследствие однородности звукового поля уравнения термоакустической конвекции в данном

случае совпадают с обычными уравнениями тепловой конвекции в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \bar{v} + g \beta T \vec{k}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) T &= \chi \Delta T, \\ \operatorname{div} \bar{v} &= 0. \end{aligned} \quad (124)$$

Здесь  $\bar{v}$ ,  $T$  – средняя скорость и температура жидкости;  $p$  – конвективная добавка к гидростатическому распределению давления;  $\rho$  – средняя плотность;  $\nu$ ,  $\chi$  – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности, предполагаемые постоянными;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\beta$  – коэффициент теплового расширения;  $\vec{k}$  – единичный вектор, направленный вертикально вверх.

При распространении звуковой волны вдоль твердой границы в динамическом пограничном слое генерируется осредненное течение [1, 6], которое можно учесть с помощью эффективных граничных условий. В данном случае вследствие однородности акустического поля граничное условие запишется в виде

$$z = \pm h: u = \frac{3}{4} \frac{a^2 \omega^2}{c_{36}}. \quad (125)$$

Остальные компоненты скорости обращаются в нуль на твердых стенках, температура границ линейно зависит от продольной координаты  $x$ :

$$z = \pm h: v = w = 0, T = Ax. \quad (126)$$

В ходе решения задачи предполагается, что средний расход жидкости через плоскость, перпендикулярную оси  $x$ , отсутствует:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^1 u dz dy = 0. \quad (127)$$

Перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, давления, температуры следующие величины:  $h$ ,  $h^2/\nu$ ,  $\nu/h$ ,  $\rho\nu^2/h^2$ ,  $Ah$ .

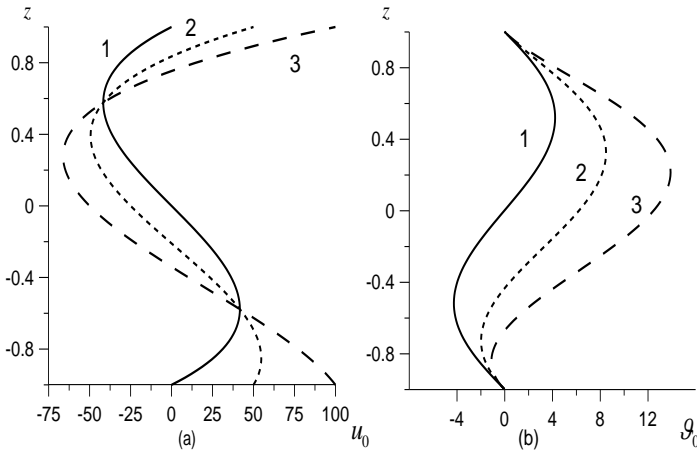


Рис. 3.1. Профили скорости (а) и добавки к температуре (б) для плоскопараллельного течения при  $Gr = 650$ : 1)  $Re = 0$ , 2)  $Re = 50$ , 3)  $Re = 100$

Тогда задача (124)–(126) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\nabla p + \Delta \vec{v} + Gr T \vec{k}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T &= \frac{1}{Pr} \Delta T, \\ \text{div} \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (128)$$

$$z = \pm h: u = Re, \quad v = w = 0, \quad T = x. \quad (129)$$

где  $Gr = g\beta Ah^4/\nu^2$  – число Грасгофа,  $Pr = \nu/\chi$  – число Прандтля и  $Re = 3a^2\omega^2 h/4\nu c_{36}$  – число Рейнольдса, определенное по скорости акустического течения. Оценим возможные значения числа Рейнольдса. Пусть частота звуковой волны, распространяющейся в слое, равна  $10^6$  Гц, амплитуда вибраций –  $10^{-5}$  см, толщина слоя – 10 см, скорость звука в жидкости примем равной  $1.5 \cdot 10^5$  см/с, тогда  $Re$  будет порядка 50 при вязкости жидкости 0.01 Ст.

Как будет показано ниже, при таких числах  $Re$  акустическое воздействие оказывает значительное влияние на конвективные течения в слое.

Система уравнений и граничных условий (128)–(129) допускает решение, описывающее плоскопараллельное конвективное течение. Поля скорости и температуры для такого течения имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \frac{Gr}{6}(z^3 - z) + \frac{Re}{2}(3z^2 - 1), \quad p_0 = 0, \\
 T_0 &= x + \vartheta_0 = x + \frac{Gr Pr}{360}(3z^5 - 10z^3 + 7z) + \\
 &\quad + \frac{Re Pr}{8}(z^2 - 1)^2.
 \end{aligned}
 \tag{130}$$

Основное течение представляет собой суперпозицию двух течений – классического адвективного [7] и течения с квадратичным профилем. Профили скорости и добавки к линейному распределению температуры  $\vartheta_0(z)$  для разных чисел Рейнольдса представлены на рис. 3.1. Как видно, акустическое воздействие приводит к существенному изменению плоскопараллельного течения. Устойчивость решения (130) в линейной постановке изучена в работе [4]. В частности, показано, что в случае достаточно интенсивного звукового воздействия наиболее опас-

ными становятся спиральные возмущения (продольные валы). Настоящая работа посвящена исследованию нелинейных конвективных течений этого типа. Будем предполагать, что возникающее вторичное течение имеет вид продольных конвективных валов (рис. 3.2).

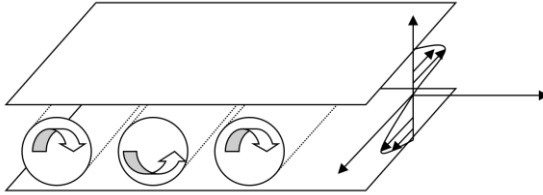


Рис. 3.2. Возмущения типа спиральных валов

В этом случае поле скорости зависит лишь от двух поперечных по отношению к основному течению координат  $(y, z)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (131)$$

В распределении температуры можно выделить линейное по  $x$  слагаемое:

$$T = x + \mathcal{G}(y, z). \quad (132)$$

Покажем, что в данном случае давление также является линейной функцией  $x$ . Для этого спроектируем уравнение движения (128) на оси координат

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \Delta u = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (133)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \Delta v = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (134)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \Delta w - \text{Gr} \vartheta = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{Gr} x. \quad (135)$$

Левые части уравнений (133), (134), (135) являются функциями, не зависящими от координаты  $x$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= X(y, z), & -\frac{\partial p}{\partial y} &= Y(y, z), \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{Gr} x &= Z(y, z). \end{aligned} \quad (136)$$

Тогда, интегрируя по  $z$  последнее соотношение, получаем

$$\begin{aligned} p &= \int Z(y, z) dz + \text{Gr} x z + f(x, y) = \\ &= \tilde{p}(y, z) + \text{Gr} x z + f(x, y). \end{aligned} \quad (137)$$

Подставляя (137) во второе соотношение (136), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{p}(y, z) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -Y(y, z).$$

Из полученного уравнения видно, что второе слагаемое является функцией, не зависящей от координаты  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \tilde{f}(y).$$

Следовательно,

$$f(x, y) = \int \tilde{f}(y) dy + G(x) = F(y) + G(x).$$

Тогда (137) можно переписать так:

$$\begin{aligned} p &= \tilde{p}(y, z) + F(y) + \text{Gr} x z + G(x) = \\ &= \tilde{p}(y, z) + \text{Gr} x z + G(x). \end{aligned} \quad (138)$$

Наконец, подставляя (138) в первое из условий (136), получим

$$G'(x) = X(y, z) - Grz.$$

Левая часть уравнения зависит только от  $x$ , в то время как правая часть зависит от координат  $y, z$ . Следовательно, обе части уравнения должны быть равны одной и той же постоянной

$$G'(x) = const = c.$$

Таким образом, искомая производная имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = Grz + c, \quad (139)$$

где  $c$  – некоторая константа (среднее по слою значение продольного градиента давления). Поле давления запишется в виде

$$p = Grxz + cx + \tilde{p}(y, z) \quad (140)$$

Константа  $c$  определяется из условия замкнутости потока.

Изучение поставленной задачи будем проводить в два этапа: на первом этапе поведение течения вблизи порога устойчивости изучено в рамках линейного и слабонелинейного приближения, затем проведено численное исследование на основе полных нелинейных уравнений термоакустической конвекции для продольных валов.

### 3.2. Вывод и анализ амплитудного уравнения

Ключевым моментом в описании вторичных течений в припороговой области является то обстоятельство, что при небольшом превышении критического числа Грасгофа основное течение становится неустойчивым только по отношению к медленно нарастающим возмущениям с волновыми числами, лежащими в узком интервале вблизи  $k_m$ . С этим обстоятельством связана относительно простая форма вторичных течений, которые удастся описать с помощью медленно меняющихся в про-



странстве и во времени функций, называемых амплитудными функциями [3].

