ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный университет»

В. К. Хеннер, С.В. Мингалев

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ И ТЕОРИЮ ПОЛЯ

Учебное пособие

Пермь 2009

УДК 533.171.12(07)
ББК 22.382 Я 7
Х 38

Хеннер В.К.

Х 38 Введение в квантовую электродинамику и теорию поля: учеб. пособие/ В. К. Хеннер, С. В. Мингалев; Перм. гос. ун-т.– Пермь, 2009.– 106 с.:ил.

ISBN 978-5-7944-1262-8

В учебном пособии излагаются основы квантовой электродинамики и релятивистской квантовой теории поля. Пособие содержит три части. В первой рассматриваются лежащие в основе квантовой электродинамики уравнения Клейна–Гордона и Дирака, описывающие поведение частиц с целым и полуцелым спином. В этой части приводятся решения этих уравнений для свободной частицы и частицы в электромагнитном поле, а также для электрона в водородоподобном ионе. Во второй части даётся введение в квантовую теорию поля и на основании её в терминах операторов рождения и уничтожения модифицируются решения уравнений Дирака и Клейна–Гордона. Третья часть посвящена теории возмущений и получению фейнмановских диаграмм. Подробно рассматриваются основные электродинамические процессы во втором порядке теории возмущений.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов, специализирующихся по теоретической физике.

УДК 533.171.12(07)
ББК 22.382 Я 7

Рецензенты: к.т.н., проф. кафедры прикладной физики ПГТУ ***А.Н. Паршаков***, к ф.-м.н., ст. науч. сотр. ИМСС УрО РАН ***В.И. Носков***

Печатается по решению редакционно-издательского совета Пермского государственного университета

ISBN 978-5-7944-1262-8

Оглавление

1.Уравнение Дирака

1.1.Принцип соответствия и уравнение Шредингера

Перейти от классической физики к квантовой можно заменив физические величины операторами, при этом импульс $\vec{p}$ заменяется на оператор $-i\hbar\nabla$, энергия E - на $i\hbar\partial/\partial t$. Заменив в выражении для энергии свободной частицы $E=\vec{p}^2/2m$ физические величины $\vec{p}$ и E этими операторами и подействовав ими на функцию $\psi\left(x_k,t\right)$, мы получим уравнение Шредингера для свободной частицы

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi\ . \qquad (1.1.1)$$

Квадрат модуля волновой функции $\psi\left(x_k,t\right)$ определяет плотность вероятности нахождения частицы в точке x_k в момент времени t. Эволюция плотности вероятности определяется уравнением непрерывности; чтобы получить его, напишем сопряжённое (1.1.1) уравнение

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*\ , \qquad (1.1.2)$$

а затем объединим (1.1.1) и (1.1.2), составив комбинацию

$$\psi^*\cdot(1.1.1)\text{-}\psi\cdot(1.1.2)=0\ .$$

После подстановки вместо (1.1.1) и (1.1.2) соответствующих выражений получим

$$\psi^*\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\right)+\psi\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)+\left(\psi^*\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi-\psi\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*\right)=0\ .$$

Воспользовавшись тождествами

$$\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*=div\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)\ \text{и}\ \psi^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi\right)+\psi\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)=\frac{\partial\psi\psi^*}{\partial t},$$

получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\vec{j}=0\ , \qquad (1.1.3)$$

где $\rho=\psi\psi^*=\left|\psi\right|^2\geq 0$ - плотность вероятности, а

$$\vec{j}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi\right) \qquad (1.1.4)$$

– вектор плотности тока вероятности.

Уравнение Шредингера (1.1.1) справедливо только для свободной частицы; в произвольном же случае оно имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi , \qquad (1.1.5)$$

где H – оператор Гамильтона. В классической механике

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V ,$$

где V – потенциальная энергия частицы. Замена импульса оператором даёт выражение для гамильтониана в квантовой механике:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V . \qquad (1.1.6)$$

1.2. Уравнение Клейна–Гордона

Уравнение Шредингера справедливо только для нерелятивистских энергий, много меньших энергии покоя частицы. Наиболее очевидный путь получения релятивистского уравнения заключается в следующем. Во-первых, возьмем релятивистское выражение для энергии свободной частицы– формулу Эйнштейна

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2 , \qquad (1.2.1)$$

а затем заменим энергию E и импульс $\vec{p}$ операторами $i\hbar\partial/\partial t$ и $-i\hbar\nabla$. Подействовав операторным соотношением (1.2.1) на функцию $\phi\left(x_k, t\right)$, получим уравнение

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = \left(m^2c^4 - \hbar^2c^2\nabla^2\right)\phi .$$

Разделив на $\hbar^2$, запишем его в виде

$$\left(\frac{m^2c^2}{\hbar^2} - \nabla^2 + \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\phi = 0 . \qquad (1.2.2)$$

Оператор $-\nabla^2 + \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}$ (по повторяющемуся индексу k подразумевается суммирование) называется оператором Даламбера и обозначается $\Box$:

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0 . \qquad (1.2.3)$$

Как известно, $\lambda = \hbar/mc$ – это комптоновская длина волны частиц с массой m. Уравнение (1.2.3) называется уравнением Клейна–Гордона

(Klein–Gordon) и является обобщением уравнения Шредингера на случай релятивисткой частицы.

К сожалению, это уравнение имеет ряд следствий, затрудняющих его интерпретацию. Одно из них вытекает из того, что это уравнение второго порядка по времени. Это означает, что для нахождения $\phi(x_k, t)$ в момент времени t необходимо в начальный момент t_0 знать не только саму волновую функцию, но и её производную по времени. В нерелятивистской квантовой механике, основанной на уравнении Шредингера, достаточно знать волновую функцию в начальный момент времени, чтобы определить её изменение во времени. Необходимость дополнительно знать и производную волновой функции в начальный момент времени противоречит основным постулатам квантовой механики.

Вторым затрудняющим моментом является то, что из выражения (1.2.3) нельзя получить уравнение непрерывности с плотностью вероятности, равной квадрату модуля волновой функции, как должно быть в квантовой механике. Попытаемся составить уравнение непрерывности, действуя так же, как и в случае уравнения Шредингера, т.е. запишем уравнение, сопряжённое (1.2.3)

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi^* = 0 , \qquad (1.2.4)$$

и объединим (1.2.3) и (1.2.4) следующим образом:

$$\phi^*\cdot(1.2.3) - \phi\cdot(1.2.4) = 0 .$$

После подстановки вместо (1.2.3) и (1.2.4) соответствующих выражений получим

$$\phi^*\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\phi - \phi\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\phi^* = 0 . \qquad (1.2.5)$$

Воспользовавшись соотношениями

$$-\phi^*\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\phi + \phi\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\phi^* = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial x_k} - \phi^*\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)$$

и

$$\left(\phi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \phi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^*\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)$$

и умножив (1.2.5) на $\hbar/2im$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right) + \frac{\partial j_k}{\partial x_k} = 0 . \qquad (1.2.6)$$

Выражение

$$j_k = \frac{i\hbar}{2m}\left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial x_k}\right), \qquad (1.2.7)$$

стоящее под знаком дивергенции, совпадает с выражением плотности потока вероятности, получаемой из уравнения Шредингера. Однако величина

$$\left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\right) \qquad (1.2.8)$$

не может быть плотностью вероятности, так как она может быть как положительной, так и отрицательной. Таким образом, простой аналог квантово-механического уравнения непрерывности для уравнения Клейна–Гордона получить нельзя.

Ещё одна проблема связана с тем, что энергия частицы

$$E_{\pm} = \pm\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} \qquad (1.2.9)$$

может быть как отрицательной, так и положительной. Отрицательная энергия не имеет физического смысла и в специальной теории относительности E_- можно не рассматривать. Однако у уравнения Клейна–Гордона существует два дуальных решения, описывающие плоские волны с положительной и отрицательной энергией,

$$\phi_+ = Ae^{-i(E_+t - \vec{p}\vec{r})/\hbar} \text{ и } \phi_- = Ae^{-i(E_-t - \vec{p}\vec{r})/\hbar}, \qquad (1.2.10)$$

где коэффициент $A = (2\pi\hbar)^{-3/2}$ соответствует обычной нормировке на дельта-функцию. Проверить, что ϕ_+ и ϕ_- действительно являются решениями уравнения Клейна–Гордона, можно прямой подстановкой. Уравнение же Шредингера допускает только решение ϕ_+ с положительной энергией, $E = \vec{p}^2 / 2m$.

Перед тем как перейти к дальнейшему рассмотрению, скажем несколько слов о четырёхмерных векторах и метрике. В нашем курсе не используются контравариантные и ковариантные векторы. Четырёхмерный вектор координат будет записываться в виде $x_\alpha = (x_k, ict)$, где $\vec{r} = x_k$ – трёхмерный радиус-вектор, t – время; греческие индексы имеют значения $1,2,3,4$, латинские– значения $1,2,3$ (сокращенная запись вектора x_α – просто x). Таким же образом мы будем записывать все четырёхмерные векторы. Например, четырёхмерный вектор потенциала электромагнитного поля запишется в виде $A_\alpha = (\vec{A}, i\Phi)$, а

четырёхмерный вектор энергии-импульса–в виде $p_\alpha = (\vec{p}, iE/c)$, где $\vec{p}$ – трёхмерный импульс, а E – энергия частицы. В такой метрике при мнимой единице в четвертой компоненте векторов метрический тензор будет единичной матрицей:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скалярными величинами являются интервал $x^2 = x_\alpha x_\alpha = \vec{r}^2 - c^2t^2$ и $p^2 = \vec{p}^2 - E^2/c^2 = -m^2c^4$. В квантовой электродинамике и в физике частиц такую метрику называют метрикой Паули.

Уравнение Клейна–Гордона, при использовании вектора p^2, имеет вид

$$(p^2 + m^2c^4)\phi(x) = 0, \qquad (1.2.11)$$

или, выбрав систему единиц таким образом, что $\hbar = 1$ и $c = 1$,

$$(p^2 + m^2)\phi(x) = 0. \qquad (1.2.12)$$

В метрике с метрическим тензором

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (1.2.13)$$

(в физике частиц ее называют метрикой Фейнмана) надо различать два вида векторов: контравариантные, a^α, такие как $x^\alpha = (ct, x_k)$, $p^\alpha = (E/c, \vec{p})$, $A^\alpha = (\Phi, \vec{A})$, и ковариантные, a_α, такие как $x_\alpha = (ct, -x_k)$, $p_\alpha = (E/c, -\vec{p})$, $A_\alpha = (\Phi, -\vec{A})$, связанные соотношением $a_\alpha = g_{\alpha\beta}b^\beta$. Скалярное произведение определяется как $ab = g_{\alpha\beta}a^\beta b^\alpha = a_\alpha b^\alpha$, тогда $p^2 = g_{\alpha\beta}p^\beta p^\alpha = p_\alpha p^\alpha = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = m^2c^4$ и уравнение Клейна–Гордона в метрике Фейнмана имеет вид (положив $c = 1$)

$$(p^2 - m^2)\phi(x) = 0. \qquad (1.2.14)$$

1.3. Уравнение Дирака

Поль Дирак (Paul Dirac) в 1928 г. вывел другое квантово-механическое релятивистское уравнение, содержащее только первую производную по времени. Он исходил из того, что в специальной теории относительности $\partial / ic\partial t$ и $\partial / \partial x_k$ равноправны, поэтому уравнение, содержащее первую производную по времени, должно содержать и первые производные по пространственным координатам. Уравнение для волновой функции $\psi(x)$ должно быть линейным, чтобы удовлетворить принципу суперпозиций, и также оно должно опираться на уравнение Эйнштейна (1.2.1). Запишем это уравнение в форме[1]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \qquad (1.3.1)$$

и обсудим, какие члены может содержать гамильтониан H для свободной частицы. Такая частица характеризуется энергией покоя mc^2 и импульсом $\vec{p}$, поэтому в наиболее простой форме H можно записать в виде

$$H = \beta mc^2 + \vec{\alpha}\vec{p}c\,, \qquad (1.3.2)$$

или, заменив, исходя из принципа соответствия, $\vec{p}$ на $-i\hbar\nabla$, получим

$$H = \beta mc^2 - i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla\,.$$

Здесь $\vec{\alpha}$ (значок вектора используется только для удобства обозначения трех величин, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, тогда $\vec{\alpha}\vec{p} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$) и β – коэффициенты, которые надо найти.

Для начала применим к гамильтониану операцию эрмитова сопряжения:

$$H^\dagger = \beta^\dagger mc^2 + \vec{\alpha}^\dagger \vec{p}^\dagger c\,.$$

Ниже мы увидим, что $\vec{\alpha}$ и β – не обычные числа, а матрицы, поэтому используется эрмитово сопряжение, а не комплексное сопряжение. Гамильтониан и импульс – эрмитовы операторы, $H^\dagger = H$ и $\vec{p}^\dagger = \vec{p}$, следовательно, β и $\vec{\alpha}$ – тоже эрмитовы: $\alpha^\dagger = \alpha$ и $\beta^\dagger = \beta$. Выбрав систему единиц таким образом, что $\hbar = 1$ и $c = 1$, подставим выражение для гамильтониана в уравнение (1.3.1):

[1] Для волновой функции уравнения Дирака будем использовать букву ψ, чтобы отличать эту волновую функцию от волновой функции уравнения Клейна-Гордона ϕ.