Как и отмечалось ранее, вторичные течения в припороговой области характеризуются наличием сильно различающихся временных и пространственных масштабов, что позволяет применить метод многих масштабов [3]. Введем малые возмущения скорости, температуры и давления основного состояния и разложим производные по горизонтальным координатам и времени в ряды по формальному малому параметру  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned}\bar{v} &= u_0 \bar{i} + \varepsilon \bar{v}^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{v}^{(2)} + \dots, \\ g &= g_0 + \varepsilon g^{(1)} + \varepsilon^2 g^{(2)} + \dots, \\ p &= p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \dots\end{aligned}\tag{141}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + \dots,\tag{142}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} + \dots,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} + \dots\tag{143}$$

Разложение в ряд производных по координатам позволит исследовать устойчивость надкритических режимов конвекции. Число Грасгофа также представим в виде разложения

$$Gr = Gr_0 + \varepsilon Gr_1 + \varepsilon^2 Gr_2 + \dots\tag{144}$$

Подставляя разложения (141)–(143) в исходную краевую задачу, получим в первом порядке линейную задачу устойчивости плоскопараллельного течения (130) относительно пространственных возмущений (интересуясь слабонелинейным поведением стационарных возмущений в виде продольных валов, положим  $\partial/\partial x_0 = \partial/\partial t_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned}
\Delta u^{(1)} - w^{(1)} \frac{\partial u_0}{\partial z} &= 0, \\
\Delta v^{(1)} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y_0} &= 0, \\
\Delta w^{(1)} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} - \text{Gr}_0 \mathcal{G}^{(1)} &= 0, \\
\Delta \mathcal{G}^{(1)} - \text{Pr} \left( u^{(1)} - w^{(1)} \frac{\partial \tau_0}{\partial z} \right) &= 0, \\
\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y_0} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{145}$$

Здесь  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – компоненты вектора скорости  $\vec{v}$ . Возмущения скорости и температуры на твердых границах равны нулю, следовательно,

$$z = \pm 1: \quad u^{(1)} = v^{(1)} = w^{(1)} = \mathcal{G}^{(1)} = 0. \tag{146}$$

Решение данной однородной задачи может быть представлено в виде

$$\vec{v}^{(1)} = a \vec{v}_1(z) \exp(iky_0) + \text{к.с.}, \tag{147}$$

$$\mathcal{G}^{(1)} = a \mathcal{G}_1(z) \exp(iky_0) + \text{к.с.}, \tag{148}$$

$$p^{(1)} = a p_1(z) \exp(iky_0) + \text{к.с.} + b, \tag{149}$$

где символом *к.с.* обозначены комплексно-сопряженные слагаемые,  $\vec{v}_1$ ,  $\mathcal{G}_1$ ,  $p_1$  – собственные функции линейной задачи устойчивости. Амплитудная функция  $a = a(\xi, \eta, \tau \dots)$  характеризует интенсивность вторичного течения;  $b(\xi, \eta, \tau \dots)$  – медленно меняющаяся часть давления. Зависимость обеих амплитудных функций от медленных координат  $\xi$ ,  $\eta$  означает возможность

модуляции спиральных валов вдоль осей  $x$  и  $y$ , что позволяет исследовать устойчивость возникающего вторичного течения.

Для  $\bar{v}_1, \mathcal{G}_1, p_1$  получаем линейную однородную краевую задачу, изученную в [4]:

$$\begin{aligned}
 Du_1 - w_1 u_1' &= 0, \\
 Dv_1 - ikp_1 &= 0, \\
 Dw_1 - p_1' - Gr_0 \mathcal{G}_1 &= 0, \\
 D\mathcal{G}_1 - Pr(u_1 - w_1 \mathcal{G}_1') &= 0, \\
 ikv_1 + w_1' &= 0.
 \end{aligned} \tag{150}$$

$$z = \pm 1: \quad u_1 = v_1 = w_1 = \mathcal{G}_1 = 0. \tag{151}$$

Здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по  $z$ . В системе (150) введен линейный дифференциальный оператор

$$D = \frac{d^2}{dz^2} - k^2. \tag{152}$$

Собственные числа задачи (150)–(151) определяют порог устойчивости плоскопараллельного течения. Амплитуды движения  $a$  и  $b$  в первом порядке не определяются.

В ходе решения задач во втором и третьем порядке по  $\varepsilon$  получим неоднородные системы дифференциальных уравнений, левые части которых совпадают с левыми частями уравнений задачи (150):

$$\begin{aligned}
\Delta u^{(2)} - w^{(2)} \frac{\partial u_0}{\partial z} &= f_1, \\
\Delta v^{(2)} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial y_0} &= f_2, \\
\Delta w^{(2)} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial z} - \text{Gr}_0 g^{(2)} &= f_3, \\
\Delta g^{(2)} - \text{Pr} \left( u^{(2)} - w^{(2)} \frac{\partial g_0}{\partial z} \right) &= f_4, \\
\frac{\partial v^{(2)}}{\partial y_0} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} &= f_5.
\end{aligned} \tag{153}$$

Условие разрешимости таких неоднородных систем имеет вид (подробнее об условии разрешимости смотри в разделе 1.3)

$$\int_{-1}^1 (Uf_1 + Vf_2 + Wf_3 + \Theta f_4 + Pf_5) dz. \tag{154}$$

Здесь  $U, V, W, \Theta, P$  являются собственными функциями задачи, сопряженной с (150)–(151):

$$\begin{aligned}
DU - \text{Gr}_0 \Theta &= 0, \\
DV + ikP &= 0, \\
DW - P' - \text{Gr}_0 \tau \Theta - u_0 U &= 0, \\
D\Theta + \text{Pr} W &= 0, \\
ikV - W' &= 0.
\end{aligned} \tag{155}$$

$$z = \pm 1: \quad U = V = W = \Theta = 0. \tag{156}$$

Второе приближение по  $\varepsilon$  приводит к задаче для нахождения  $\bar{v}^{(2)}, g^{(2)}, p^{(2)}$ , неоднородные части которой имеют вид

$$f_1 = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi} + u_0 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y_0} + w^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y_0 \partial \eta},$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \eta} + u_0 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y_0} + w^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial y_0 \partial \eta}, \\
f_3 &= \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \tau} + u_0 \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y_0} + w^{(1)} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y_0 \partial \eta}, \\
f_4 &= \text{Pr} \left( \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}}{\partial \tau} + u_0 \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}}{\partial y_0} + w^{(1)} \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}^{(1)}}{\partial y_0 \partial \eta}, \\
f_5 &= \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \eta}. \tag{157}
\end{aligned}$$

Из условия разрешимости системы второго порядка следует равенство нулю линейной поправки  $\text{Gr}_1$  (см. первый раздел пособия). Таким образом, с точностью до  $\varepsilon^2$  разложение (144) имеет вид

$$\text{Gr} = \text{Gr}_0 + \varepsilon^2 \text{Gr}_2. \tag{158}$$

Задача второго порядка содержит как линейные, так и нелинейные неоднородности. Линейные неоднородности приводят к появлению в решении слагаемых, пропорциональных  $e^{iky_0}$ , нелинейные – к слагаемым, не зависящим от  $y_0$ , и к слагаемым, пропорциональным  $e^{2iky_0}$ . Решение неоднородной задачи второго порядка может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
u^{(2)} &= \left\{ a^2 u_{22} e^{2iky_0} + \left( \frac{\partial a}{\partial \xi} u_\xi + \frac{\partial a}{\partial \eta} u_\eta \right) e^{iky_0} + \text{к.с.} \right\} + \\
&\quad + |a|^2 u_{20} + \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial \xi} (z^2 - 1), \tag{159}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^{(2)} = & \left\{ a^2 v_{22} e^{2iky_0} + \left( \frac{\partial a}{\partial \xi} v_\xi + \frac{\partial a}{\partial \eta} v_\eta \right) e^{iky_0} + \kappa.c. \right\} + \\
& + |a|^2 v_{20} + \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial \eta} (z^2 - 1),
\end{aligned} \tag{160}$$

$$\begin{aligned}
w^{(2)} = & \left\{ a^2 w_{22} e^{2iky_0} + \left( \frac{\partial a}{\partial \xi} w_\xi + \frac{\partial a}{\partial \eta} w_\eta \right) e^{iky_0} + \kappa.c. \right\} \\
& + |a|^2 w_{20},
\end{aligned} \tag{161}$$

$$\begin{aligned}
g^{(2)} = & |a|^2 g_{20} + \\
& + \left\{ a^2 g_{22} e^{2iky_0} + \left( \frac{\partial a}{\partial \xi} g_\xi + \frac{\partial a}{\partial \eta} g_\eta \right) e^{iky_0} + \kappa.c. \right\} + \\
& + \frac{\text{Pr}}{24} \frac{\partial b}{\partial \xi} (z^4 - 6z^2 + 5),
\end{aligned} \tag{162}$$

$$\begin{aligned}
p^{(2)} = & |a|^2 p_{20} + \tilde{p}(z) \\
& \left\{ a^2 p_{22} e^{2iky_0} + \left( \frac{\partial a}{\partial \xi} p_\xi + \frac{\partial a}{\partial \eta} p_\eta \right) e^{iky_0} + \kappa.c. \right\}.
\end{aligned} \tag{163}$$

Таким образом, каждая из компонент поля скорости и поле температуры зависят от четырех функций координаты  $z$ . Подставляя решение (159)–(163) в систему уравнений второго порядка, получим четыре неоднородные задачи для нахождения данных функций.