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = m\beta\psi - i\alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\,. \qquad (1.3.3)$$

Покажем, что для этого уравнения легко получить уравнение непрерывности. Запишем эрмитово сопряжённое к (1.3.3) выражение

$$-i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = m\psi^\dagger\beta^\dagger + i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k}\vec{\alpha}_k^\dagger \qquad (1.3.4)$$

и объединим (1.3.3) и (1.3.4) следующим образом:

$$\psi^\dagger \cdot (1.3.3) - (1.3.4)\cdot\psi = 0\,.$$

Подставляя выражения (1.3.3) и (1.3.4), получим

$$i\left(\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}\psi\right) = -i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k}\vec{\alpha}_k^\dagger\psi - i\psi^\dagger\alpha_k\frac{\partial \psi}{\partial x_k} + m\psi^\dagger\left(\beta - \beta^+\right)\psi\,.$$

Воспользовавшись ранее найденными свойствами эрмитовости $\vec{\alpha}$ и β, придем к уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \psi^\dagger\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\psi^\dagger\alpha_k\psi = 0\,. \qquad (1.3.5)$$

Здесь, как и должно быть в квантовой механике, квадрат модуля волновой функции $\psi^\dagger\psi \ge 0$ – плотность вероятности ρ, а выражение $\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi$ мы можем считать плотностью тока вероятности $\vec{j}$ (ниже покажем, что $\vec{j}$ на самом деле вектор).

Из уравнения Дирака со временем

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\beta m + \vec{\alpha}\vec{p}\right)\psi \qquad (1.3.6)$$

получим стационарное уравнение. Пользуясь тем, что энергия для свободной частицы сохраняется, можно выделить в $\psi(x)$ соответствующий экспоненциальный фактор $\exp\left(-iEt\right)$. В данном случае интерес представляет решение уравнения (1.3.6), описывающее состояния с определенным импульсом. Такие состояния имеют вид

$$\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}u(\vec{p})\exp\left(-iEt + i\vec{p}\vec{x}\right)\,. \qquad (1.3.7)$$

Подставив (1.3.7) в (1.3.6), находим, что $u(\vec{p})$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\beta m + \vec{\alpha}\vec{p} - E\right)u(\vec{p}) = 0\,, \qquad (1.3.8)$$

или

$$Hu = Eu\,. \qquad (1.3.9)$$

Выясним другие свойства коэффициентов $\vec{\alpha}$ и β. Умножив выражение (1.3.8) на $\left(\beta m+\vec{\alpha}\vec{p}+E\right)$ и раскрывая скобки, получим

$$\left[\left(\beta m\right)^2+\left(\vec{\alpha}\vec{p}\right)^2+m\left(\beta\vec{\alpha}\vec{p}+\vec{\alpha}\vec{p}\beta\right)-E^2\right]u=0 .$$

Таким образом, собственное значение оператора, действующего на $u(\vec{p})$ в предыдущем выражении, равно нулю,

$$\left(\beta m\right)^2+\left(\vec{\alpha}\vec{p}\right)^2+m\left(\beta\vec{\alpha}\vec{p}+\vec{\alpha}\vec{p}\beta\right)-E^2=0 . \qquad (1.3.10)$$

Это уравнение должно совпадать с

$$m^2+\vec{p}^2-E^2=0 . \qquad (1.3.11)$$

Сначала найдём

$$\left(\vec{\alpha}\vec{p}\right)^2=\left(\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\alpha_3 p_3\right)^2=\alpha_1^{\,2}p_1^{\,2}+\alpha_2^{\,2}p_2^{\,2}+ +\alpha_3^{\,2}p_3^{\,2}+p_1p_2\left(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_1\right)+... \qquad (1.3.12)$$

Сравнивая (1.3.12) с (1.3.11), делаем вывод, что должны выполняться условия

$$\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=2\delta_{ij},\quad \beta\alpha_i+\alpha_i\beta=0,\quad \beta^2=1 .$$

Сведём вместе полученные свойства $\vec{\alpha}$ и β:

$$\beta^2=1,\ \alpha_k^{\,2}=1, \qquad (1.3.13)$$

$$\beta\alpha_i+\alpha_i\beta=0, \qquad (1.3.14)$$

$$\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=2\delta_{ij}, \qquad (1.3.15)$$

$$\beta^\dagger=\beta,\ \alpha_k^{\,\dagger}=\alpha_k . \qquad (1.3.16)$$

Ясно, что β и α_k с такими свойствами не могут быть обычными числами: это матрицы.

Теперь докажем, что след этих матриц равен 0:

$$\mathrm{Sp}\alpha_k=\mathrm{Sp}\beta=0 . \qquad (1.3.17)$$

Умножим (1.3.14) на β слева:

$$\beta^2\alpha_i+\beta\alpha_i\beta=0 .$$

Воспользуемся свойством (1.3.13), а потом возьмем след от полученного выражения:

$$\mathrm{Sp}\alpha_i=-\mathrm{Sp}\beta\alpha_i\beta .$$

Под знаком взятия следа можно делать циклическую перестановку:

$$\mathrm{Sp}\alpha_i=-\mathrm{Sp}\beta\beta\alpha_i=-\mathrm{Sp}\beta^2\alpha_i=-\mathrm{Sp}\alpha_i ,$$

следовательно, $\mathrm{Sp}\alpha_k=0$. Аналогично можно доказать, что $\mathrm{Sp}\beta=0$.

Докажем, что ранг матриц α_k и β – чётный. Умножим выражение (1.3.14) на α_i слева, воспользуемся свойством (1.3.13) и возьмём определитель полученного выражения:

$$\det\beta=\det(-\alpha_i\beta\alpha_i) .$$

Из свойства определителей произведения матриц A и B,

$$\det(AB)=\det(A)\det(B) ,$$

получим

$$\det\beta=\det(-I)\left(\det\alpha_i\right)^2\det\beta ,$$

где мы намеренно ввели единичную матрицу I, имеющую ту же размерность, что α_k и β. Так как $(\det\alpha_i)^2=\det\alpha_i^2=1$, то из предыдущего равенства имеем

$$\det(-I)=1 ,$$

что может выполняться только при четной размерности матрицы I.

Попробуем взять матрицы α_k и β второго порядка. Матрицы Паули σ_k,

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

подходят для выбора их в качестве матриц α_k, так как они эрмитовы и $\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=2\delta_{ij}I$. Известно, что матрицы Паули и единичная матрица I образуют полный набор матриц 2×2, тогда β можно разложить по этим матрицам

$$\beta=aI+b_k\sigma_k .$$

Запишем антикоммутатор α_k и β, а затем используем (1.3.14):

$$\sigma_k\left(aI+b_i\sigma_i\right)+\left(aI+b_i\sigma_i\right)\sigma_k=0$$

или

$$b_i\left(\sigma_k\sigma_i+\sigma_i\sigma_k\right)+2a\sigma_k=0 ,$$

что означает

$$b_kI+a\sigma_k=0 .$$

Это равенство возможно только при b_k и a, равных нулю, т.е. вариант матриц 2×2 не подходит.

Попробуем теперь размерность 4×4 для матриц α_k и β. Пусть матрица β будет диагональной (известно, что унитарным преобразованием $\beta = U\beta' U^\dagger$ можно любую матрицу сделать диагональной). Тогда её можно записать в виде

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{pmatrix},$$

где β_i – четыре числа. Из свойства (1.3.13) следует $\sum_{i=1}^{4} \beta_i^2 = 1$, а из (1.3.17) следует $\sum_{i=1}^{4} \beta_i = 0$. В наиболее простой форме матрица β, удовлетворяющая этим требованиям, имеет вид

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \qquad (1.3.18)$$

Всем необходимым свойствам α_k удовлетворяют матрицы, составленные из матриц Паули:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.3.19)$$

Докажем, что матрицы (1.3.19) удовлетворяет свойству (1.3.13):

$$\alpha_k{}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_k^2 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Проверим свойство (1.3.14):

$$\beta\alpha_i + \alpha_i\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

и свойство (1.3.15):

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_j\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_j\sigma_i \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix} = 2\delta_{ij}.$$

Легко показать, что и остальные свойства удовлетворяются.

Таким образом, уравнение Дирака записывается для четырех-компонентной функции (волновой функции) $\psi(x)$.

1.4. Уравнение Дирака и γ-матрицы

Для получения более симметричной формы уравнения Дирака (1.3.3) умножим его на β слева:

$$i\beta\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(m - i\beta\vec{\alpha}\cdot\nabla\right)\psi \qquad (1.4.1)$$

и введём матрицы

$$\gamma_k = -i\beta\alpha_k,\ k = 1,2,3; \qquad (1.4.2)$$

$$\gamma_4 = \beta, \qquad (1.4.3)$$

с которыми уравнение (1.4.1) примет вид

$$-\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_4} = \left(m + \gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\psi.$$

Напомним, что $x_\alpha = \left(x_k, it\right)$, то есть $x_4 = it$. Объединяя все слагаемые с γ- матрицами, запишем

$$\gamma_\alpha i\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} = -im\psi,\ \alpha = 1,2,3,4. \qquad (1.4.4)$$

Используя оператор 4-мерного импульса $p_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$, получаем уравнение Дирака в форме, предложенной Фейнманом (Feynman):

$$\left(\gamma_\alpha p_\alpha - im\right)\psi = 0. \qquad (1.4.5)$$

Используя обозначение $\hat{p} \equiv p_\alpha\gamma_\alpha$ (также для оператора $p_\alpha\gamma_\alpha$ иногда используют обозначение $\not{p}$), уравнение (1.4.5) можно записать компактнее:

$$\left(\hat{p} - im\right)\psi = 0. \qquad (1.4.6)$$

Свойства матриц γ_α следуют из свойств матриц α_k и β.

1) Эти матрицы эрмитовы $\gamma_\alpha^\dagger = \gamma_\alpha$.

Доказательство:

a) $\gamma_4^\dagger = \beta^\dagger = \beta$,

b) $\gamma_k^\dagger = (-i\beta\alpha_k)^\dagger = i\alpha_k^\dagger\beta^\dagger = i\alpha_k\beta = -i\beta\alpha_k = \gamma_k$.

2) $\gamma_\alpha^2 = I$ (здесь и ниже I - единичная 4×4 матрица).

Доказательство:

a) $\gamma_4^2 = \beta^2 = I$,

b) $\gamma_k^2 = -(\beta\alpha_k)(\beta\alpha_k) = \beta\alpha_k^2\beta = \beta^2 = I$.

3) $\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}I$.

Доказательство:

a) $\gamma_4\gamma_k + \gamma_k\gamma_4 = \beta(-i\beta\alpha_k) + (-i\beta\alpha_k)\beta = -i\beta(\beta\alpha_k + \alpha_k\beta) = 0$,

b) $\gamma_4\gamma_4 + \gamma_4\gamma_4 = 2\beta^2 = 2I$,

c) $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = (-i\beta\alpha_i)(-i\beta\alpha_j) + (-i\beta\alpha_j)(-i\beta\alpha_i) =$

$$= -\beta(\alpha_i\beta\alpha_j + \alpha_j\beta\alpha_i) = 2\delta_{ij} .$$

4) $\mathrm{Sp}\gamma_\alpha = 0$.

Доказательство:

a) $\mathrm{Sp}\gamma_4 = \mathrm{Sp}\beta = 0$,

b) $\mathrm{Sp}\gamma_k = \mathrm{Sp}(-i\beta\alpha_k) = \mathrm{Sp}(i\alpha_k\beta) = \mathrm{Sp}(i\beta\alpha_k) = -\mathrm{Sp}\gamma_k$.

Объединим свойства γ - матриц:

$$\gamma_\alpha^\dagger = \gamma_\alpha , \qquad (1.4.7)$$

$$\gamma_\alpha^2 = I , \qquad (1.4.8)$$

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}I , \qquad (1.4.9)$$

$$\mathrm{Sp}\gamma_\alpha = 0 . \qquad (1.4.10)$$

Выбор матриц $\vec{\alpha}$ и β в виде (1.3.18) и (1.3.19), а следовательно, и матриц γ_α не является единственно возможным, так как любое унитарное преобразование $UU^\dagger = I$,

$$\gamma'_\alpha = U\gamma_\alpha U^\dagger \qquad (1.4.11)$$

оставляет свойства матриц γ'_α теми же, что и для γ_α . Если при этом подвергнуть волновую функцию преобразованию

$$\psi \to \psi' = U\psi ,$$

то уравнение Дирака для ψ' не изменит свой вид

$$(\gamma'_\alpha p_\alpha - im)\psi' = 0 . \qquad (1.4.12)$$

Явный вид матриц γ_α , вообще говоря, не важен, как мы увидим ниже, проводя вычисления наблюдаемых величин, таких как сечения рассеяния.