Для функций  $u_\xi, v_\xi, w_\xi, g_\xi, p_\xi$  будем иметь

$$\begin{aligned}
Du_\xi - w_\xi u'_0 &= (\lambda + u_0)u_1 + p_1, \\
Dv_\xi - ikp_\xi &= (\lambda + u_0)v_1, \\
Dw_\xi - p'_\xi - Gr_0\mathcal{G}_\xi &= (\lambda + u_0)w_1, \\
D\mathcal{G}_\xi - Pr(u_\xi - w_\xi\mathcal{G}'_0) &= Pr(\lambda + u_0)\mathcal{G}_1, \\
ikv_\xi + w'_\xi &= -u_1,
\end{aligned} \tag{164}$$

$$z = \pm 1: \quad u_\xi = v_\xi = w_\xi = \mathcal{G}_\xi = 0. \tag{165}$$

Здесь коэффициент  $\lambda$  определяется из условия разрешимости этой задачи и вычисляется по формуле

$$\lambda = -\frac{\int_{-1}^1 (u_0 S + p_1 U - u_1 P) dz}{\int_{-1}^1 S dz}, \tag{166}$$

$$S = u_1 U + v_1 V + w_1 W + Gr_0 \mathcal{G}_1 \Theta.$$

Функции  $u_\eta, v_\eta, w_\eta, \mathcal{G}_\eta, p_\eta$  находятся из следующей задачи:

$$\begin{aligned}
Du_\eta - w_\eta u'_0 &= -2iku_1, \\
Dv_\eta - ikp_\eta &= -2ikv_1 + p_1, \\
Dw_\eta - p'_\eta - Gr_0\mathcal{G}_\eta &= -2ikw_1, \\
D\mathcal{G}_\eta - Pr(u_\eta - w_\eta\mathcal{G}'_0) &= -2ik\mathcal{G}_1, \\
ikv_\eta + w'_\eta &= -v_1,
\end{aligned} \tag{167}$$

$$z = \pm 1: \quad u_\eta = v_\eta = w_\eta = \mathcal{G}_\eta = 0. \tag{168}$$

Для функций  $u_{22}, v_{22}, w_{22}, \mathcal{G}_{22}, p_{22}$  получим следующую неоднородную задачу:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}u_{22} - w_{22}u'_0 &= iku_1v_1 + u'_1w_1, \\
\tilde{D}v_{22} - 2ikp_{22} &= ikv_1^2 + v'_0w_1, \\
\tilde{D}w_{22} - p'_{22} - \text{Gr}_0\mathcal{G}_{22} &= 0, \\
\tilde{D}\mathcal{G}_{22} - \text{Pr}(u_{22} - w_{22}\mathcal{G}'_0) &= \text{Pr}(ikv_1\mathcal{G}_1 + w_1\mathcal{G}'_1), \\
2ikv_{22} + w'_{22} &= 0,
\end{aligned} \tag{169}$$

$$z = \pm 1: \quad u_{22} = v_{22} = w_{22} = \mathcal{G}_{22} = 0, \tag{170},$$

где

$$\tilde{D} = \frac{d^2}{dz^2} - 4k^2. \tag{171}$$

Функции  $u_{20}, v_{20}, w_{20}, \mathcal{G}_{20}, p_{20}$  находятся из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
u''_{20} - w_{20}u'_0 &= 2\Re(w_1^*u_1)', \\
v''_{20} &= 0, \\
w''_{20} - p'_{20} - \text{Gr}_0\mathcal{G}_{20} &= 2(|w_1|^2)',
\end{aligned} \tag{172}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}''_{20} - \text{Pr}(u_{20} - w_{20}\mathcal{G}'_0) &= 2\text{Pr}\Re(w_1^*\mathcal{G}_1)', \\
w'_{20} &= 0,
\end{aligned}$$

$$z = \pm 1: \quad u_{20} = v_{20} = w_{20} = \mathcal{G}_{20} = 0, \tag{173},$$

где  $\Re$  – операция взятия реальной части комплексного числа, звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения.

Условие разрешимости задачи третьего порядка приводит к дифференциальным уравнениям для амплитудных функций:



$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t_2} &= a_{\xi\xi} + ga_{\eta\eta} + i\delta a_{\xi\eta} + a\left(1 - K|a|^2 - \kappa b_\xi - i\chi b_\eta\right), \\ \frac{\partial |a|^2}{\partial \xi} &= b_{\xi\xi} + b_{\eta\eta}.\end{aligned}\tag{174}$$

Здесь индексами обозначаются производные по соответствующим координатам,  $g, \delta, \kappa, \chi, K$  – вещественные постоянные, определяемые численно по следующим формулам:

$$g = \frac{\tilde{g}}{\tilde{\alpha}}, \quad \delta = \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\alpha}}, \quad K = \frac{\tilde{K}}{|\tilde{K}|}, \quad \kappa = \frac{\tilde{\kappa}Q}{|\tilde{K}|}, \quad \chi = \frac{\tilde{\chi}Q}{|\tilde{K}|},\tag{175},$$

где

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{S} \int_{-1}^1 \left\{ (\lambda + u_0) S_\xi - \tilde{S} + p_\xi U - u_\xi P \right\} dz,\tag{176}$$

$$S_\xi = (u_\xi U + v_\xi V + w_\xi W + \text{Gr}_0 \mathcal{G}_\xi \Theta),$$

$$\tilde{S} = u_1 U + v_1 V + w_1 W + \frac{\text{Gr}_0}{\text{Pr}} \mathcal{G}_1 \Theta,\tag{177}$$

$$\tilde{g} = \frac{1}{S} \int_{-1}^1 \left\{ -2ik \left( S_\eta + \frac{\text{Gr}_0}{\text{Pr}} \mathcal{G}_\eta \Theta \right) - \tilde{S} + p_\eta V - v_\eta P \right\} dz,\tag{178}$$

$$S_\eta = (u_\eta U + v_\eta V + w_\eta W),$$

$$\begin{aligned}\tilde{\delta} &= \frac{i}{S} \int_{-1}^1 \left\{ (\lambda + u_0) (S_\eta + \text{Gr}_0 \mathcal{G}_\eta \Theta) + p_\eta U - u_\eta P - \right. \\ &\left. - 2ik (S_\xi + \mathcal{G}_\xi \Theta \text{Gr}_0 / \text{Pr}) + p_\xi V - v_\xi P \right\} dz.\end{aligned}\tag{179}$$

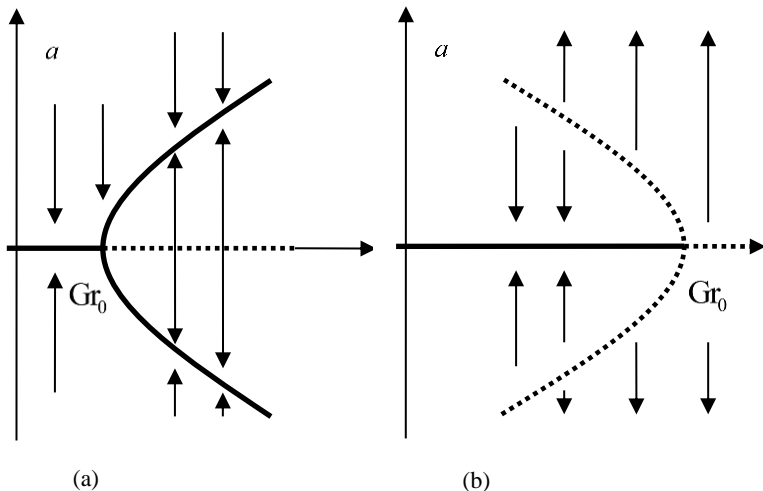


Рис. 3.3. Прямая (а) и обратная (б) бифуркации решений. Пунктирной линией показаны неустойчивые ветви решений

$$\tilde{\gamma} = -\frac{1}{S} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{6} (z^3 - z) w_1 U - \mathcal{G}_1 W + \frac{\text{Gr}_0 \text{Pr}}{360} (3z^5 - 10z^3 + 7z) w_1 \Theta \right\} dz, \quad (180)$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{1}{S} \int_{-1}^1 \left\{ w_1 \left( zU + \frac{\text{Gr}_0 \text{Pr}}{6} (z^3 - 3z) \Theta \right) \right\} dz, \quad (181)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K} = \frac{1}{S} \int_{-1}^1 \left\{ w_1 \left( (u'_{22} + u'_{20}) U \right) + v'_{22} V + w'_{22} W + \right. \\ \left. + \text{Gr}_0 \left( (\mathcal{G}'_{22} + \mathcal{G}'_{20}) \Theta \right) + \right. \\ \left. + w_{22} (u_1 U - v_1 V + w_1 W + \text{Gr}_0 \mathcal{G}_1 \Theta) - \right. \\ \left. - 2ikv_{22} (u_{22} U + v_{22} V + w_{22} W + \text{Gr}_0 \mathcal{G}_{22} \Theta) - \right. \\ \left. + ikv_{22} (u_1 U - v_1 V + w_1 W + \text{Gr}_0 \mathcal{G}_1 \Theta) \right\} dz, \quad (182) \end{aligned}$$

$$Q = \int_{-1}^1 u_{20} dz. \quad (183)$$

Характер ветвления решений вблизи порога зависит от знака  $K$  (константы Ландау). Если знак константы  $K$  положителен, то в критической точке происходит прямая вилочная бифуркация (рис. 3.3а). Следовательно, возбуждение неустойчивости будет мягким. В случае отрицательного знака коэффициента  $K$  бифуркация решений будет обратной (рис. 3.3б). Значит, возможно подкритическое развитие неустойчивости.

Для стационарных режимов квадрат модуля амплитуды определяется по формуле

$$|a|^2 = \frac{1}{K}. \quad (184)$$

Задача (174) аналитически изучена в [4]. Показано, что продольные валы возникают мягко при выполнении условия

$$1 + \kappa > 0. \quad (185)$$

Коэффициент  $g$  в (174) положителен, так как разложение (141)–(143) проводится вблизи минимума нейтральной кривой  $Gr_0(k)$ . Кроме того, в [4] исследована устойчивость регулярных вторичных течений в виде продольных валов. Показано, что вблизи минимума нейтральной кривой периодическое вторичное течение устойчиво, если

$$2\sqrt{g(1+\kappa)} + 1 + g + \kappa g + \delta\chi > 0. \quad (186)$$

Чтобы вычислить коэффициенты, входящие в амплитудные уравнения (174), необходимо найти собственные значения и собственные функции линейной однородной задачи (150), а также собственные функции сопряженной задачи (155) и решения неоднородных задач второго порядка (164), (167), (169), (172). Для этого можно использовать метод стрельбы с применением процедуры ортогонализации.

### 3.3. Вычисление коэффициентов амплитудного уравнения

Численный метод решения однородных задач основан на идее ортогонализации линейно независимых решений при численном интегрировании уравнений. В практике конвективных исследований этот способ впервые применили Р.В. Бирих и Р.Н. Рудаков в ходе исследования устойчивости плоскопараллельного течения между вертикальными плоскостями, нагретыми до разных температур [8, 9]. Необходимость процедуры ортогонализации связана с наличием малых параметров  $(kGr)^{-1}$  и  $(kGrPr)^{-1}$  при старших производных. В ходе интегрирования среди решений появляются осциллирующие и быстро растущие. При этом теряется линейная независимость частных решений [8].

Обозначая амплитуды возмущений функции тока, проекции скорости и температуры через  $\omega_i$ , можно переписать систему (150) в виде:

$$\frac{d\omega_i}{dz} = f_i(z, \omega_1, \dots, \omega_8) \quad (i=1, \dots, 8). \quad (187)$$

В рассматриваемой задаче  $\omega_1 = u_1$ ,  $\omega_2 = v_1$ ,  $\omega_3 = w_1$ ,  $\omega_4 = \vartheta_1$ ,  $\omega_5 = u_1'$ ,  $\omega_6 = v_1'$ ,  $\omega_7 = p_1$ ,  $\omega_8 = \vartheta_1'$ . Граничные условия на левой границе слоя определяют начальные значения для четырех из восьми функций  $\omega_i$ . Остальные четыре функции могут задаваться произвольно, что позволяет построить четыре линейно независимых решений системы (187)  $\omega_i^{(k)}$  (здесь  $k$  – номер частного решения). Начальные значения произвольно задаваемых функции  $\omega_i^{(k)}$  ( $i=5, \dots, 8$ ) в разных решениях выбираются как компоненты четырех взаимно ортогональных векторов:

$$\omega_i^{(k)} = \delta_{i,k+4} \quad (i=5, \dots, 8), \quad (188)$$

где  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера. В процессе интегрирования начальные направления этих векторов восстанавливаются дополнительным линейным преобразованием решений [8].

Пусть после некоторого шага интегрирования получены частные решения  $\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}, \omega_i^{(3)}, \omega_i^{(4)}$  ( $i=1, \dots, 8$ ). Построим четыре линейных комбинации этих решений:

$$\tilde{\omega}_i^{(k)} = \sum_{n=1}^4 a_{kn} \omega_i^{(n)}, \quad (i=1, \dots, 8, k=1, \dots, 4). \quad (189)$$

Потребуем, чтобы преобразованные функции  $\tilde{\omega}_i^{(k)}$  ( $i=5, \dots, 8$ ) были такими же, как и в начале интегрирования, т.е. удовлетворяли уравнениям (188). Получаем систему из 16 линейных уравнений для величин  $a_{ik}$ . С помощью вычисленных коэффициентов по формулам (189) можно определить остальные компоненты частных решений. Полученные значения функций  $\tilde{\omega}_i^{(k)}$  ( $i=1, \dots, 8$ ) принимаются в качестве начальных условий для следующего шага интегрирования.

Производимые при ортогонализации линейные преобразования позволяют сохранить линейную независимость решений во всей области интегрирования. При этом меняется вклад каждого частного решения в общее решение. Это не отражается на собственных значениях спектральной задачи, но требует проведения восстановительных операций для построения собственных функций [9].

Собственные функции рассматриваемой краевой задачи находятся как линейная комбинация частных решений:

$$W_i = c_1 \omega_i^{(1)} + c_2 \omega_i^{(2)} + c_3 \omega_i^{(3)} + c_4 \omega_i^{(4)} = \vec{c} \vec{\omega}_i. \quad (190)$$

Для построения собственных функций по данной формуле необходимо провести над ортогонализированными решениями обратные преобразования. На некотором шаге интегрирования  $m$  выражение (190) приобретает вид

$$W_i(z_m) = \bar{c} (A_m \cdot \dots \cdot A_2 A_1)^{-1} \tilde{\bar{\omega}}_i(z_m), \quad (191)$$

где  $A_m \cdot \dots \cdot A_2 A_1$  – матрицы, составленные из коэффициентов  $a_{ik}$ .

Опишем кратко алгоритм расчетов, используя рекомендации, сделанные в [9]. Сначала определяются собственные значения краевой задачи. Затем система дифференциальных уравнений интегрируется повторно. После каждой процедуры ортогонализации вычисляется матрица  $B_m = A_m B_{m-1}$ ,  $(B_0)_{ij} = \delta_{ij}$  с помощью которой могут быть вычислены восстановленные базисные решения

$$\bar{\omega}_i(z_m) = B_m^{-1} \tilde{\bar{\omega}}_i(z_m). \quad (192)$$

Коэффициенты  $c_k$  в формуле (190) находятся из условий на правой границе:

$$z=1: \quad \omega_1^{(k)} = \omega_2^{(k)} = \omega_3^{(k)} = \omega_4^{(k)} = 0. \quad (193)$$

Получаем систему однородных алгебраических уравнений для  $c_k$ :

$$z=1: \quad c_1 \omega_i^{(1)} + c_2 \omega_i^{(2)} + c_3 \omega_i^{(3)} + c_4 \omega_i^{(4)} = 0 \quad (194)$$

$$(i=1, \dots, 4).$$

Определитель данной системы всегда равен нулю, следовательно, значение одного из коэффициентов произвольно. Этим объясняется невозможность определения амплитуды течения в первом порядке. После вычисления остальных коэффициентов в точках ортогонализации определяются собственные функции  $W_i$ .

Собственные функции рассматриваемых задач с использованием описанных выше методов найдены в работе [5]. В частности, показано, что для сходимости численного метода необходимо порядка 300 точек ортогонализации. При этом для повышения точности определения собственных функций расчеты проведены при количестве точек ортогонализации, равном 500. Интегрирование осуществляется методом Рунге-Кутты 4-5 порядка точности. При нахождении собственных значений критические числа Грасгофа определялись с помощью метода одномерных секущих, а соответствующие волновые числа наиболее опасных возмущений вычислялись поиском минимума функции  $G(k)$ , используя метод парабол. В результате расчетов определены собственные числа линейной задачи устойчивости и собственные функции линейной и сопряженной задач. Собственные числа с хорошей степенью точности совпали с критическими числами, определенными в работе [4]. Построены кривые устойчивости, отражающие зависимость критического числа Грасгофа от числа Рейнольдса (рис. 3.4). Из графиков видно, что акустическое воздействие значительно снижает границу устойчивости плоскопараллельного течения.

Акустическое воздействие приводит к существенному изменению надкритических режимов. В частности, подавляется вторичное течение в нижней части слоя. Более подробное исследование влияния акустического воздействия на вторичное течение проведено в ходе прямого численного моделирования.

Для нахождения собственных функций неоднородных задач второго порядка (164), (167), (169) удобно представить ее решение в виде суперпозиции общего решения однородной задачи и частного решения неоднородной:

$$W = \omega_i^q + c_1 \omega_i^{(1)} + c_2 \omega_i^{(2)} + c_3 \omega_i^{(3)} + c_4 \omega_i^{(4)}, \quad (195)$$

где  $\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}, \omega_i^{(3)}, \omega_i^{(4)}$  – частные решения однородной задачи,  $\omega_i^u$  – частное решение неоднородной задачи. Метод нахождения общего решения однородной задачи рассмотрен ранее.

При вычислении частного решения неоднородных задач в качестве начальных условий может использоваться вектор, все компоненты которого равны нулю. Однако в ходе интегрирования может значительно увеличиться проекция частного решения на быстро растущее собственное решение, вследствие чего возрастает погрешность определения собственных функций. Этот эффект можно устранить следующим способом. Как известно, к частному решению неоднородной задачи можно добавить любую линейную комбинацию частных решений однородной задачи. В ходе интегрирования производится преобразование частного решения в точках ортогонализации:

$$\tilde{\omega}_i^u = \omega_i^u + b_1 \omega_i^{(1)} + b_2 \omega_i^{(2)} + b_3 \omega_i^{(3)} + b_4 \omega_i^{(4)}. \quad (196)$$

Коэффициенты  $b_i$  подбираются таким образом, чтобы в преобразованном частном решении функции  $\omega_5^u, \omega_6^u, \omega_7^u, \omega_8^u$  были такими же, как и в начале интегрирования, т.е. нулевыми.

Для восстановления частного решения производится преобразование обратное (196). При этом необходимо учитывать, что частные решения однородной задачи также ортогонализуются, следовательно, перед восстановлением частных решений неоднородной задачи необходимо восстановить частные решения однородной задачи. Коэффициенты  $c_i$  находились из граничных условий на правой границе.

Таким образом, используя результаты вычислений собственных функций линейной задачи, можно получить решение данной неоднородной задачи. В работе [5] при решении линейной задачи собственные функции определялись только в некотором наборе точек, поэтому для интегрирования частного ре-



шения неоднородной задачи необходимо интерполировать собственные функции линейной задачи. Интерполяция осуществлялась квадратичным сплайном с использованием процедуры, входящей в математическую библиотеку IMSL Fortran.