Выполним унитарное преобразование с помощью матрицы (действительной)

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}, \quad U^2 = I . \qquad (1.4.13)$$

Подставив (1.4.13) в (1.4.11), получим

$$\gamma'_k = -\gamma_k , \quad k = 1,2,3,$$

$$\gamma'_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.4.14)$$

Если записать функцию ψ и преобразованную функцию ψ' в виде биспиноров

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \psi' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \qquad (1.4.15)$$

то ξ и η будут связаны с φ и χ соотношениями

$$\xi = (\varphi + \chi)/\sqrt{2}, \quad \eta = (\varphi - \chi)/\sqrt{2} \qquad (1.4.16)$$

и система уравнений, которым удовлетворяют эти двухкомпонентные величины, будет иметь вид

$$i\frac{\partial\xi}{\partial t} = \vec{\sigma}\vec{p}\xi + m\eta , \qquad (1.4.17)$$

$$i\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\vec{\sigma}\vec{p}\eta + m\xi . \qquad (1.4.18)$$

В § 1.6 мы покажем, что ξ и η изменяются независимо при преобразованиях собственной (без отражений осей) группы Лоренца.

При $m = 0$ уравнения (1.4.17) и (1.4.18) распадаются на два независимых уравнения, называемых уравнениями Вейля (Weyl):

$$i\frac{\partial\xi}{\partial t} = \vec{\sigma}\vec{p}\xi , \qquad (1.4.19)$$

$$i\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\vec{\sigma}\vec{p}\eta . \qquad (1.4.20)$$

Таким образом, при нулевой массе частицы со спином ½ могут описываться одной двухкомпонентной функцией (спинором), удовлетворяющей уравнению Вейля. Каждое из двух уравнений (1.4.19)-(1.4.20) в отдельности инвариантно относительно преобразований собственной группы Лоренца, но неинвариантно относительно инверсии. Такие уравнения описывают нейтрино.

В заключение приведём выражения для γ - матриц в метрике Фейнмана

$$\gamma^k = \beta\alpha_k \,,\ \gamma^0 = \beta \qquad (1.4.21)$$

со свойствами

$$\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha = 2g_{\alpha\beta}I \,, \qquad (1.4.22)$$

$$(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \,,\ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \,. \qquad (1.4.23)$$

Уравнение Дирака в этой метрике имеет вид

$$\gamma^\alpha \frac{1}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + m\psi = 0 \,. \qquad (1.4.24)$$

1.5.Связь между уравнениями Дирака и Клейна–Гордона

Очевидно, что два релятивистских уравнения, Дирака и Клейна–Гордона, должны быть каким-то образом связаны. Чтобы найти эту связь, умножим уравнение Дирака (1.4.5) слева на $\left(\gamma_\beta p_\beta + im\right)$:

$$\left(\gamma_\alpha p_\alpha + im\right)\left(\gamma_\beta p_\beta - im\right)\psi = 0 \,. \qquad (1.5.1)$$

Рассмотрим отдельно произведение

$$\left(\gamma_\alpha p_\alpha\right)\left(\gamma_\beta p_\beta\right) = \gamma_1^2 p_1^2 + \gamma_2^2 p_2^2 + \gamma_3^2 p_3^2 + \gamma_4^2 p_4^2 + p_1 p_2\left(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1\right) + \ldots$$

Пользуясь свойствами (1.4.8) и (1.4.9), $\gamma_\alpha^2 = 1$ и $\gamma_i\gamma_k + \gamma_i\gamma_k = 0$ при $i \neq k$, получим, что

$$\left(\gamma_\alpha p_\alpha\right)\left(\gamma_\beta p_\beta\right) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = p^2 \,.$$

Тогда уравнение (1.5.1) сводится к

$$\left(p^2 + m^2\right)\psi = 0 \,. \qquad (1.5.2)$$

Так как

$$p_\alpha^2 = -i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(-i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial {x_\alpha}^2} \,,$$

то (1.5.2) имеет вид

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial {x_\alpha}^2} + m^2\right)\psi = 0 \,, \qquad (1.5.3)$$

или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial {x_k}^2} + m^2\right)\psi = 0 \,. \qquad (1.5.4)$$

Уравнения (1.5.2)-(1.5.4) являются различными формами уравнения Клейна–Гордона, которое не содержит матриц, поэтому каждая ком-

понента биспинора ψ в уравнении Дирака в отдельности удовлетворяет скалярному (однокомпонентному) уравнению Клейна–Гордона.

1.6.Релятивистская инвариантность уравнения Дирака

Покажем, что уравнение Дирака не меняет свой вид при преобразованиях Лоренца. При преобразованиях

$$x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu \qquad (1.6.1)$$

или $x' = ax$, четырёхмерный импульс p_μ, как и любой четырёхмерный вектор, преобразуется следующим образом:

$$p'_\mu = a_{\mu\nu}p_\nu \,, \qquad (1.6.2)$$

где $a_{\mu\nu}$ – матрица четырёхмерного поворота. Запишем уравнение Дирака в новой системе отсчёта:

$$(\gamma_\mu p'_\mu - im)\psi'(x') = 0 \,. \qquad (1.6.3)$$

Биспинор $\psi(x)$ при преобразованиях Лоренца также изменяется:

$$\psi'(x') = L\psi(x) \,, \qquad (1.6.4)$$

где $L(a)$ – линейное преобразование, которое определяется матрицей $a_{\mu\nu}$. Подействуем на уравнение (1.6.3) оператором L^{-1}:

$$L^{-1}(\gamma_\mu a_{\mu\nu}p_\nu - im)L\psi(x) = 0 \,.$$

Чтобы это уравнение совпадало с уравнением Дирака в исходной системе отсчета

$$\left(\gamma_\nu p_\nu - im\right)\psi = 0 \,,$$

должно выполняться условие

$$L^{-1}\gamma_\mu a_{\mu\nu}L = \gamma_\nu \,.$$

Умножив это выражение справа на L^{-1}, а слева на L, окончательно найдём

$$L\gamma_\nu L^{-1} = a_{\mu\nu}\gamma_\mu \,. \qquad (1.6.5)$$

Равенство (1.6.5) определяет оператор $L(a)$ из требования релятивистской инвариантности уравнения Дирака. Оператор (матрица), удовлетворяющий условиям (1.6.5), существует, так как для матриц $a_{\mu\nu}\gamma_\mu$ справедливы перестановочные соотношения матриц Дирака (1.4.9), что следует из соотношения

$$a_{\mu\nu}a_{\mu\sigma} = \delta_{\nu\sigma} \,, \qquad (1.6.6)$$

которое есть следствие инвариантности интервала $ds' = ds$. Это означает, что существует преобразование подобия, связывающее матрицы $a_{\mu\nu}\gamma_\mu$ и γ_μ, которым и является соотношение (1.6.5).

Теперь найдём выражение для матрицы L. Рассмотрим бесконечно малое собственное (т.е. без отражений осей) преобразование Лоренца

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}, \quad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}, \quad |\varepsilon_{\mu\nu}| << 1. \qquad (1.6.7)$$

Ему должно соответствовать преобразование биспинора ψ, бесконечно мало отличающееся от единичного, т.е.

$$L = I + \frac{1}{2}Y_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}, \quad L^{-1} = I - \frac{1}{2}Y_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}, \quad Y_{\mu\nu} = -Y_{\mu\nu}, \qquad (1.6.8)$$

где $Y_{\mu\nu}$ – инфинитезимальные операторы преобразования. Подставив (1.6.8) в (1.6.5), получим

$$\gamma_\mu Y_{\lambda\nu} - Y_{\lambda\nu}\gamma_\mu = \delta_{\lambda\mu}\gamma_\nu - \delta_{\nu\mu}\gamma_\lambda.$$

Этому соотношению можно удовлетворить, если положить

$$Y_{\mu\nu} = (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)/4. \qquad (1.6.9)$$

Зная $Y_{\mu\nu}$, можно найти матрицу L для конечного преобразования Лоренца $x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu$.

Рассмотрим два типа преобразований Лоренца: пространственный поворот и переход от одной инерциальной системы отсчёта к другой.

В случае бесконечно малого поворота вокруг оси $\vec{n}$ на угол $d\theta$:

$$\varepsilon_{jk} = -e_{jkl}n_l d\theta. \qquad (1.6.10)$$

Например, при повороте вокруг оси z, $\varepsilon_{jk} = -e_{jk3}d\theta$ и

$$a_{jk} = \delta_{jk} - e_{jk3}d\theta = \begin{pmatrix} 1 & -d\theta & 0 \\ d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это соответствует матрице поворота вокруг оси z на конечный угол θ:

$$a = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем оператор

$$L(d\theta) = I + \frac{1}{2}\varepsilon_{jk}Y_{jk} = I - \frac{i}{2}\vec{\Sigma}\vec{n}d\theta, \qquad (1.6.11)$$

где

$$\Sigma_j = \frac{1}{2}e_{jkl}\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} = i\gamma_4\gamma_5\gamma_j. \qquad (1.6.12)$$

Пусть теперь вращение вокруг оси $\vec{n}$ происходит на конечный угол θ. Так как вращения на различные углы независимы, то

$$L(\theta + d\theta) = L(\theta)L(d\theta) = L(\theta)\left(I - \frac{i}{2}\vec{\Sigma}\vec{n}d\theta\right),$$

откуда

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = -\frac{i}{2}\vec{\Sigma}\vec{n}L(\theta)$$

и, следовательно,

$$L(\theta) = e^{-i\vec{\Sigma}\vec{n}\frac{\theta}{2}} = I\cos\frac{\theta}{2} - i\vec{\Sigma}\vec{n}\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (1.6.13)$$

Таким образом, при пространственных вращениях

$$\psi'(x') = L(\theta)\psi(x) = \exp(-i\vec{S}\vec{n}\theta/\hbar)\psi(x), \qquad (1.6.14)$$

где

$$\vec{S} = \hbar\vec{\Sigma}/2 \qquad (1.6.15)$$

является оператором спина Дираковской частицы (см. также раздел 2.2).

Из (1.6.12) и (1.6.13) видно, что спиноры φ и χ, образующие биспинор ψ, преобразуются независимо друг от друга при пространственных поворотах.

В качестве примера рассмотрим поворот на угол θ вокруг оси x_3, т.е. $\vec{n} = (0,0,1)$. В этом случае $a_{\mu\nu}$ имеет вид

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.6.16)$$

Уравнения (1.6.12) и (1.6.13) дают

$$L = I\cos\frac{\theta}{2} - \gamma_1\gamma_2\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (1.6.17)$$

Обратным L является оператор

$$L^{-1} = I\cos\frac{\theta}{2} + \gamma_1\gamma_2 \sin\frac{\theta}{2}, \qquad (1.6.18)$$

т.к. $LL^{-1} = 1$. Заметим, что $L^{-1} = L^{\dagger}$, или $LL^{\dagger} = I$, как и должно быть для унитарного оператора: унитарность L следует из сохранения нормы $\psi(x)$ при преобразованиях Лоренца.

Четыре равенства (1.6.5) в случае матрицы $a_{\mu\nu}$ из (1.6.16) дают

$$L\gamma_1 L^{-1} = \gamma_1 \cos\theta + \gamma_2 \sin\theta,$$
$$L\gamma_2 L^{-1} = -\gamma_1 \sin\theta + \gamma_2 \cos\theta,$$
$$L\gamma_3 L^{-1} = \gamma_3,$$
$$L\gamma_4 L^{-1} = \gamma_4,$$

и их легко проверить непосредственной подстановкой матриц L и L^{-1}.
Обратим внимание на то, что при повороте на угол 2π

$$L(\theta + 2\pi) = -L(\theta),$$

и

$$\psi(x) \to -\psi(x), \qquad (1.6.19)$$

то есть знак биспинора $\psi(x)$ меняется при повороте на угол 2π; отсюда, в частности, следует, что наблюдаемые физические величины должны содержать четные степени $\psi(x)$.

Теперь рассмотрим переход от одной инерциальной системы отсчёта к другой. Если относительное движение систем происходит вдоль оси x_1, то такие преобразования можно рассматривать как вращения в плоскости (x_1, x_4) с мнимым углом вращения $\theta = i\varphi$, где v – относительная скорость систем, $x_4 = ict$, $\mathrm{tg}\,\theta = i\mathrm{v/c}$, т.е. $\mathrm{th}\,\varphi = \mathrm{v/c}$.

Соответствующее преобразование Лоренца:

$$x_1' = \frac{x_1 + ix_4\mathrm{v/c}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/\mathrm{c}^2}}, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = \frac{x_4 - ix_1\mathrm{v/c}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/\mathrm{c}^2}}. \quad (1.6.20)$$

Это отвечает матрице преобразования

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & 0 & 0 & i\mathrm{sh}\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\mathrm{sh}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{ch}\varphi \end{pmatrix}. \qquad (1.6.21)$$

При бесконечно малом повороте разложим $a_{\mu\nu}$ в ряд и вычтем $\delta_{\mu\nu}$:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & id\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -id\varphi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, у $\varepsilon_{\mu\nu}$ отличны от нуля только две компоненты, $\varepsilon_{14} = -\varepsilon_{41} = id\varphi$, и, следовательно, бесконечно малое преобразование имеет вид

$$L(d\theta) = I + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}Y_{\mu\nu} = I + \frac{i}{2}(Y_{14} - Y_{41})d\varphi =$$
$$= I + \frac{i}{2}\gamma_1\gamma_4 d\varphi = I + \frac{1}{2}\alpha_1 d\varphi = I - \frac{i}{2}\alpha_1 d\theta.$$

Для движения, происходящего не вдоль оси x_1, а вдоль направления, характеризуемого единичным вектором $\vec{n}$, предыдущее выражение надо заменить на

$$L(d\theta) = I - \frac{i}{2}\vec{\alpha}\vec{n}d\theta.$$

Отсюда, повторяя рассуждения, приводящие к (1.6.13), можно получить формулу для L в случае конечного поворота на (мнимый) угол θ:

$$L(\theta) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\alpha}\vec{n}\theta}. \qquad (1.6.22)$$

Матрицы $\vec{\alpha}$ являются недиагональными, и спиноры φ и χ преобразуются ненезависимо друг от друга.
Если, однако, выбрать представление матриц Дирака в виде

$$\vec{\alpha}' = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \vec{\Sigma}' = \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

то спиноры ξ и η, дающие при унитарном преобразовании (1.4.13) биспинор ψ', будут при преобразованиях Лоренца (1.6.22) изменяться независимо друг от друга. Поэтому их можно назвать четырёхмерными спинорами.

1.7. Сопряжённое уравнение Дирака

Для уравнения Дирака

$$i\gamma_\alpha \frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} + im\psi = 0, \qquad \alpha = 1,2,3,4$$

эрмитово сопряжённое уравнение имеет вид

$$i\frac{\partial \psi^{\dagger}}{\partial x_{\alpha}^{*}}\gamma_{\alpha}+im\psi^{\dagger}=0 . \qquad (1.7.1)$$

Умножив (1.7.1) справа на γ_4 и учтя, что $\gamma_k\gamma_4=-\gamma_4\gamma_k$ для $k=1,2,3$, получим

$$-i\frac{\partial \psi^{\dagger}}{\partial x_{k}^{*}}\gamma_4\gamma_k+i\frac{\partial \psi^{\dagger}}{\partial x_{4}^{*}}\gamma_4\gamma_4+im\psi^{\dagger}\gamma_4=0 .$$

Используя $x_4^*=(it)^*=-x_4$, получим

$$-i\frac{\partial \psi^{\dagger}}{\partial x_{\alpha}}\gamma_4\gamma_{\alpha}+im\psi^{\dagger}\gamma_4=0 .$$

Введя сопряжённый биспинор

$$\bar{\psi}=\psi^{\dagger}\gamma_4 , \qquad (1.7.2)$$

получим

$$-i\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_{\alpha}}\gamma_{\alpha}+im\bar{\psi}=0 , \qquad (1.7.3)$$

или, используя $p_{\alpha}=-i\nabla_{\alpha}$,

$$\bar{\psi}\left(p_{\alpha}\gamma_{\alpha}+im\right)=0 . \qquad (1.7.4)$$

Уравнения (1.7.3) и (1.7.4) описывают сопряжённый биспинор $\bar{\psi}$. Используя обозначение Фейнмана $\hat{p}=p_{\alpha}\gamma_{\alpha}$, запишем уравнение (1.7.4) в виде

$$\bar{\psi}\left(\hat{p}+im\right)=0 . \qquad (1.7.5)$$

Ясно, что $\bar{\psi}$, как и $\psi^{\dagger}$, представляет собой “строку” (биспинор ψ - 4-компонентный “столбец”) и в уравнениях (1.7.4) - (1.7.5) должен стоять слева от матрицы γ_{α}, а дифференциальные операторы p_{α} действуют на находящуюся от них слева функцию $\bar{\psi}$.

Найдем, как $\bar{\psi}$ изменяется при преобразованиях Лоренца $x'=ax$. Градиент, как и любой другой вектор, преобразуется по правилу

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}=a_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x'_{\beta}} . \qquad (1.7.6)$$

Используя (1.7.6), перепишем (1.7.3) в виде

$$-i\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x'_{\beta}}a_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha}+im\bar{\psi}=0$$

(предполагается, что здесь аргумент в $\bar{\psi}(x)$ выражен через x', т.е. $x=a^{-1}x'$).

Используя (1.6.5), получим

$$-i\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x'_{\beta}}L^{-1}\gamma_{\beta}L+im\bar{\psi}=0 .$$

Умножив на L^{-1} справа, придём к

$$-i\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x'_{\beta}}L^{-1}\gamma_{\beta}+im\bar{\psi}L^{-1}=0 .$$

Сравнивая это выражение с уравнением (1.7.3), видим, что для инвариантности уравнения для $\bar{\psi}$ относительно преобразований Лоренца необходимо, чтобы $\bar{\psi}$ при переходе от одной системы отсчёта к другой преобразовывался по правилу

$$\bar{\psi}'(x')=\bar{\psi}(x)L^{-1} . \qquad (1.7.7)$$

Как следствие, мы видим, что произведение $\bar{\psi}\psi$ не меняется при переходе от одной системы отсчёта к другой:

$$\bar{\psi}'\psi'=\bar{\psi}L^{-1}L\psi=\bar{\psi}\psi . \qquad (1.7.8)$$

Рассмотрим трансформационные свойства (при преобразованиях Лоренца) билинейных комбинаций $\bar{\psi}\Gamma\psi$, где Γ – различные произведения матриц γ_{α}. Также найдем существующие независимые матрицы Γ.

1) Единичная матрица I (т.е. $\Gamma=I$). В этом случае произведение

$$S=\bar{\psi}\psi \qquad (1.7.9)$$

является, как мы видели, инвариантом, Лоренц-скаляром.

2) Матрицы γ_{α}. В этом случае

$$V=\bar{\psi}\gamma_{\alpha}\psi \qquad (1.7.10)$$

представляет собой четырёхмерный вектор. Докажем это, пользуясь соотношением (1.6.5)$\left(L\gamma_{\nu}L^{-1}=a_{\mu\nu}\gamma_{\mu}\right)$:

$$\bar{\psi}'\gamma_{\alpha}\psi'=\bar{\psi}L^{-1}\gamma_{\alpha}L\psi=a_{\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_{\beta}\psi$$

- это означает, что величина V при переходе от одной системы отсчёта к другой преобразуется как вектор.

3) Для $\Gamma=\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}$ форма $\bar{\psi}\Gamma\psi$ дает тензор 2-го ранга:

$$\bar{\psi}'\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\psi'=\bar{\psi}L^{-1}\gamma_{\alpha}L^{-1}L\gamma_{\beta}L\psi=a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\psi .$$

Покажем, что есть всего 6 независимых произведений $\gamma_\alpha\gamma_\beta$. Для этого запишем $\gamma_\alpha\gamma_\beta$ в виде

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta = \frac{1}{2}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma_\alpha\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha\right) = I\delta_{\alpha\beta} + i\sigma_{\alpha\beta},$$

где $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2i}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right]$. Матриц $\sigma_{\alpha\beta}$ – 16, но 4 из них, которые соответствуют $\alpha = \beta$, равны нулю, а оставшиеся 6 пар матриц отличаются только перестановкой индексов: $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$. Величины

$$T = \bar{\psi}\sigma_{\alpha\beta}\psi \qquad (1.7.11)$$

образуют тензор.

4) Теперь пусть $\Gamma = \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\rho\gamma_\sigma$. Если есть совпадающие индексы, то после перестановки матриц с учётом того, что $\gamma_\alpha^2 = I$, эта комбинация сводится к произведению двух матриц. То есть нетривиальным является только случай несовпадающих индексов. Обычно Γ выбирают в виде

$$\gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4. \qquad (1.7.12)$$

Комбинация

$$P = \bar{\psi}\gamma_5\psi \qquad (1.7.13)$$

является псевдоскаляром:

$$\bar{\psi}'\gamma_5\psi' = \left(\det a\right)\bar{\psi}\gamma_5\psi,$$

$\det a = \pm 1$ (как следствие того, что $a^2 = 1$)– знак минус возникает при таких преобразованиях координат, когда старая и новая системы не могут быть совмещены только вращением без инверсий координатных осей.

5) Ясно, что все возможные независимые комбинации из трёх γ - матриц сводятся к произведению $\gamma_\alpha\gamma_5$. Комбинация

$$A = \bar{\psi}\gamma_\alpha\gamma_5\psi \qquad (1.7.14)$$

является псевдовектором (аксиальным вектором)

$$\bar{\psi}'\gamma_\alpha\gamma_5\psi' = \left(\det a\right)a_{\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_\beta\gamma_5\psi.$$

Очевидно, что все произведения из 5, 6 и так далее γ - матриц сводятся к предыдущим случаям. Итак, мы получили из 16 независимых матриц Γ: I, γ_α, $\sigma_{\alpha\beta}$, $\gamma_\alpha\gamma_5$, γ_5, которые образуют полный набор линейно независимых матриц 4×4, и описали трансформационные свойства комбинаций $\bar{\psi}\Gamma\psi$.

В завершение этого раздела запишем свойства матрицы γ_5:

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5. \qquad (1.7.15)$$

Доказательство: $\gamma_5^\dagger = \gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_1 = -\gamma_4\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \gamma_5$.

$$\gamma_5^2 = I. \qquad (1.7.16)$$

Доказательство: $\gamma_5^2 = \left(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\right)\left(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\right) = (-1)^6 I = I$.

$$\gamma_5\gamma_\alpha + \gamma_\alpha\gamma_5 = 0. \qquad (1.7.17)$$

Доказательство: $\gamma_5\gamma_\alpha + \gamma_\alpha\gamma_5 = \gamma_5\gamma_\alpha + \gamma_\alpha\left(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\right) = \gamma_5\gamma_\alpha - \gamma_5\gamma_\alpha = 0$.

1.8.Вектор четырёхмерного тока

Рассмотрим четырёхмерный вектор $j_\alpha = \bar{\psi}\gamma_\alpha\psi$ и докажем, что его четырёхмерная дивергенция равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \qquad (1.8.1)$$

Продифференцируем

$$\frac{\partial\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\alpha}\gamma_\alpha\psi + \bar{\psi}\gamma_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}$$

и, используя уравнения Дирака для ψ и $\bar{\psi}$

$$\left(\gamma_\alpha\nabla_\alpha\right)\psi = -m\psi, \quad \bar{\psi}\left(\nabla_\alpha\gamma_\alpha\right) = m\bar{\psi},$$

получим

$$\frac{\partial\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi}{\partial x_\alpha} = m\bar{\psi}\psi - m\bar{\psi}\psi = 0.$$

Рассмотрим по отдельности пространственные и временную компоненты вектора $j_\alpha = \bar{\psi}\gamma_\alpha\psi$. Начнём с четвёртой (временной) компоненты, помня, что $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_4$:

$$j_4 = \bar{\psi}\gamma_4\psi = \psi^\dagger\gamma_4\gamma_4\psi = \psi^\dagger\psi \ge 0, \qquad (1.8.2)$$

т.е. четвёртая компонента является плотностью вероятности, $j_4 = \rho = \psi^\dagger\psi$. Теперь рассмотрим пространственную часть, помня, что $\gamma_4 = \beta$, а $\gamma_k = -i\beta\alpha_k$:

$$j_k = \bar{\psi}\gamma_k\psi = \psi^\dagger\gamma_4\gamma_k\psi = -i\psi^\dagger\beta\beta\alpha_k\psi = -i\psi^\dagger\alpha_k\psi. \qquad (1.8.3)$$

Это выражение с точностью до коэффициента $-i$ совпадает с плотностью потока вероятности, полученной из уравнения Дирака. Подставим в уравнение для четырёхмерной дивергенции (1.8.1) выражения (1.8.2) и (1.8.3):

$$-i\frac{\partial\left(\psi^{\dagger}\alpha_k\psi\right)}{\partial x_k}+\frac{\partial\psi^{\dagger}\psi}{\partial x_4}=0,\quad j=1,2,3\,.$$

Заменив x_4 на it, получим

$$\frac{\partial\left(\psi^{\dagger}\alpha_k\psi\right)}{\partial x_k}+\frac{\partial\psi^{\dagger}\psi}{\partial t}=0,\quad j=1,2,3\,.$$

Это выражение совпадает с уравнением непрерывности (1.3.5), полученным ранее. Таким образом, $j_\alpha=\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi$ объединяет в единый четырёхмерный вектор плотность вероятности и плотность потока вероятности: $j_\alpha=(j_k,j_4)$.

Равенство нулю дивергенции четырёхмерного вектора $j_\alpha=\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi$ означает, что с ним связан закон сохранения. Проинтегрируем уравнение (1.8.1) по бесконечному объёму и поменяем операторы дифференцирования и интегрирования местами:

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\int\rho dV+\int\frac{\partial j_k}{\partial x_k}dV=0\,.$$

Пользуясь теоремой Гаусса, преобразуем второй интеграл к поверхностному $\oint\limits_S\vec{j}d\vec{S}$ и, предполагая, что на бесконечности поля отсутствуют, т.е. $\psi=0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho dV=0\,,$$

т.е. полная вероятность $\int\rho dV$ сохраняется.