Неоднородная система (172) состоит из дифференциальных уравнений, которые могут быть проинтегрированы аналитически. Для собственной функции скорости получаем

$$u_{20} = 2\Re \left( \int_{-1}^z w_1 u_1 d\xi \right) + Cz + B, \quad (197)$$

где коэффициенты  $C$  и  $B$  определяются из условия отсутствия возмущений на границах:

$$B = C = -\Re \left( \int_{-1}^1 w_1 u_1 d\xi \right). \quad (198)$$

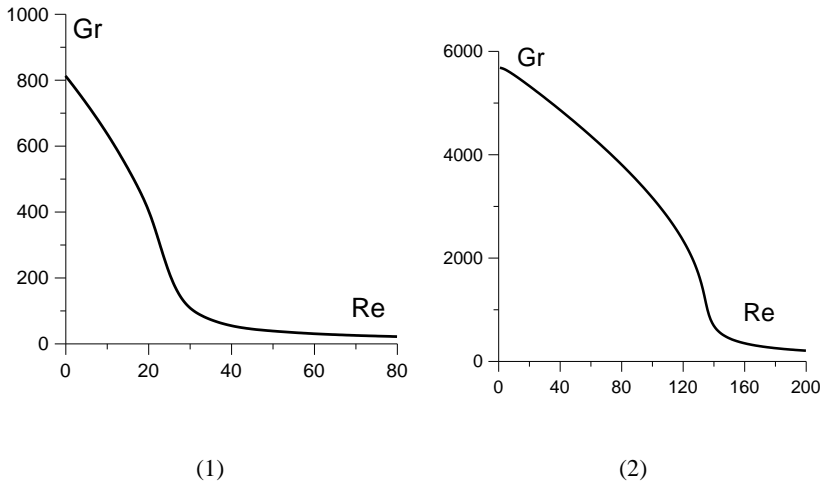


Рис. 3.4. Кривые устойчивости при: 1 –  $Pr = 1$ ; 2 –  $Pr = 0.1$

Собственная функция температуры определяется по следующей формуле

$$\mathcal{G}_{20} = \text{Pr} \left[ \int_{-1}^z \int_{-1}^{\xi} u_{20} d\xi d\zeta + 2\Re \left( \int_{-1}^z w_1 \mathcal{G}_1 d\xi \right) + Kz + L \right], \quad (199)$$

где  $K, L$  определяются из граничных условий:

$$K = L = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\xi} u_{20} d\xi d\zeta - \Re \left( \int_{-1}^1 w_1 \mathcal{G}_1 d\xi \right). \quad (200)$$

С помощью рассмотренных численных методов могут быть найдены все функции, необходимые для определения коэффициентов, входящих в дифференциальные уравнения (174). По формулам (176)–(183) проведено вычисление этих коэффициентов в широком диапазоне значений параметров задачи. Установлено, что константа Ландау  $K$  всегда положительна, следовательно, характер ветвления решений вблизи порога мягкий.

### 3.4. Сравнение с прямым численным моделированием

Численное моделирование влияния акустического воздействия на надкритические режимы адвективного течения в слое проведено в работе [5] методом конечных разностей. Опишем кратко методику численного моделирования. Вначале получим нелинейные уравнения, описывающие конвективные течения рассматриваемого типа. Применив к уравнениям (134) и (135) операцию  $\text{rot}$  и спроектировав результат на ось  $x$ , исключим добавку к распределению давления  $\tilde{p}(y, z)$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Delta \varphi + \text{Gr} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}, \quad (201)$$

где  $\varphi = \text{rot}_x \vec{v} = \partial w / \partial y - \partial v / \partial z$  – вихрь скорости.

Уравнение непрерывности позволяет ввести функцию тока, связанную с компонентами скорости следующим образом:

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (202)$$

В результате, трехмерное поле скорости определяется двумя скалярными функциями: проекцией скорости на ось  $x$  и функцией тока:

$$\vec{v} = u\vec{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial z}\vec{e}_y - \frac{\partial \psi}{\partial y}\vec{e}_z = u\vec{e}_x + \text{rot}(\psi\vec{e}_x).$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию возмущений типа продольных валов, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \Delta \varphi + \text{Gr} \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \vartheta, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} &= \Delta u - \text{Gr}z + c, \\ \Delta \psi &= -\varphi. \end{aligned} \quad (203)$$

Граничные условия для этой системы запишутся так:

$$\begin{aligned} z = \pm 1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \\ u = \text{Re}, \quad \vartheta = 0. \end{aligned} \quad (204)$$

Вследствие сделанных предположений о форме вторичного течения решение данной системы будет периодически вдоль оси  $y$ . Следовательно, расчеты можно проводить в прямоугольной области, размеры которой соответствуют одному периоду. Тогда уравнение для определения константы  $c$  (127) переписывается следующим образом:

$$Q = \int_{-1}^1 \int_0^L u dy dz = 0,$$

где  $L$  – горизонтальный размер расчетной области. К граничным условиям (204) следует добавить периодические условия на боковых границах расчетной области:

$$\begin{aligned} \psi(0, z) &= \psi(L, z), \quad \vartheta(0, z) = \vartheta(L, z), \\ \varphi(0, z) &= \varphi(L, z), \quad u(0, L) = u(L, z). \end{aligned}$$

Период вторичного течения определялся в соответствии с волновыми числами наиболее опасных возмущений.

При составлении конечно-разностного аналога уравнений (203) пространственные производные аппроксимировались центральными разностями, а производные по времени – по явной схеме второго порядка. Значения вихря на твердых границах находилось по формулам Пирсона, полученным путем разложения функции тока в ряд Тейлора в приграничной точке с точностью до кубических членов:

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,k}}{\partial z^2} = -\varphi_{1,k} = \frac{8\psi_{2,k} - \psi_{3,k}}{2h_z^2},$$

где  $h_z$  – шаг сетки по оси  $z$ . Уравнение Пуассона для функции тока решалось методом установления.

Шаг по времени в соответствии с требованиями устойчивости счета выбирался по формуле [10]:

$$\Delta t = \frac{h^2}{4 + A |\psi_{\max}|},$$

где  $\psi_{\max}$  – максимальное значение функции тока,  $A$  – эмпирический параметр (в расчетах выбирался равным 3/2). В начальный момент времени поля скорости и температуры задавались в соответствии с формулами (130), а для функции тока и вихря ско-

рости вводились малые случайные возмущения. При нахождении зависимости характеристик течения от какого-либо параметра задачи вычисления проводились с помощью метода продолжения по параметру, что позволяет значительно сократить время вычислений.

Вычисления проводились на сетке размером  $60 \times 60$  узлов. Для определения необходимого размера сетки сравнивались результаты, полученные на сетках  $30 \times 30$ ,  $40 \times 40$ ,  $50 \times 50$ ,  $60 \times 60$ ,  $70 \times 70$ . Течения, рассчитанные с использованием сеток  $60 \times 60$  и более, имеют практически одинаковую интенсивность.

Задача содержит четыре безразмерных параметра: число Рейнольдса ( $Re$ ), определяющее интенсивность акустического воздействия, Грасгофа ( $Gr$ ), характеризующее величину конвекции, Прандтля ( $Pr$ ) и горизонтальный размер расчетной области, определяющий пространственный период конвективной структуры.

Для классического адвективного течения реализуется трехвихревой режим течения с интенсивными пристеночными вихрями [7]. При увеличении числа Рейнольдса нижний вихрь подавляется, а верхний усиливается (рис. 3.5). При небольших надкритичностях изолинии функции тока  $\psi$  схожи с собственными функциями линейной задачи, обсуждавшимися в [4].

Построенные по результатам расчетов кривые подтверждают корневой закон зависимости интенсивности вторичного течения от числа Грасгофа и хорошо согласуются с результатами слабонелинейного анализа. На

рис. 3.6 представлена амплитудная кривая вторичного течения – зависимость максимального значения функции тока  $\psi_m$  от числа Грасгофа. Точками показаны результаты нелинейных расчетов, сплошная кривая получена в слабонелинейном приближении. Как видно, результаты, полученные двумя методами, неплохо согласуются друг с другом даже достаточно далеко от

порога: при относительной надкритичности 1.5 отличие результатов составляет чуть более трех процентов. Подобные амплитудные кривые позволяют определить критическое число Грасгофа с помощью экстраполяции по корневому закону.

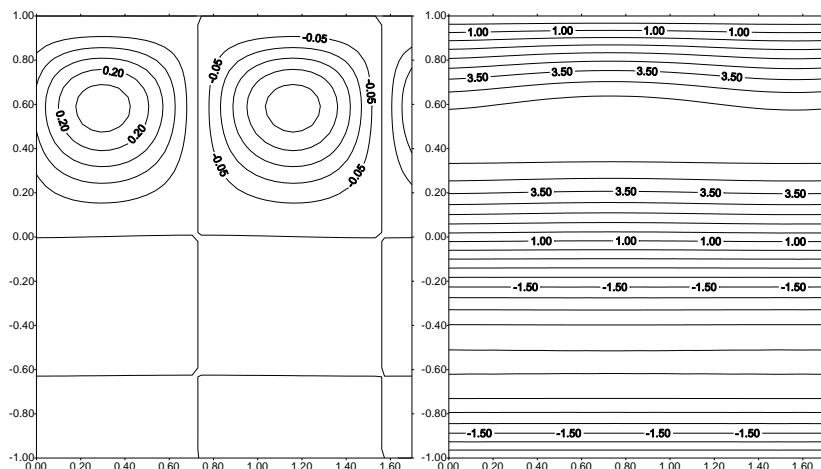


Рис. 3.5. Линии тока и изотермы при  $Gr = 640$ ,  $Re = 10$ ,  
 $Pr = 1$ ,  $k = 3.78$

Определенные по амплитудным кривым критические числа с хорошей точностью совпали со значениями, полученными в рамках линейной теории устойчивости. Расчеты проведены при  $Pr = 1, 0.5, 0.1$ . Расхождение значений критических параметров, определенных в ходе линейного исследования и прямого численного моделирования, не превышало 2 %

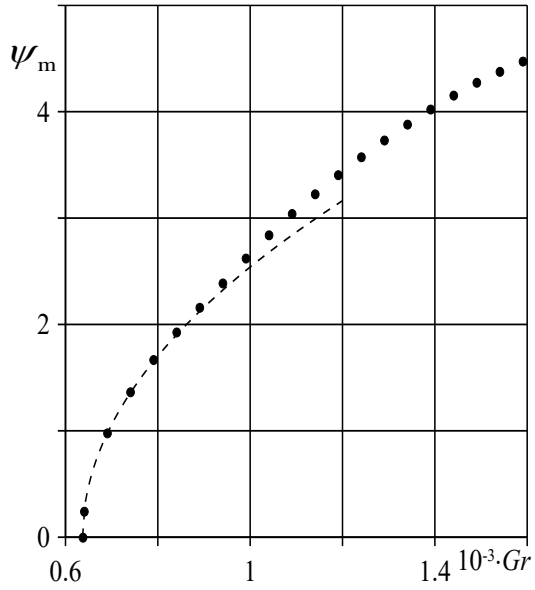


Рис. 3.6. Максимальное значение функции тока в зависимости от числа Грасгофа.  $Pr = 1, Re = 10, k = 3.78$

#### 4. СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ ПЛЁНОК ЖИДКОСТИ

Гидродинамика тонких пленок основывается на предположении о том, что в системе есть несколько характерных пространственных масштабов, которые сильно отличаются по величине. Например, характерный вертикальный масштаб (толщина пленки  $H$ ) много меньше характерного горизонтального масштаба  $L$ , так что  $H/L = \varepsilon \ll 1$ . Роль горизонтального масштаба  $L$  может выполнять длина волны критических возмущений. Однако теория тонких пленок, которую также называют теорией смазки, принципиально отличается от теории волн на мелкой воде. Несмотря на то же разделение характерных масштабов, в теории смазки важную роль играет вязкость.