В квантовой электродинамике вектор тока j_α играет исключительную роль, так как произведение его и вектора четырёхмерного потенциала $A_\alpha=\left(\vec{A},i\Phi\right)$ образует скаляр $A_\alpha j_\alpha$, определяющий гамильтониан взаимодействия электромагнитного поля (фотонов) и зарядов.

1.9.Решение уравнения Дирака для свободной частицы

Запишем уравнение Дирака без времени

$$Hu(\vec{p})=Eu(\vec{p})\,, \tag{1.9.1}$$

где $H=\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m$. Будем искать его решение в виде биспинора $\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$, где φ и χ – двухкомпонентные спиноры. Представив уравнение (1.9.1) в матричном виде

$$\left[\begin{pmatrix}0 & \sigma_k p_k\\ \sigma_k p_k & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}m\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix},$$

получим систему линейных однородных алгебраических уравнений для спиноров φ и χ

$$\begin{cases}\sigma_k p_k\chi+\varphi m=E\varphi\\ \sigma_k p_k\varphi-\chi m=E\chi\,.\end{cases} \tag{1.9.2}$$

Чтобы такая система имела нетривиальное решение, её определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}m-E & \sigma_k p_k\\ -\sigma_k p_k & m+E\end{vmatrix}=m^2-E^2+\left(\sigma_k p_k\right)^2 \tag{1.9.3}$$

должен быть равен нулю. С помощью антикоммутационных соотношений для матриц Паули $\left[\sigma_i,\sigma_j\right]_+=\delta_{ij}$ получим, что

$$\begin{aligned}\sigma_k p_k\sigma_i p_i=\sum_{i=1}^{3}\sigma_i^2p_i^2+\left[\sigma_1,\sigma_2\right]_+\,p_1p_2\,+\\ +\left[\sigma_1,\sigma_3\right]_+\,p_1p_3+\left[\sigma_2,\sigma_3\right]_+\,p_2p_3=\sum_{i=1}^{3}p_i^2=\vec{p}^2.\end{aligned} \tag{1.9.4}$$

В результате уравнение (1.9.3) сводится к

$$\Delta=m^2-E^2+\vec{p}^2=0\,.$$

Из-за равенства нулю определителя системы уравнений (1.9.2) одну из переменных можно считать свободным параметром. Введем обозначение

$$p_0\equiv+\sqrt{\vec{p}^2+m^2} \tag{1.9.5}$$

и рассмотрим сначала случай положительных энергий $E=p_0$. Исключим из второго уравнения системы (1.9.2) χ (при выражении φ через χ из первого уравнения возможно деление на ноль при $\vec{p}=0$) запишем решение уравнения Дирака в виде

$$u_+\left(\vec{p}\right)=N_+\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=N_+\begin{pmatrix}\varphi\\ \dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}}{m+p_0}\varphi\end{pmatrix}, \tag{1.9.6}$$

где φ – произвольный двухкомпонентный спинор. Для отрицательных энергий $E=-p_0$ удобно взять φ из второго уравнения системы (1.9.2), тогда решение уравнения Дирака будет иметь вид

$$u_-(\vec{p}) = N_- \begin{pmatrix} -\dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p_0+m}\chi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad (1.9.7)$$

где χ – произвольный двухкомпонентный спинор. В (1.9.6) и (1.9.7) $N_\pm$ – нормировочные коэффициенты. Восстанавливая скорость света c в (1.9.6) и (1.9.7), запишем решения уравнения Дирака в случае положительных и отрицательных энергий для свободной частицы:

$$u_+(\vec{p}) = N_+ \begin{pmatrix} \varphi \\ \dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}c}{mc^2+p_0}\varphi \end{pmatrix}, \quad u_-(\vec{p}) = N_- \begin{pmatrix} -\dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}c}{p_0+mc^2}\chi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (1.9.8)$$

Важно, что для нерелятивистских частиц ($E << mc^2$ и $\mathrm{v}/c << 1$) эти биспиноры сводятся к двухкомпонентным спинорам

$$u_+(\vec{p}) \approx N_+\varphi, \quad u_-(\vec{p}) \approx N_-\chi,$$

что открывает возможность перехода к нерелятивистскому описанию спина $1/2$.

Найдём коэффициенты $N_\pm$ с помощью инвариантных по отношению к преобразованиям Лоренца условий (это одна из возможных нормировок):

$$\bar{u}_+\gamma_4 u_+ = 2p_0, \quad \bar{u}_-\gamma_4 u_- = 2p_0. \qquad (1.9.9)$$

С учётом того, что $\bar{u}_\pm = u_\pm^\dagger \gamma_4$ и $\gamma_4^2 = 1$, приходим к

$$u_+^\dagger u_+ = 2p_0, \quad u_-^\dagger u_- = 2p_0.$$

Подставляя сюда выражения (1.9.8) для u_- и u_+, получим

$$N_+^2\varphi^\dagger\varphi\left[1+\left(\frac{\sigma_k p_k}{m+p_0}\right)^2\right] = 2p_0, \quad N_-^2\chi^\dagger\chi\left[1+\left(\frac{\sigma_k p_k}{m+p_0}\right)^2\right] = 2p_0.$$

Нормируем φ и χ простейшим образом: $\varphi^\dagger\varphi = 1$ и $\chi^\dagger\chi = 1$. Воспользовавшись выражением (1.9.4) $\sigma_k p_k \sigma_i p_i = \vec{p}^2$, получим

$$N_\pm^2\left[1+\left(\frac{\sigma_k p_k}{m+p_0}\right)^2\right] = N_\pm^2 \frac{m^2+p_0^2+2mp_0+\vec{p}^2}{(m+p_0)^2} = 2p_0.$$

Помня, что $E^2 = p_0^2$, воспользуемся формулой Эйнштейна $m^2 - E^2 + \vec{p}^2 = 0$:

$$N_\pm^2 \frac{(m+p_0)^2 - (m^2-p_0^2)}{(m+p_0)^2} = N_\pm^2 \frac{2p_0^2+2mp_0}{(m+p_0)^2} = 2p_0.$$

Отсюда получаем для коэффициента нормировки выражение

$$N_\pm = \sqrt{m+p_0}. \qquad (1.9.10)$$

Введём более простые обозначения. Сначала обозначим

$$u(p) = u_+(\vec{p}), \text{ где } E = p_0 > 0, \ p = (\vec{p}, ip_0). \qquad (1.9.11)$$

Тогда уравнение (1.4.6) для этого биспинора примет вид

$$\hat{p}u(p) = imu(p), \qquad (1.9.12)$$

а уравнение для сопряжённого биспинора–

$$\bar{u}(p)\hat{p} = im\bar{u}(p). \qquad (1.9.13)$$

Уравнение для $E = -p_0 < 0$ примет вид

$$(\vec{\gamma}\vec{p} - \gamma_4 p_4)u_-(\vec{p}) = imu_-(\vec{p}). \qquad (1.9.14)$$

Чтобы объединить слагаемые с $\vec{\gamma}$ и γ_4, заменим $\vec{p}$ на $-\vec{p}$:

$$(\vec{\gamma}\vec{p} + \gamma_4 p_4)u_-(-\vec{p}) = -imu_-(-\vec{p}). \qquad (1.9.15)$$

Далее, вводя новое обозначение для $u_-(-\vec{p})$,

$$u(-p) = u_-(-\vec{p}), \text{ где } E = -p_0 < 0, \ p = (\vec{p}, ip_0), \qquad (1.9.16)$$

получим уравнение для спиноров с отрицательной энергией

$$\hat{p}u(-p) = imu(-p), \qquad (1.9.17)$$

$$\bar{u}(-p)\hat{p} = im\bar{u}(-p). \qquad (1.9.18)$$

Теперь докажем, что использованная нами нормировка (1.9.9) является ковариантной. Для этого найдём $\bar{u}(p)u(p)$. Умножив (1.9.12) слева на $\bar{u}(p)\gamma_\alpha$, а (1.9.13) справа на $\gamma_\alpha u(p)$ и сложив их, получим

$$\bar{u}(p)\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta p_\beta + \gamma_\beta p_\beta \gamma_\alpha\right)u(p) = 2im\bar{u}(p)\gamma_\alpha u(p).$$

Пользуясь свойством (1.4.22), получим

$$\bar{u}(p)2\delta_{\alpha\beta}p_\beta u(p) = 2im\bar{u}(p)\gamma_\alpha u(p),$$

или

$$\bar{u}(p)p_\alpha u(p) = im\bar{u}(p)\gamma_\alpha u(p).$$

При $\alpha = 4$ получим

$$\bar{u}(p)u(p)ip_0 = im\bar{u}(p)\gamma_4 u(p).$$

Пользуясь нормировкой (1.9.9), приходим к

$$\bar{u}(p)u(p) = 2m\,, \tag{1.9.19}$$

т.е. наша нормировка ковариантная (справа и слева находятся Лоренц-инварианты). Аналогично можно получить

$$\bar{u}(-p)u(-p) = -2m\,, \tag{1.9.20}$$

$$\bar{u}(p)u(-p) = 0\,, \tag{1.9.21}$$

$$\bar{u}(p)\gamma_5 u(p) = 0\,, \tag{1.9.22}$$

$$p_\alpha \bar{u}(p)\gamma_\alpha\gamma_5 u(p) = 0\,. \tag{1.9.23}$$

Из (1.9.19) и (1.9.20) следует, что для нейтрино

$$\bar{u}(p)u(p) = \bar{u}(-p)u(-p) = 0\,.$$

В заключение приведём решение Дирака со временем, включив нормировочный множитель, соответствующий плоской волне,

$$\psi_\pm(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} u_\pm(\vec{p})e^{ipx/\hbar}\,, \tag{1.9.24}$$

где $px = \vec{p}\vec{r} - Et$.

1.10.Решение уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле

Учёт взаимодействия заряда с внешним электромагнитным полем произведём по аналогии с учётом его в классической релятивистской физике, сделав калибровочное преобразование

$$p_\mu \to \pi_\mu \equiv p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\,, \tag{1.10.1}$$

где $A_\mu = (\vec{A}, i\Phi)$ – четырёхмерный потенциал, в котором $\vec{A}$ - векторный потенциал, а Φ – скалярный. При этом уравнение Дирака принимает вид

$$\left(\gamma_\mu\left(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)c - imc^2\right)\psi = 0\,. \tag{1.10.2}$$

Используя $\gamma_k = -i\beta\alpha_k$, $\gamma_4 = \beta$, $p_\mu = -i\hbar\partial_\mu$ и $x_4 = ict$, получим

$$-\beta\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\beta e\Phi\psi = \left(imc^2 - ie\beta\alpha_k A_k + i\beta\alpha_k p_k c\right)\psi\,.$$

Умножим это выражение слева на $-i\beta$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\alpha_k\left(p_k c - eA_k\right) + \beta mc^2 + eI\Phi\right]\psi\,. \tag{1.10.3}$$

Таким образом, гамильтониан электрона, взаимодействующего с электромагнитным полем, имеет вид

$$H = \alpha_k\left(p_k c - eA_k\right) + \beta mc^2 + eI\Phi\,. \tag{1.10.4}$$

Рассмотрим решение этого уравнения в нерелятивистском пределе. В этом случае энергия покоя mc^2 доминирует в энергии частицы E, что соответствует быстро осциллирующему вкладу в ψ. Если выделить его явным образом, т.е. сделать замену $\psi \to \psi\exp(-imc^2 t/\hbar)$, уравнение (1.10.3) перейдёт в

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[c\alpha_k\pi_k + (\beta - I)mc^2 + e\Phi I\right]\psi\,. \tag{1.10.5}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде биспинора:

$$\psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}. \tag{1.10.6}$$

Тогда уравнение (1.10.5) становится

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \left[c\begin{pmatrix}0 & \sigma_k\\ \sigma_k & 0\end{pmatrix}\pi_k + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2I\end{pmatrix}mc^2 + \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}e\Phi\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}.$$

Перепишем предыдущее выражение как систему уравнений для спиноров (ниже будем опускать единичную матрицу I):

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c\sigma_k\pi_k\chi + e\Phi\varphi\,, \tag{1.10.7}$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = c\sigma_k\pi_k\varphi + \left(e\Phi - 2mc^2\right)\chi\,. \tag{1.10.8}$$

Рассмотрим случай нерелятивистских энергий, когда $e\Phi \ll mc^2$, поэтому этим слагаемым во втором уравнении в системе (1.10.7)-(1.10.8) можно пренебречь. Оператор $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ соответствует энергии частицы, а в нерелятивистском случае она должна быть много меньше энергии покоя частицы mc^2 и поэтому слагаемым $i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}$ необходимо тоже пренебречь. В результате из (1.10.8) получим

$$\chi \approx \frac{\sigma_k\pi_k\varphi}{2mc}\,. \tag{1.10.9}$$

Подставляя (1.10.9) в (1.10.7), получим

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2}{2m}\varphi + e\Phi\varphi\,. \tag{1.10.10}$$

Используя коммутационные $[\sigma_k,\sigma_i]_- = 2ie_{kin}\sigma_n$ и антикоммутационные $[\sigma_k,\sigma_i]_+ = 2\delta_{ki}$ соотношения для матриц Паули, рассмотрим произведение $\sigma_k\pi_k\cdot\sigma_i\pi_i$:

$$\sigma_k\pi_k\sigma_i\pi_i = \frac{1}{2}\left([\sigma_k,\sigma_i]_+ + [\sigma_k,\sigma_i]_-\right)\pi_k\pi_i = \frac{1}{2}\left(2\delta_{ki}+2ie_{kin}\sigma_n\right)\pi_k\pi_i\,,$$

или

$$(\vec\sigma\cdot\vec\pi)^2 = \vec\pi\cdot\vec\pi + i\vec\sigma\cdot(\vec\pi\times\vec\pi)\,. \qquad (1.10.11)$$

Найдём $\vec\pi\times\vec\pi$ (векторное произведение $\vec c = \vec a\times\vec b$ означает, что $c_j = e_{jkl}a_kb_l = a_kb_l - b_la_k$) - это не ноль, так как оператор импульса $\vec p$ не коммутирует с потенциалом $\vec A$:

$$\begin{aligned}(\vec\pi\times\vec\pi)_j &= \left(p_k-\frac{e}{c}A_k\right)\left(p_l-\frac{e}{c}A_l\right)-\left(p_l-\frac{e}{c}A_l\right)\left(p_k-\frac{e}{c}A_k\right)=\\ &=\frac{ie\hbar}{c}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)=\frac{ie\hbar}{c}H_j\,,\end{aligned} \qquad (1.10.12)$$

так как напряжённость магнитного поля $\vec H = \mathrm{rot}\vec A$. Таким образом,

$$(\vec\sigma\cdot\vec\pi)^2 = \vec\pi^2 - \frac{e\hbar}{c}\vec\sigma\vec H\,, \qquad (1.10.13)$$

и уравнение для спинора φ окончательно принимает вид

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\left(\vec p-\frac{e}{c}\vec A\right)^2 + e\Phi - \mu_e\vec\sigma\vec H\right]\varphi\,, \qquad (1.10.14)$$

где $\mu_e = \dfrac{e\hbar}{2mc}$ – магнетон Бора.

Уравнение (1.10.14) описывает поведение электрона в электромагнитном поле. Его называют уравнением Паули, и оно отличается от нерелятивистского уравнения Шредингера дополнительным слагаемым $-\mu_e\vec\sigma\cdot\vec H$, которое отражает наличие у электрона собственного (в смысле не связанного с его орбитальным движением) магнитного момента:

$$\vec\mu = \mu_e\vec\sigma\,. \qquad (1.10.15)$$

Дополнительное слагаемое $-\vec\mu\vec H$ в уравнении Шредингера было постулировано Паули для описания взаимодействия электрона с внешним магнитным полем. Формула (1.10.15) даёт правильное гиромагнитное отношение γ_S для спина (отношение спинового магнитного момента электрона к механическому). Действительно, собственный механический момент электрона

$$\vec S = \frac{\hbar\vec\sigma}{2}\,, \qquad (1.10.16)$$

а магнитный момент

$$\vec\mu = \frac{e\hbar}{2mc}\vec\sigma\,. \qquad (1.10.17)$$

Таким образом, $\gamma_S = |\vec\mu|/|\vec S| = e/mc$, что вдвое больше, чем для орбитального момента $\gamma_L = e/2mc$. Уравнение Дирака даёт естественным образом спин и правильное гиромагнитное отношение, что является одним из важнейших результатов теории Дирака. Заметим, что уравнение Дирака применимо для описания мезонов и формула (1.10.17) даёт правильное выражение для магнитного момента этих частиц, если заменить массу электрона на массу мезона.

Однако формула (1.10.17) непригодна для определения величины магнитных моментов нуклонов (протонов и нейтронов), хотя они также имеют спин ½. Это связано с тем, что они являются составными частицами (имеют структуру). Основной вклад в магнитный момент нуклонов дают сильные взаимодействия, например в виде рождения π^+, π^- пар. Это приводит к появлению больших магнитных моментов: у протона $\mu_p \approx 2.79e\hbar/2m_pc$, у нейтрона $\mu_n \approx -1.91e\hbar/2m_nc$ (который согласно (1.10.17) вообще не должен иметь магнитного момента как незаряженная частица).

Получим ещё одну форму уравнения Паули. Возьмём векторный потенциал в виде $\vec A = \frac{1}{2}\vec H\times\vec r$ и магнитное поле $\vec H = (0,0,H)$, тогда

$$A_x = -\frac{H}{2}y,\quad A_y = \frac{H}{2}x,\quad A_z = 0\,. \qquad (1.10.18)$$

В этом случае напряжённость магнитного поля, вычисленная по формуле $\vec H = \mathrm{rot}\vec A = \nabla\times\vec A$, направлена по оси z. Подставляя (1.10.18) в уравнение Паули (1.10.14), получим

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Bigg[&\frac{\vec p^2}{2m} + \frac{i\hbar e}{2mc}\vec H\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi + \\ &+\frac{e^2}{8mc^2}H^2\left(x^2+y^2\right) + e\Phi - \frac{e\hbar}{2mc}\sigma_zH\Bigg]\varphi.\end{aligned} \qquad (1.10.19)$$

В слабых полях членом с H^2 можно пренебречь, а величина

$$L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad (1.10.20)$$

является z компонентой орбитального момента. В результате уравнение (1.10.19) примет вид

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}H\left(L_z + 2S_z\right) + e\Phi\right]\varphi, \qquad (1.10.21)$$

или, для произвольного направления $\vec{H}$,

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}\vec{H}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right) + e\Phi\right]\varphi, \qquad (1.10.22)$$

где $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$. Величины $\gamma_S\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)$ и $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ являются полными магнитным и механическим моментами частицы.

1.11.Четырёхмерный вектор спина

Для того чтобы найти релятивистское выражение для спина, в волновой функции мы должны вернуться к биспинору:

$$\begin{pmatrix}\varphi\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\varphi\\\chi\end{pmatrix}.$$

Тогда спин должен описываться матрицей 4×4

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\Sigma_i, \quad \text{где} \quad \Sigma_i = \begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\0 & \sigma_i\end{pmatrix}.$$

Подобный переход является оправданным, так как в случае нерелятивистского предела $\psi = \begin{pmatrix}\varphi\\0\end{pmatrix}$, а $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\psi$ переходит в $\frac{1}{2}\vec{\sigma}\varphi$. Также для оператора $\vec{\Sigma}$ справедливы коммутационные соотношения

$$\left[\Sigma_i, \Sigma_j\right]_- = 2ie_{ijk}\Sigma_k,$$

определяющие оператор момента.

Найдём коммутатор оператора $\vec{\Sigma}$ и гамильтониана свободной частицы H:

$$[H, \Sigma_i] = \left[p_k\begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\0 & \sigma_k\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\0 & \sigma_i\end{pmatrix}\right]_- =$$

$$= p_k\begin{pmatrix}0 & \sigma_k\sigma_i - \sigma_i\sigma_k\\\sigma_k\sigma_i - \sigma_i\sigma_k & 0\end{pmatrix} = p_k\begin{pmatrix}0 & 2ie_{ikl}\sigma_l\\2ie_{ikl}\sigma_l & 0\end{pmatrix},$$

что, вообще говоря, не равно нулю. Однако коммутатор гамильтониана с оператором проекции спина на импульс равен нулю, например, если $p_2 = p_3 = 0$, то $\left[H, \Sigma_1\right] = 0$. Это означает, что релятивистская частица с определенным четырёхмерным импульсом может иметь определённое значение только для той компоненты спина, которая направлена вдоль её импульса, т.е. вдоль направления её движения. Таким образом, направление движения задает выделенное направление в пространстве. Для нейтрино, движущегося со скоростью света, вообще возможна только одна ориентация спина: для нейтрино только против направления движения, для антинейтрино–по направлению движения (подробнее в § 59 в [6])

Оператор проекции спина $\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}$ на направление движения частицы $\vec{n} = \vec{p}/\left|\vec{p}\right|$ называется оператором спиральности. Так как

$$\left[H, \vec{\Sigma}\vec{n}\right]_- = 0, \qquad (1.11.1)$$

то он имеет те же собственные функции, что и гамильтониан $H = \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m$. Найдем собственные значения оператора спиральности, т.е. решим уравнение

$$\left(\vec{\Sigma}\vec{n}\right)u_\pm^r(\vec{p}) = ru_\pm^r(\vec{p}). \qquad (1.11.2)$$

Подействовав на это уравнение оператором $\vec{\Sigma}\vec{n}$, получим

$$u_\pm^r(\vec{p}) = r^2u_\pm^r(\vec{p}). \qquad (1.11.3)$$

Оператор $\left(\vec{\Sigma}\vec{n}\right)^2$ в левой части этого уравнения равен единичному, так как

$$\left(\vec{\Sigma}\vec{n}\right)^2 = \left(\Sigma_1n_1 + \Sigma_2n_2 + \Sigma_3n_3\right)^2 = \Sigma_1^2n_1^2 + \Sigma_2^2n_2^2 + \Sigma_3^2n_3^2 = I\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) = I$$

(при доказательстве были использованы соотношения $\vec{n}^2 = 1$, $\Sigma_i^2 = I$, $\Sigma_1\Sigma_2 = -\Sigma_2\Sigma_1$, и т.д.). Следовательно, спиральность r может принимать только два значения: $r = +1$ и $r = -1$.

Запишем полную систему базисных решений уравнения Дирака для свободной частицы:

$$u_+^r\left(\vec{p}\right) = N_+\begin{pmatrix}\varphi^r\\\dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}}{m + p_0}\varphi^r\end{pmatrix}, \quad r = \pm1 \qquad (1.11.4)$$

$$u_-^r\left(\vec{p}\right) = N_-\begin{pmatrix} -\dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p_0+m}\chi^r \\ \chi^r \end{pmatrix}, \quad r = \pm 1 \qquad (1.11.5)$$

и найдём явный вид спиноров φ^r и χ^r для $r = \pm 1$. Уравнение (1.11.2) для $u_+^r\left(\vec{p}\right)$ дает

$$\begin{pmatrix} \vec{n}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{n}\vec{\sigma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^r \\ \dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}}{m+p_0}\varphi^r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \varphi^r \\ \dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}}{m+p_0}\varphi^r \end{pmatrix},$$

откуда

$$(\vec{n}\vec{\sigma})\varphi^r = r\varphi^r, \qquad (1.11.6)$$

что однозначно определяет φ^r при заданном значении спиральности r. При $\vec{n}$ вдоль оси z (1.11.6) даёт

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\varphi^r = r\varphi^r,$$

т.е.

$$\varphi^{r=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \varphi^{r=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.11.7)$$

Аналогично уравнение (1.11.2) для $u_-^r\left(\vec{p}\right)$ дает

$$(\vec{n}\vec{\sigma})\chi^r = r\chi^r, \qquad (1.11.8)$$

и при $\vec{n}$, направленном вдоль оси z,

$$\chi^{r=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \chi^{r=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.11.9)$$

Мы получили, что решения для $r = 1$ ортогональны решениям для $r = -1$. Пользуясь этим результатом, можно переписать соотношения (1.9.9), (1.9.19), (1.9.20) и (1.9.21) в виде

$$\bar{u}_\pm^{r'}(\vec{p})\gamma_4 u_\pm^r(\vec{p}) = 2p_0\delta_{rr'}, \qquad (1.11.10)$$

$$\bar{u}_\pm^{r'}(\vec{p})u_\pm^r(\vec{p}) = 2m\delta_{rr'}, \qquad (1.11.11)$$

$$\bar{u}_\pm^{r'}(-\vec{p})u_\pm^r(-\vec{p}) = -2m\delta_{rr'}, \qquad (1.11.12)$$

$$\bar{u}_\pm^{r'}(\vec{p})u_\pm^r(-\vec{p}) = 0. \qquad (1.11.13)$$

Некоммутируемость гамильтониана и операторов спина означает, что с гамильтонианом не коммутируют и операторы углового момента $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$, т.е. проекции спина и орбитального момента на выделенную ось по отдельности не сохраняются. Сохраняются только проекции полного момента

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}, \qquad (1.11.14)$$

так как

$$\left[H, \vec{J}\right]_- = 0, \; \left[H, \vec{J}^2\right]_- = 0. \qquad (1.11.15)$$

Отметим, что $\vec{S}^2 = \dfrac{3\hbar^2}{4}I$ и

$$\left[H, \vec{S}^2\right]_- = 0, \; \left[H, \vec{L}^2\right]_- = 0. \qquad (1.11.16)$$

1.12.Решение уравнения Дирака для электрона в водородоподобном ионе

Кратко опишем решение уравнения Дирака для электрона, находящегося в центральном поле водородоподобного иона. Потенциальная энергия такого электрона (в системе единиц СГС)

$$V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}, \qquad (1.12.1)$$

где Z – количество протонов в ядре (порядковый номер атома в таблице Менделеева), а r – расстояние электрона от ядра, α – постоянная тонкой структуры. Гамильтониан

$$H = \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m + V(r). \qquad (1.12.2)$$

Отметим некоторое противоречие, заложенное в таком подходе: использование потенциала предполагает бесконечную скорость передачи сигнала, что несовместимо с релятивизмом. Однако, как приближение, такой подход использовался для решения многих задач описания релятивистских частиц в различных внешних полях.