Рассмотрим тонкую пленку жидкости, помещенную на твердую горизонтальную подложку. При неоднородном вертикальном нагреве в жидкости возникает конвективная неустойчивость, главным механизмом которой является термокапиллярный эффект, т.е. зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры  $\alpha = \alpha_0 - \alpha_T T$  ( $\alpha_T$  – температурный коэффициент поверхностного натяжения). При этом термогравитационный механизм развития неустойчивости, связанный со стратификацией по плотности, не должен учитываться ввиду малой толщины пленки. Уравнения, описывающие движение жидкости в такой пленке, имеют следующий вид:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \Delta \vec{v} - \text{Ga} \vec{k}, \quad (205)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \Delta T, \quad (206)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (207)$$



На нижней границе выполняется условие прилипания, а также условие фиксированности теплопотока (подложка теплоизолирована):

$$z = 0: \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -1. \quad (208)$$

Верхняя свободная граница может деформироваться, на ней должны выполняться кинематическое условие, условия баланса нормальных и касательных напряжений, а также условие для теплоотдачи в виде закона Ньютона:

$$z = h(x, y, t): \frac{\partial h}{\partial t} = w - \vec{u} \cdot \nabla h, \quad \sigma_{nn} = p - \text{Ca} K, \quad (209)$$

$$\sigma_{n\tau} = -\text{Ma} \frac{\partial}{\partial \tau} (T|_{z=h}), \quad \frac{\partial T}{\partial n} = -\text{Bi} T. \quad (210)$$

Здесь появляются новые безразмерные параметры – число Марангони  $\text{Ma} = \alpha_T \Theta h_0 / \eta \chi$ , параметр капиллярности  $\text{Ca} = \alpha_0 h_0 / \eta \chi$  и число Био  $\text{Bi} = q h_0 / \kappa$ .

Тензор вязких напряжений в безразмерной форме определяется как:

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

Единичный вектор нормали к свободной поверхности связан с формой свободной поверхности  $h(x, y, t)$  следующим образом:

$$\vec{n} = \frac{\vec{k} - \nabla h}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}},$$

а единичный вектор касательный к свободной поверхности  $\vec{\tau}$  определяется из условия перпендикулярности к вектору  $\vec{n}$ . Кривизна свободной поверхности определяется как  $K = -\operatorname{div} \vec{n}$ .

#### 4.1. Приближение тонких пленок

Применим к задаче (205)–(210) приближение тонких пленок: введем т.н. «растянутые» координаты при помощи малого параметра  $\varepsilon = h_0/L$

$$X = \varepsilon x, \quad Y = \varepsilon y, \quad Z = z. \quad (211)$$

Смысл этого перемасштабирования координат заключается в том, чтобы в уравнениях содержались новые координаты  $X, Y, Z$ , одинаковые по порядку величины. Из уравнения Навье-Стокса ясно, что продольная компонента скорости – малая величина порядка  $\varepsilon$ , так как продольный перепад давления на больших расстояниях очень мал (нет никакой прокачки). При этом из уравнения непрерывности следует, что скорость поперек слоя должна быть ещё меньше, следовательно,

$$\vec{U} = \frac{\vec{u}}{\varepsilon}, \quad W = \frac{w}{\varepsilon^2}. \quad (212)$$

Очевидно, масштабы времени, характеризующего крупномасштабные продольные движения, должны быть медленными. Причем из (211) и (212) следует, что перемасштабировать время следует как квадрат малого  $\varepsilon$

$$\tau = \varepsilon^2 t. \quad (213)$$

Подстановка выражений (211)–(213) в уравнения (205)–(207) и граничные условия (208)–(210) приводит к следующей перемасштабированной системе:

$$\frac{\varepsilon^2}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau} + \bar{U} \cdot \nabla \bar{U} + W \frac{\partial \bar{U}}{\partial Z} \right) = -\nabla p + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial Z^2} + \varepsilon^2 \nabla^2 \bar{U}, \quad (214)$$

$$\frac{\varepsilon^4}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial W}{\partial \tau} + \bar{U} \cdot \nabla W + W \frac{\partial W}{\partial Z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial Z} + \varepsilon^4 \nabla^2 W + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} - \text{Ga}, \quad (215)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial T}{\partial \tau} + \bar{V} \cdot \nabla T = \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} + \varepsilon^2 \nabla^2 T, \quad (216)$$

$$\nabla \bar{U} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0, \quad (217)$$

$$Z = 0: \bar{U} = W = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial Z} = -1. \quad (218)$$

$$Z = h(X, Y, \tau): \frac{\partial h}{\partial \tau} = W - \bar{U} \cdot \nabla h, \quad \varepsilon^2 \nabla h \cdot \nabla T - \frac{\partial T}{\partial Z} = \text{Bi} T \sqrt{s_h}, \quad (219)$$

$$\begin{aligned} & \left( \varepsilon^2 \nabla W + \frac{\partial \bar{U}}{\partial Z} \right) \left[ 1 - \varepsilon^2 (\nabla h)^2 \right] + 2\varepsilon^2 \nabla h \left( \frac{\partial W}{\partial Z} - \nabla \bar{U} \right) = \\ & = -\text{Ma} \left( \nabla T + \frac{\partial T}{\partial Z} \nabla h \right) \sqrt{s_h}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon^2 \left[ \varepsilon^2 \nabla \bar{U} (\nabla h)^2 + \frac{\partial W}{\partial Z} - \nabla h \left( \varepsilon^2 \nabla W + \frac{\partial \bar{U}}{\partial Z} \right) \right] - \\ & - \frac{2}{3} s_h \varepsilon^2 \left( \frac{\partial W}{\partial Z} + \nabla \bar{U} \right) = p s_h + \frac{\varepsilon^2 \text{Ca} \nabla^2 h}{\sqrt{s_h}}, \end{aligned}$$

где введено обозначение  $s_h = 1 + \varepsilon^2 (\nabla h)^2$ . Здесь и далее подразумевается, что градиент двумерный  $\nabla = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y, 0)$ . Прежде чем переходить к изучению вкладов разного порядка по  $\varepsilon$ , проинтегрируем уравнение непрерывности (217) поперек слоя от 0 до  $h(X, Y, \tau)$ . В отличие от остальных уравнений, в этом

уравнении все слагаемые уже одного порядка. Используя граничные условия для скорости в (218) и кинематическое условие на свободной границе в (219) и интегрируя по частям, получаем

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \nabla \cdot \int_0^h \vec{U} dZ = 0. \quad (220)$$

Это уравнение представляет собой более удобную запись кинематического условия, дополнительно гарантирующую сохранение массы в области со смещающейся верхней границей. Зная решение  $\vec{U}(X, Y, Z, \tau)$ , можно определить закон изменения формы свободной поверхности  $h(X, Y, \tau)$ .

Применим далее разложение всех физических полей в ряд по малому  $\varepsilon$ . В системе (214)–(219) все малые слагаемые пропорциональны четным степеням  $\varepsilon$ , следовательно, скорость, температура и давление должны раскладываться в ряд как:

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{U}_0 + \varepsilon^2 \vec{U}_1 + \dots, \quad W = W_0 + \varepsilon^2 W_1 + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon^2 p_1 + \dots, \\ T &= -z + \text{Bi}^{-1} + T_0 + \varepsilon^2 T_1 + \dots \end{aligned} \quad (221)$$

Здесь для удобства в разложении для температуры выделена линейная равновесная часть.

Подставляя разложение (221) в систему (214)–(219) и собирая слагаемые с одинаковыми степенями малого параметра  $\varepsilon$ , получаем краевые задачи в каждом порядке. Однако прежде нужно разобраться с безразмерными параметрами  $\text{Ma}$ ,  $\text{Bi}$ ,  $\text{Ga}$ ,  $\text{Ca}$ ,  $\text{Pr}$ .

## 4.2. Характерные значения параметров задачи

Действительно, значения безразмерных параметров могут не всегда быть  $O(1)$  по отношению к малому  $\varepsilon$ . Что касается числа Прандтля  $Pr$ , то в дальнейшем будет показано, что от него не зависит решение в низших порядках по  $\varepsilon$ , поэтому его мы оставим как есть. Аналогично мы не будем ставить ограничения на величину числа Марангони  $Ma$ , которое является в данной задаче главным критерием неустойчивости, с целью охватить наиболее широкий класс явлений. Характерные значения остальных параметров влияют на динамику тонкой пленки значительным образом, поэтому требуют отдельного обсуждения.

Число Галилея часто в подобных задачах рассматривается асимптотически большим,  $Ga = O(\varepsilon^{-2})$ . Действительно, если в качестве примера тонкой пленки взять слой воды толщиной 1 мм при нормальных условиях, получится  $Ga \sim 10^5$ . Однако ясно, что с уменьшением толщины пленки это значение может значительно понизиться (так как  $Ga \sim H^3$ ). Так, для ультратонких пленок ( $\sim 0,1$  мм для воды) значение числа Галилея может считаться конечным,  $Ga = O(1)$ . Также число Галилея может быть значительно меньшим в условиях микрогравитации.