Операторы H, квадрата полного момента $\vec{J}^2$ и его проекции на выделенную ось J_z для электрона в центральносимметричном поле коммутируют между собой:

$$\left[H, \vec{J}^2\right] = 0, \quad \left[H, J_z\right] = 0, \quad \left[J_z, \vec{J}^2\right] = 0,$$

а это означает, что они обладают общей системой собственных функций

$$\psi_{jM} = \begin{pmatrix} \varphi_{jM}\left(\vec{r}\right) \\ \chi_{jM}\left(\vec{r}\right) \end{pmatrix},$$

для которых можно записать уравнения

$$H\psi_{jM} = E\psi_{jM},$$
$$\vec{J}^2\psi_{jM} = j(j+1)\psi_{EjM},$$
$$J_z\psi_{jM} = M\psi_{jM},$$

где E, $j(j+1)$ и M – собственные значения операторов H, $\vec{J}^2$, J_z. Здесь и далее $n = 1, 2, 3...$ – главное квантовое число, $j = l \pm ½$ – квантовое число, определяющее собственные значения полного момента, $l = 0, ..., n-1$ – орбитальное квантовое число и $M = -j...j$. Уравнение Дирака $H\psi_{jM} = E\psi_{jM}$ даёт систему уравнений для $\varphi_{jM}(\vec{r})$ и $\chi_{jM}(\vec{r})$:

$$\begin{cases} \vec{\sigma}\vec{p}\chi_{jM} + (m - E + V)\varphi_{jM} = 0 \\ \vec{\sigma}\vec{p}\varphi_{jM} - (m + E - V)\chi_{jM} = 0. \end{cases} \quad (1.12.3)$$

Как если бы мы решали эту задачу, используя уравнение Шредингера, переменные разделяются и мы получаем решение двух типов для угловой части ψ_{jM}. При $j = l + ½$

$$\varphi_{jM}^{(+)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{l+½+M}{2l+1}} Y_l^{M-½}(\theta,\varphi) \\ \sqrt{\dfrac{l+½-M}{2l+1}} Y_l^{M+½}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}, \quad (1.12.4)$$

а при $j = l - ½$

$$\varphi_{jM}^{(-)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{l+½-M}{2l+1}} Y_l^{M-½}(\theta,\varphi) \\ -\sqrt{\dfrac{l+½+M}{2l+1}} Y_l^{M+½}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}, \quad (1.12.5)$$

где $Y_l^{M\pm 1/2}(\theta,\varphi)$ – шаровые функции, которые выражаются через присоединённые функции Лежандра

$$Y_l^{M\pm½}(\theta,\varphi) = P_l^{M\pm½}(\cos\theta)e^{i(M\pm½)\varphi}. \quad (1.12.6)$$

Фаза шаровых функций задаётся условием $Y_{l,M}^* = (-1)^M Y_{l,-M}$, а решение $\varphi_{jM}^{(-)}$ существует только при $l \geq 0$. Отметим, что в выражения (1.12.4) и (1.12.5) входят комбинации сферических функций с двумя возможными значениями $j = l \pm ½$ и их проекциями на ось z, что соответствует несохранению проекции спина на произвольную ось (сохраняется только проекция спина на направление движения). Общее

решение можно представить в виде суперпозиции (1.12.4) и (1.12.5) с коэффициентами, зависящими от r:

$$\psi_{jm} = \begin{pmatrix} G_j^+(r)\varphi_{jM}^+ + G_j^-(r)\varphi_{jM}^- \\ F_j^+(r)\varphi_{jM}^+ + F_j^-(r)\varphi_{jM}^- \end{pmatrix}. \quad (1.12.7)$$

Далее решая эту задачу (см. § 1.5 в [1] или § 94 в [5]), можно найти энергию электрона в виде ряда по постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$:

$$E = m\left\{1 - \frac{(Z\alpha)^2}{2n^2}\left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n}\left(\frac{1}{j+½} - \frac{3}{4n}\right)\right] + O\left(Z\alpha\right)^6\right\}, \quad (1.12.8)$$

где $j = 1/2,\ 3/2, ...,\ n - ½$. Первое слагаемое в (1.12.8)– это энергия покоя электрона mc^2, второе $-(Z\alpha)^2 m/2n^2$ – энергия, которая получается для электрона в водородоподобном ионе из решения уравнения Шредингера. Она зависит только от главного квантового числа и не зависит от орбитального квантового числа l, т.е. энергия по этому числу вырождена. Следующее слагаемое

$$\Delta E = -m\frac{(Z\alpha)^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right), \quad (1.12.9)$$

отражает тонкую структуру спектра водородоподобного иона. Оно зависит от значения полного орбитального момента, проекция которого на выделенное направление j может принимать при заданном значении орбитального квантового числа l два значения: $l + 1/2$ и $l - 1/2$. Добавка (1.12.9) частично снимает вырождение, но, тем не менее, остаются уровни с одинаковой энергией (используются спектрографические обозначения, nl_j):

$1s_{1/2}$ – основное состояние

$$\underbrace{2s_{1/2} \quad 2p_{1/2}}_{\text{одинаковые энергии}} \quad 2p_{3/2}$$

$$\underbrace{3s_{1/2} \quad 3p_{1/2}}_{\text{одинаковые энергии}} \quad \underbrace{3p_{3/2} \quad 3d_{3/2}}_{\text{одинаковые энергии}} \quad 3d_{5/2}$$

В 1947 г. Лэмб (Lamb) и Резерфорд (Retherford) открыли, что энергии уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ отличаются, что противоречит (1.12.9). Это оказалось связано с взаимодействием электрона с вакуумом (поляризация вакуума) и рождением электрон-позитронных пар через испускание атомом виртуальных фотонов. Сдвиг энергии, связанный с этим эффектом, называют радиационным– он полностью снимает вырождение энергетических уровней. Его вклад при малых Z порядка $(Z\alpha)^4\alpha$. Отсюда ясно, что использовать формулу (1.12.8) с точностью, превышающей $(Z\alpha)^4$, не имеет смысла.

Аналогично взаимодействие с вакуумом и рождение электрон-позитронных пар приводит к появлению добавки к магнитному моменту электрона

$$\delta\mu = \alpha\frac{e\hbar}{2mc}, \qquad (1.12.10)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры.

Как и лэмбовский сдвиг, этот аномальный магнитный момент в рамках одночастичного уравнения Дирака получить нельзя.

1.13. Частицы со спином 1 и 3/2

Понятно из предыдущего описания, что уравнение Клейна–Гордона описывает бесспиновые (скалярные) частицы, такие как π мезоны. Частицы со спином ½ (спинорные частицы), такие как электроны, μ-мезоны, нуклоны, кварки, описываются уравнением Дирака. Нейтрино также описываются модификацией уравнения Дирака (уравнением Вейля) для нулевой массы. Очень кратко обсудим другие значения спина.

Частицы со спином 1 называются векторными частицами, их известными примерами являются ρ,ω,ψ-мезоны. Физические состояния частицы со спином 1 должны описываться трехкомпонентной волновой функцией. Математически эти состояния можно получить используя четырехкомпонентную функцию $u_\mu(x)$, каждая компонента которой удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона:

$$\left(p^2+m^2\right)u_\mu(x)=0. \qquad (1.13.1)$$

Для описания частицы со спином 1 нужна трехкомпонентная волновая функция; лишнюю компоненту можно убрать, используя условие Лоренца

$$p_\mu u_\mu(x)=0, \qquad (1.13.2)$$

оставляющее только три независимые компоненты.
Решением уравнения (1.13.1) является плоская волна

$$u_\mu(x)=\varepsilon_\mu \exp(ipx), \qquad (1.13.3)$$

а множитель ε_μ описывает различные спиновые состояния частицы. Их называют состояниями с различной поляризацией, а вектор ε_μ называется четырехмерным вектором поляризации. Подставляя (1.13.3) в уравнение (1.13.2), получим

$$p_\mu\varepsilon_\mu = -p_0\varepsilon_0+\vec{p}\vec{\varepsilon}=0. \qquad (1.13.4)$$

Это уравнение показывает, что при данном импульсе у векторной частицы есть три независимых вектора поляризации. Другими словами, при данном импульсе у вектора поляризации возможны три линейно независимых компоненты. Пусть импульс направлен вдоль оси z. Тогда в качестве независимых векторов можно выбрать орты $\vec{\chi}_1$, $\vec{\chi}_2$ и $\vec{\chi}_3$, направленные вдоль осей x, y и z:

$$\vec{\chi}_1=(1,\ \ 0,\ \ 0),\quad \vec{\chi}_2=(0,\ \ 1,\ \ 0),\quad \vec{\chi}_3=(0,\ \ 0,\ \ 1). \qquad (1.13.5)$$

Два первых орта соответствуют поперечной поляризации, а последний– продольной. Вместо векторов $\vec{\chi}_1$, $\vec{\chi}_2$ и $\vec{\chi}_3$ можно выбрать единичные векторы $\vec{\chi}_{+1}$, $\vec{\chi}_{-1}$ и $\vec{\chi}_0$:

$$\vec{\chi}_{+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ \ i,\ \ 0),\quad \vec{\chi}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ \ -i,\ \ 0),\quad \vec{\chi}_3=(0,\ \ 0,\ \ 1). \qquad (1.13.6)$$

Выясним физический смысл наборов векторов (1.13.5) и (1.13.6). Пусть трёхмерный вектор поляризации $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси x. Тогда, учитывая, что

$$u_\mu(x)=\varepsilon_\mu\exp(ipx),$$

находим

$$u_1(x)=\varepsilon_1\exp(ipx),\quad u_2(x)=0,\quad u_3(x)=0.$$

В этом случае вектор $\vec{u}(x)$, изменяясь со временем, остаётся всё время направленным по оси x_1. Аналогичным образом определяется линейная поляризация $\vec{u}(x)$ вдоль осей y и z.

Направим вектор $\vec{\varepsilon}$ вдоль $\vec{\chi}_{+1}$. Тогда поперечные компоненты $u_1(x)$ и $u_2(x)$ запишутся в виде

$$u_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{+1}\exp(ipx),\quad u_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{+1}\exp\left(ipx+\frac{\pi}{2}\right), \qquad (1.13.7)$$

или, если $\vec{r}=0$, то

$$u_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{+1}\exp(ip_0x_0),\quad u_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{+1}\exp\left(ip_0x_0+\frac{\pi}{2}\right), \qquad (1.13.8)$$

т. е. вектор $\vec{u}(x)$ вращается, оставаясь постоянным по величине. Поэтому говорят, что $\vec{u}(x)$ поляризован по кругу.

Если вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен по $\vec{\chi}_{-1}$, то

$$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{-1}\exp(ip_0x_0), \quad u_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{-1}\exp\left(ip_0x_0 + \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.13.9}$$

т. е. вектор $\vec{u}(x)$ опять поляризован по кругу, однако направление вращения в этом случае противоположно по сравнению со случаем, когда $\vec{\varepsilon}$ направлено вдоль $\vec{\chi}_{+1}$.

Таким образом, векторы (1.13.5) определяют линейную поляризацию, а векторы (1.13.6)– круговую. Векторы (1.13.5) и (1.13.6) полностью характеризуют спиновые состояния вектора поляризации, т.е. являются его спиновыми волновыми функциями.

Кратко рассмотрим спин 3/2. Для частицы с таким спином уравнение должно быть комбинацией уравнений с $s=1$ и $s=½$. Каждая компонента волновой функции будет одновременно решением уравнения Клейна–Гордона (1.13.3) вместе с условием (1.13.4) и биспинором, удовлетворяющим уравнению Дирака:

$$\left(-i\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - im\right)\psi_\mu^s(x) = 0 . \tag{1.13.10}$$

Всего получается 3 векторных независимых компоненты из уравнения Клейна–Гордона и 4 спинорных из уравнения Дирака (о них напоминает индекс s в $\psi_\mu^s(x)$), то есть $\psi_\mu^s(x)$ имеет всего 12 компонент. Среди спинорных компонент есть зависимые, которые убираются с помощью релятивистки инвариантной системы из четырёх уравнений,

$$\gamma_\mu \psi_\mu^s(x) = 0 . \tag{1.13.11}$$

В результате для частицы со спином 3/2 остаётся всего 8 независимых компонент функции $\psi_\mu^s(x)$.

Общее замечание– частицу с произвольным спином s можно представлять состоящей из $2s$ частиц, каждая со спином равным ½.