Параметр капиллярности определяет величину поверхностного натяжения по отношению к диссипации. Для 1 мм пленки воды при нормальных условиях  $Ca \sim 5 \cdot 10^5$ . Однако известно, что вода обладает одним из самых сильных поверхностных натяжений. Выбирая другие жидкости, можно получить меньшие значения  $Ca$ , в частности, часто в исследовании тонких пленок полагается  $Ca = O(1)$ . Известно, что параметр капиллярности определяет волновое число (длину волны) критических возмущений. Так, при большом  $Ca$  неустойчивость возникает длинноволновым образом, так как сильное поверхностное натя-

жение не позволяет свободной поверхности деформироваться с большой кривизной.

Число Био, характеризующее теплоотдачу со свободной поверхности, влияет на характер критических возмущений, как и параметр капиллярности. Длинноволновые возмущения приводят к развитию неустойчивости при подогреве снизу в случае малых  $Bi$  (свободная поверхность слабо отдает тепло). Известно две асимптотики для числа Био:  $Bi \sim \varepsilon^2$  и  $Bi \sim \varepsilon^4$ . В первом случае возможна как стационарная, так и колебательная конвекции. Во втором – только стационарная.

Выбор конкретного «скейлинга» безразмерного параметра влияет на конечный результат, так как в системе (214)–(219) различные слагаемые (и соответственно, различные физические эффекты, стоящие за ними) оказываются ведущими в том или ином порядке по малому  $\varepsilon$ .

### 4.3. Уравнения длинноволновой конвекции в пленке со слабой теплоотдачей со свободной поверхности

Далее мы рассмотрим следующие скейлинги безразмерных параметров:

$$Ga = O(1), \quad Ca = \varepsilon^{-2}C, \quad Bi = \varepsilon^2\beta. \quad (222)$$

Наконец, подставляя (222) вместе с длинноволновым разложением (221) в систему (214)–(219), получаем в нулевом порядке по малому  $\varepsilon$  следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}_0}{\partial Z^2} = \nabla p_0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial Z} = -Ga, \quad \frac{\partial^2 T_0}{\partial Z^2} = 0, \quad \nabla \bar{U}_0 + \frac{\partial W_0}{\partial Z} = 0, \quad (223)$$

$$Z = 0: \quad \bar{U}_0 = W_0 = 0, \quad \frac{\partial T_0}{\partial Z} = 0, \quad (224)$$

$$Z = h(X, Y, \tau): \frac{\partial h}{\partial \tau} = W_0 - \vec{U}_0 \cdot \nabla h, \quad \frac{\partial T_0}{\partial Z} = 0, \quad (225)$$

$$\frac{\partial \vec{U}_0}{\partial Z} = -\text{Ma} \nabla (T_0 + h), \quad p = -C \nabla^2 h.$$

Решение данной краевой задачи может быть найдено точно:

$$p_0 = \Pi(X, Y, \tau) - \text{Ga} Z, \quad T_0 = \Theta(X, Y, \tau),$$

$$\vec{U}_0 = \frac{1}{2} Z (Z - 2h) \nabla \Pi - \text{Ma} Z \nabla (\Theta - h), \quad (226)$$

$$W_0 = \frac{1}{2} Z^2 \nabla \cdot \left[ \frac{1}{3} (3h - Z) \nabla \Pi + \text{Ma} \nabla (\Theta - h) \right].$$

Здесь  $\Pi(X, Y, \tau) = \text{Ga} h - C \nabla^2 h$ .

Как видно, решение в главном порядке содержит крупномасштабные искажения основного состояния, зависящие от продольных координат и медленного времени. Эти функции  $\Pi(X, Y, \tau)$  и  $\Theta(X, Y, \tau)$  подлежат определению в задачах следующих порядков по малому  $\varepsilon$ . Однако эволюцию свободной поверхности пленки можно описать уже в главном порядке. Так как возмущения скорости  $\vec{U}_0$  и  $W_0$  являются наибольшими (вклады в низших порядках по  $\varepsilon$  будут заведомо меньше), значит, по ним можно судить и об изменении формы свободной поверхности. Подставляя вычисленные в главном порядке продольную компоненту скорости  $\vec{U}_0$  в закон сохранения массы, получим после интегрирования:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \nabla \cdot \left[ \frac{h^3}{3} \nabla \Pi + \frac{h^2}{2} \text{Ma} \nabla (\Theta - h) \right]. \quad (227)$$

Выражение в скобках, по-видимому, имеет смысл продольного потока жидкости  $\vec{j}$  (осредненного поперек слоя), тогда можно записать

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = -\nabla \cdot \vec{j}.$$

Уравнение (227) описывает медленную эволюцию толщины пленки жидкости. Например, в задачах о стекании тонкой пленки одно подобное уравнение полностью описывает динамику пленки. Однако в рассматриваемом случае – при наличии неоднородного нагрева – распределение температуры оказывает значительное влияние на поведение пленки жидкости. Следовательно, нам необходимо получить подобное уравнение для эволюции температуры  $\Theta$ . Для этого придется пойти в следующие порядки по малому  $\varepsilon$ . При этом из всех уравнений и граничных условий в (214)–(219) нам понадобятся только уравнения и условия для температуры.

Задача в первом порядке по малому  $\varepsilon$  содержит следующие уравнение и граничные условия на температуру:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial Z^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \nabla^2 \Theta + \vec{U}_0 \cdot \nabla \Theta - W_0, \quad (228)$$

$$Z = 0: \frac{\partial T_1}{\partial Z} = 0, \quad Z = h: \frac{\partial T_1}{\partial Z} = \nabla h \cdot \nabla \Theta - \frac{1}{2} (\nabla h)^2 - \beta(\Theta - h). \quad (229)$$

Интегрируя уравнение (228) и используя граничные условия (229), получаем эволюционное уравнение для  $\Theta$ :

$$h \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \nabla \cdot (h \nabla \Theta) - \frac{1}{2} (\nabla h)^2 - \beta(\Theta - h) + \vec{j} \cdot \nabla (\Theta - h) + \nabla \cdot \left[ \frac{h^4}{8} \nabla \Pi + \frac{h^3}{6} Ma \nabla (\Theta - h) \right]. \quad (230)$$



Уравнения (227) и (230) теперь образуют замкнутую систему, которая в полной мере описывает крупномасштабную эволюцию толщины и температуры пленки жидкости.

Линейный анализ устойчивости, проведенный в рамках уравнений (227) и (230), показывает существование критических монотонных или колебательных возмущений (в зависимости от значений параметров задачи). Нарастание этих возмущений приводит к развитию неустойчивости. Однако, как уже неоднократно упоминалось в данном пособии, линейный анализ не может обнаружить такие явления, как жесткое возбуждение конвекции, или определить конвективный паттерн.

#### 4.4. Вывод амплитудных уравнений

Проведем слабонелинейный анализ в рамках нелинейных уравнений (227) и (230). Введем новый малый параметр – надкритичность  $\delta$ , который можно определить как

$$\delta^2 = \frac{\text{Ma} - \text{Ma}_c}{\text{Ma}_2},$$

где  $\text{Ma}_c$  – пороговое значение числа Марангони. Раскладывая толщину пленки и температуру в ряд по малому  $\delta$ :

$$h = 1 + \delta h_1 + \delta^2 h_2 + \dots, \quad \Theta = 1 + \delta \Theta_1 + \delta^2 \Theta_2 + \dots,$$

а также вводя новые медленные времена:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \delta^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots,$$

(зануление линейных вкладов в разложениях  $\text{Ma}$  и  $\partial/\partial \tau$  следует из свойств нелинейных уравнений и может быть строго показано), получаем в первом порядке по  $\delta$ :

$$\frac{\partial h_1}{\partial \tau_0} = \nabla^2 \left[ \frac{1}{3} (\text{Ga} h_1 - C \nabla^2 h_1) + \frac{1}{2} \text{Ma}_c (\Theta_1 - h_1) \right], \quad (231)$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau_0} = \nabla^2 \left[ \frac{1}{8} (\text{Ga} h_1 - C \nabla^2 h_1) + \frac{1}{6} \text{Ma}_c (\Theta_1 - h_1) \right] - \beta (\Theta_1 - h_1). \quad (232)$$

Данные линейные уравнения полностью совпадают с уравнениями из линейного анализа устойчивости. Решение линейных уравнений можно представить в виде суперпозиции частных решений

$$h_1 = \sum_{j=1}^N A_j(\tau_2) \exp(i\vec{k}_j \cdot \vec{r} - i\omega\tau_0) + \text{к.с.},$$

$$\Theta_1 = \alpha \sum_{j=1}^N A_j(\tau_2) \exp(i\vec{k}_j \cdot \vec{r} - i\omega\tau_0) + \text{к.с.},$$

где  $|\vec{k}_j| = k$  – волновое число нейтральных возмущений,  $\omega$  – частота критических возмущений (для колебательной неустойчивости),  $\vec{r} = (X, Y, Z)$  – радиус-вектор. Медленноменяющиеся амплитудные функции  $A_j(\tau_2)$  подлежат определению в уравнениях старших порядков. Изучая нелинейную динамику частных решений, соответствующих различным комбинациям бегущих волн, можно предсказать поведение тонкой пленки.

В старших порядках по малому  $\delta$  все уравнения будут иметь одинаковую структуру вида

$$\frac{\partial h_n}{\partial \tau_0} - \nabla^2 \left[ \frac{1}{3} (\text{Ga} h_n - C \nabla^2 h_n) + \frac{1}{2} \text{Ma}_c (\Theta_n - h_n) \right] = F_n^1,$$

$$\frac{\partial \Theta_n}{\partial \tau_0} - \nabla^2 \left[ \frac{1}{8} (\text{Ga} h_n - C \nabla^2 h_n) + \frac{1}{6} \text{Ma}_c (\Theta_n - h_n) \right] - \beta (\Theta_n - h_n) = F_n^2,$$

где  $F_n^1$  и  $F_n^2$  – неоднородности, которые могут содержать секулярные члены. Условие разрешимости такой неоднородной системы несложно получить аналитически (см. раздел 1.3). В самом простом случае – одиночной бегущей волны – подставление решения первого порядка в виде  $h_1, \Theta_1 \sim \exp(ikX - i\omega\tau_0)$ . В уравнения  $n$ -го порядка по малой надкритичности  $\delta$  приводит к появлению в неоднородностях секулярных членов  $(S_n^1, S_n^2)\exp(ikX - i\omega\tau_0)$ . Уничтожение секулярных членов приводит к следующему условию разрешимости для монотонной моды:

$$3S_n^1 = (Ga + Ck^2)S_n^2$$

и для колебательной моды

$$\left(k^2 + \frac{\text{Ma}_c}{6} + \beta - i\omega\right)S_n^1 = \frac{\text{Ma}_c k^2}{2}S_n^2,$$

где амплитуды секулярных членов в первом уравнении  $S_n^1$  и во втором  $S_n^2$  являются комбинацией параметров задачи – критического числа Марангони, волнового числа, числа Галилея, числа Био, параметра капиллярности, а также они зависят от амплитудных функций  $A_j(\tau_2)$  и их производных.

Выполнение условий разрешимости приводит к дифференциальному уравнению для медленноменяющейся амплитудной функции  $A$ :

$$\frac{dA}{d\tau_2} = \gamma \text{Ma}_2 A - \tilde{K}A|A|^2. \quad (233)$$

Коэффициент  $\gamma > 0$ , следовательно, знак  $\tilde{K}$  определяет тип возбуждения конвекции:  $\tilde{K} > 0$  соответствует мягкому возбуждению конвекции,  $\tilde{K} < 0$  – жесткому возбуждению конвекции. Эксперименты и численное моделирование показывают,

что в случае с тонкими пленками жесткое возбуждение приводит к разрыву пленки и образованию т.н. сухих пятен на подложке.

Вычисление коэффициента  $\tilde{K}$  проводилось как для монотонной, так и для колебательной мод длинноволновой неустойчивости. Было показано, что в зависимости от значений параметров задачи может наблюдаться как мягкое, так и жесткое возбуждение конвекции.

В рамках слабонелинейного анализа можно рассмотреть также взаимодействие возмущений в виде двух бегущих волн, расположенных перпендикулярно на плоскости  $XOY$ :

$$h_1, \Theta_1 \sim A \exp(ikX - i\omega\tau_0) + B \exp(ikY - i\omega\tau_0).$$

Такое решение в бесконечной области формирует т.н. квадратную решётку. Медленная эволюция амплитудных функций в таком случае описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dA}{d\tau_2} = (\gamma Ma_2 - K_0 |A|^2 - K_1 |B|^2)A,$$

$$\frac{dB}{d\tau_2} = (\gamma Ma_2 - K_0 |B|^2 - K_1 |A|^2)B.$$

Стационарные решения такой системы соответствуют конвективным структурам («паттернам»), которые будут наблюдаться в реальности на поверхности тонкой пленки. Для монотонной неустойчивости оказывается, что реализоваться могут как валы, так и квадраты, в зависимости от параметров задачи.

В случае колебательной неустойчивости среди возможных структур: бегущие валы, стоячие валы, бегущие квадраты, стоячие квадраты – устойчивыми (т.е. наблюдаемыми) оказываются только бегущие валы.

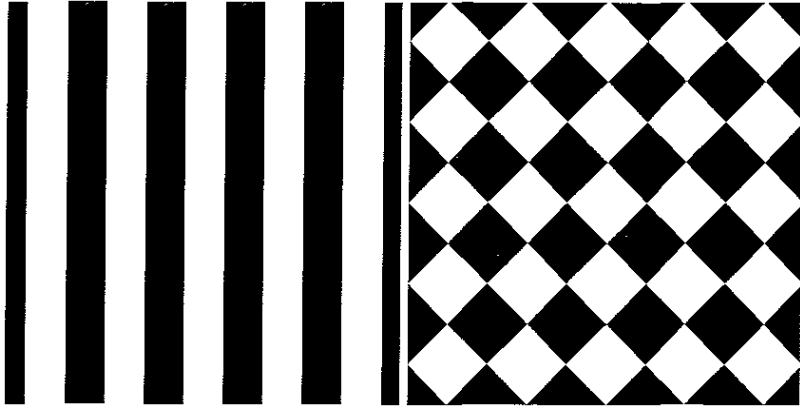


Рис. 4.1. Стационарные решения в виде валов и квадратов [11]

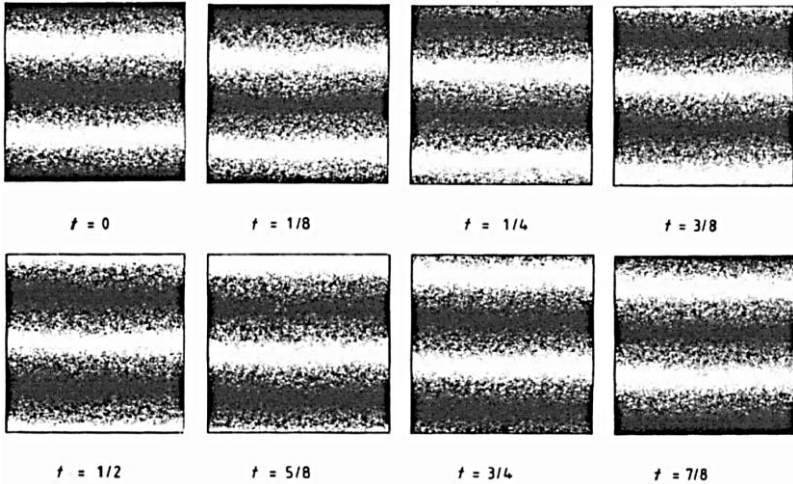


Рис. 4.2. Экспериментальное наблюдение бегущих валов [12]

Ещё с первых экспериментов Бенара известно, что в подогреваемом тонком слое преимущественно наблюдаются гекса-

гональные (шестиугольные) конвективные структуры. Поэтому можно рассматривать слабонелинейный анализ взаимодействия трех бегущих волн, которые образуют гексагональную решетку:

$$h_1, \Theta_1 \sim A \exp(ikX - i\omega\tau_0) + B \exp(-ikX/2 + \sqrt{3}i kY/2 - i\omega\tau_0) + \\ + C \exp(-ikX/2 - \sqrt{3}i kY/2 - i\omega\tau_0).$$

Подстановка решения в таком виде в задачи второго, а потом и третьего порядков по малому параметру  $\delta$  приводит к появлению секулярных членов. В результате уничтожения этих членов мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию огибающих функций  $A, B, C$ . Анализ стационарных решений этой системы показывает, что паттерны в виде гексагонов устойчивы в определенной области параметров в случае монотонной конвекции. Для колебательной неустойчивости бегущие валы остаются наиболее вероятно реализуемыми в эксперименте паттернами.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

2. *Непомнящий А.А.*, Об устойчивости пространственно-периодических конвективных движений в горизонтальном слое с теплоизолированными границами// Гидродинамика, вып. 9. Пермь: Перм. Пед. ин-т. 1976. С. 53-59.

3. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989, 319 с.

4. *Любимов Д.В., Шкляев С.В.* Об устойчивости адвективного термоакустического течения // Изв. РАН. МЖГ. 2000. №3. С.10-21.

5. *Иванцов А.О.* Слабонелинейный анализ устойчивости термоакустического адвективного течения // Вестник Пермского университета. Физика. 2019. № 3. С. 28-44.

6. *Любимов Д.В.* О тепловой конвекции в акустическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2000. №2. С. 28-36.

7. *Мызников В.М.* Конечно-амплитудные конвективные движения жидкости в горизонтальном слое с продольным градиентом температуры // Математические модели течений жидкости: тр. 6 Всес. семинара по числ. методам механики вязкой жидкости. Новосибирск: Изд-во Ин-та теор. и прикл. мех. СО АН СССР, 1978. С. 176-186.

8. *Бирих Р.В., Рудаков Р.Н. Семакин И.Г.* Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений. Ч. II // Конвективные течения: сб. научн. тр. Пермь: Изд-во Перм. ун-та. 1979. С. 58-60.

9. *Бирих Р.В., Рудаков Р.Н.* Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений. Ч. I // Гидродинамика. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1974. Вып. V. С.43-46

10. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Юрков Ю.С.* Конечно-амплитудные конвективные движения в прямоугольных полостях с внутренними источниками тепла // Гидродинамика. Вып. V. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1974. С. 3-23.

11. *Hoyle R.* Pattern formation: an introduction to methods. Cambridge: Cambridge University Press, 2006, 433 p.

12. *Silber M., Knobloch E.* Hopf bifurcation on a square lattice // Nonlinearity. 1991. V. 4. P. 1063-1106.



*Учебное издание*

**Самойлова Анна Евгеньевна**  
**Иванцов Андрей Олегович**

## **Слабонелинейный анализ в задачах гидродинамики**

Учебное пособие

Редактор *Н. И. Стрекаловская*  
Корректор *А. В. Цветкова*  
Компьютерная верстка *О. К. Кардаковой*

---

Объем данных 1,73 Мб  
Подписано к использованию 15.10.2021

---

Размещено в открытом доступе  
на сайте [www.psu.ru](http://www.psu.ru)  
в разделе НАУКА / Электронные публикации  
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр  
Пермского государственного  
национального исследовательского университета  
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15