1.14.Теория «дырок» Дирака

Необходима физическая интерпретация состояний с отрицательной энергией. Такие состояния могут означать возможность непрерывного высвобождения энергии, при котором будет происходить переход на всё более низкие уровни отрицательной энергии. Для того чтобы эту трудность устранить, Дирак в 1930 г. выдвинул гипотезу о

том, что в пустом пространстве, вакууме, все отрицательные уровни энергии (которых бесконечно много) заняты электронами. Все эти состояния с отрицательной энергией представляют собой что-то вроде фона, который определяет точку отсчёта энергии. «Занятость» проистекает из-за статистики Ферми: в каждом энергетическом состоянии могут находиться максимум два электрона с противоположными спинами, и поэтому электроны с положительной энергией не могут перейти в состояние с отрицательной энергией, пока все они заняты. Если одно из фоновых состояний с отрицательной энергией освобождается, например, под внешним воздействием (внешний фотон), то это состояние, «дырка в фоне», для внешнего наблюдателя выглядит как частица с положительной энергией и положительным зарядом. Изначально Дирак предполагал, что эти «дырки» являются протонами, но в 1932 г. Андерсоном (Anderson) в космических лучах был открыт позитрон, частица с массой электрона и положительным зарядом. Было установлено, что позитрон рождается всегда в паре с электроном, и то, что для такого рождения необходимо $2mc^2$ энергии. Теория «дырок» легко это объясняет, так как для возникновения позитрона–перехода электрона из состояния с отрицательной энергией $-c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}$ в состояние с положительной энергией $+c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}$ необходимо, по крайней мере, $2mc^2$ энергии. Когда электрон переходит из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной, возникает дырка в фоне состояний с отрицательной энергией; эта «дырка»– позитрон, а электрон с положительной энергией ведёт себя как обычный электрон. Обратный процесс, аннигиляции электрон-позитронной пары, может быть объяснен переходом электрона в незанятое состояние с отрицательной энергией; этот переход приводит к исчезновению дырки с одновременным излучением энергии в виде фотонов. Теория Дирака первой поставила вопрос о физических свойствах вакуума, из которых она вывела существование электронов и позитронов. Из идеи Дирака также следовала возможность поляризации вакуума.

Тем не менее гипотеза «дырок в вакууме» представляет только исторический интерес, так как существуют фундаментальные трудности в её использовании. Например, неясно, почему «море Дирака» с бесконечной массой не наблюдаемо. Также эта гипотеза не может быть использована для того, чтобы объяснить отрицательные энергии в уравнении Клейна–Гордона. Это связано с тем, что уравнение Клейна–Гордона описывает частицу с нулевым спином и принцип Паули на неё не распространяется, а следовательно, переход в состояние с отрицательными энергиями с испусканием фотонов для неё не является запрещённым, даже если в этом состоянии уже находится какая-то частица.

Отметим ещё одну интерпретацию состояний с отрицательной энергией, предложенную Фейнманом и сейчас тоже интересную только с точки зрения развития теории поля. В рамках этого подхода частицы с отрицательной энергией рассматриваются как движущиеся во времени обратно, т.е. для них $t<0$, что позволяет рассматривать их энергию как положительную.

Современная теория поля объясняет появление электрон-позитронных пар, их свойства, аномальный магнитный момент, лэмбовский сдвиг и многое другое, что из теории Дирака получить нельзя, и при этом не вводит предположение о существовании фона электронов с отрицательной энергией. Следующие главы посвящены обобщению уравнения Дирака на классическое поле Дирака, а затем его квантованию. При этом подходе энергия, т.е. собственные значения гамильтониана, всегда положительна.

2.Теория поля

Как было показано в предыдущей части, рассмотрение электрона как «свободной частицы» во внешнем поле не принимает во внимание взаимодействие с вакуумом и рождение виртуальных и реальных частиц. Нужно обобщение, включающее выведенные ранее одночастичные релятивистские уравнения, но позволяющее рассматривать многочастичные задачи, такие как распад частиц и задачи рассеяния с рождением частиц. Такое обобщение основывается на концепции теории поля и методе вторичного квантования. При этом не появляются решения одночастичных волновых уравнений, связанные с отрицательными энергиями, а из уравнения Клейна–Гордона не следует неположительная плотность вероятности: ρ рассматривается как разность положительных и отрицательных зарядов (например, $\pi^{\pm}$ мезонов системы). Вектор состояния системы описывается дифференциальным уравнением первого порядка по времени, что позволяет находить его в любой момент времени при заданном начальном состоянии.

2.1.Лагранжев формализм

В рамках Лагранжева формализма функционал, называемый действием, выражается через функцию Лагранжа, зависящую от обобщённых координат и импульсов,

$$A=\int_{t_0}^{t_1} L(q_i,\dot{q}_i)dt\,, \qquad (2.1.1)$$

и на реальной траектории имеет минимум. Это означает, что на такой траектории вариация действия равна нулю, $\delta A=0$. Отсюда получается уравнение Лагранжа–Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0\,. \qquad (2.1.2)$$

В классической механике решение этих уравнений вместе с граничными условиями в точках t_0 и t_1 даёт «истинную» (физическую) траекторию. Функция Лагранжа выражается через кинетическую и потенциальную энергии и в простейшем случае одной частицы имеет вид

$$L=\sum_{i=1}^{n}\frac{m\dot{q}_i^2}{2}-U(q_1,...,q_n)\,, \qquad (2.1.3)$$

где n – это количество степеней свободы. При подстановке функции Лагранжа (2.1.3) в уравнение (2.1.2) получается система уравнений Ньютона

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial U(q_1,...,q_n)}{\partial q_i}.$$

Аналогичным образом строится Лагранжев подход для поля. Значение полевой функции в каждой заданной точке играет роль обобщённых координат. Понятно, что это система с бесконечным числом степеней свободы. Для удобства разобьем пространство на элементарные объёмы ΔV_i, внутри их поле считается неизменным. Пусть поле в каждой точке пространства описывается функцией $\psi(x,t)$. Тогда его значение внутри i -го элемента обозначим $\psi_i(t)$, т.е.

$$\psi_i(t) = \psi(x_i,t).$$

Точка с координатами x_i выбирается так, чтобы она лежала внутри i -го кубика. Лагранжиан

$$Z = \sum_{i=1}^{n} L\left(\psi_i(t), \frac{\partial \psi_i(t)}{\partial x_\alpha}\right)\Delta V_i$$

выражается через плотность функции Лагранжа L (в дальнейшем мы именно её будем называть функцией Лагранжа, или лагранжианом). Предполагается, что L может содержать производные поля не старше первой. Устремив объёмы кубиков ΔV_i к нулю и перейдя от суммирования к интегрированию, получим

$$Z = \int L\left(\psi(t,x), \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x_\alpha}\right)dV. \qquad (2.1.4)$$

Действие

$$A = \int Z\left(\psi(t,x), \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x_\alpha}\right)dt = \int L\left(\psi(t,x), \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x_\alpha}\right)d\Omega. \qquad (2.1.5)$$

($d\Omega = dVdt = dV = dx_1dx_2dx_3dt$) минимально для «истинного» поля. Для получения уравнений поля необходимо варьировать функционал A:

$$\delta A = \int\left(\frac{\partial L}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial_\alpha \psi}{\partial x_\alpha}}\frac{\partial \delta\psi}{\partial x_\alpha}\right)d\Omega.$$

Второй член проинтегрируем по частям, учитывая, что функция на границах четырёхмерного объёма фиксирована и вариация там равна нулю,

$$\delta A = -\int\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}}\delta\psi - \frac{\partial L}{\partial \psi}\right)d\Omega.$$

Равенство нулю вариации действия (с учётом произвольности $\delta\psi$) приводит к уравнению Лагранжа-Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}} = 0. \qquad (2.1.6)$$

Если L зависит от нескольких полей ψ_i, условие $\delta A = 0$ приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_i} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\alpha}} = 0, \qquad (2.1.7)$$

где $L = L\left(\psi_1, \frac{\partial \psi_1}{\partial x_\alpha}, \psi_2, \frac{\partial \psi_2}{\partial x_\alpha}, ..., \psi_n, \frac{\partial \psi_n}{\partial x_\alpha}\right)$. В последующем для производной по координате $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right)$, где $x_4 = it$, будет использоваться сокращённая запись ∂_α.

2.2.Законы сохранения

Теорема Нётер (1918) утверждает, что для каждого непрерывного преобразования функций поля (и координат), зависящего от n параметров, таких что вариация действия при изменении этих параметров равна нулю, $\delta A = 0$, существует n динамических инвариантов (симметрий), сохраняющихся во времени величин, представляющих собой комбинации функций поля и их производных. В случае однородности пространства-времени такими параметрами являются пространственные координаты и время. Очевидно, что функция Лагранжа не должна зависеть от этих параметров x_α явно, поэтому полная производная от нее может быть записана в виде

$$\partial_\beta L(\psi,\partial_\alpha\psi)=\frac{\partial L}{\partial\psi}\partial_\beta\psi+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\psi)}\partial_\beta(\partial_\alpha\psi).$$

Подставляя сюда $\dfrac{\partial L}{\partial\psi}$ из уравнения (2.1.6), получим

$$\partial_\beta L(\psi,\partial_\alpha\psi)=\partial_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\psi)}\right)\partial_\beta\psi+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\psi)}\partial_\alpha(\partial_\beta\psi).$$

Запишем это равенство как

$$\delta_{\alpha\beta}\partial_\alpha L=\partial_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\psi)}\partial_\beta\psi\right).$$

Перенося левую часть уравнения в правую и вводя тензор

$$T_{\alpha\beta}=\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\psi)}\partial_\beta\psi-\delta_{\alpha\beta}L, \qquad (2.2.1)$$

получим

$$\partial_\alpha T_{\alpha\beta}=0. \qquad (2.2.2)$$

Полученный нами тензор $T_{\alpha\beta}$, четырёхмерная дивергенция которого равна нулю, называется тензором энергии-импульса.

Проинтегрируем выражение (2.2.2) по всему пространству и распишем полученное выражение как сумму пространственной и временной производных

$$\int\partial_\alpha T_{\alpha\beta}dV=\partial_4\int T_{4\beta}dV+\int\partial_k T_{k\beta}dV.$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса для преобразования второго слагаемого в интеграл по замкнутому контуру, получим

$$\partial_4\int T_{4\beta}dV+\oint T_{k\beta}dS_k=0.$$

Предположив, что поток через замкнутую бесконечно удалённую поверхность равен нулю, получим

$$\partial_4\int T_{4\beta}dV=0. \qquad (2.2.3)$$

Уравнение (2.2.3) отражает закон сохранения величины $P_\beta=i\int T_{4\beta}dV$, которая является четырёхмерным вектором энергии-импульса $P_\beta=(P_k,iH)$, где H – гамильтониан. Этот закон сохранения связан с однородностью четырёхмерного пространства-времени.

Рассмотрим теперь комплексное поле и покажем, что в этом случае есть ещё один закон сохранения. В качестве независимых переменных лагранжиана можно взять ψ, ψ^*, $\partial_\alpha\psi$ и $\partial_\alpha\psi^*$. Наблюдаемой

величиной является $|\psi|^2$, а это означает, что преобразование (называемое глобальным калибровочным)

$$\begin{cases}\psi\to\psi'=\psi e^{i\lambda}\\ \psi^*\to\psi'^*=\psi^* e^{-i\lambda}\end{cases}, \qquad (2.2.4)$$

где λ – действительное число, оставляет функцию Лагранжа неизменной, т.е.

$$\delta L(\psi,\psi^*,\partial_\alpha\psi,\partial_\alpha\psi^*)=0. \qquad (2.2.5)$$

Для $\lambda\ll 1$ из (2.2.4) в основном порядке по λ получим

$$\begin{cases}\psi'=\psi+\delta\psi\\ \psi'^*=\psi^*+\delta\psi^*\end{cases}, \qquad (2.2.6)$$

где $\delta\psi=i\lambda\psi$, $\delta\psi^*=-i\lambda\psi^*$. Тогда (2.2.5) можно записать как

$$\frac{\partial L}{\partial\psi}\delta\psi+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\psi)}\delta(\partial_\alpha\psi)+\frac{\partial L}{\partial\psi^*}\delta\psi^*+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\psi^*)}\delta(\partial_\alpha\psi^*)=0,$$

или

$$\frac{\partial L}{\partial\psi}i\lambda\psi+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\psi)}i\lambda\partial_\alpha\psi-\frac{\partial L}{\partial\psi^*}i\lambda\psi^*-\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\psi^*)}i\lambda\partial_\alpha\psi^*=0.$$

Подставляя $\dfrac{\partial L}{\partial\psi}$ из уравнения (2.1.6), получим

$$\partial_\alpha j_\alpha=0, \qquad (2.2.7)$$

где

$$j_\alpha=-ie\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\psi)}\psi-\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\psi^*)}\psi^*\right] \qquad (2.2.8)$$

является вектором четырёхмерного тока. Константа e в параметр λ введена дополнительно и в дальнейшем будет соответствовать заряду частицы. Проинтегрируем (2.2.8) по трёхмерному объёму и запишем полученное выражение как

$$\int\partial_\alpha j_\alpha dV=\int\partial_4 j_4dV+\int\partial_k j_k dV=0.$$

Воспользуемся теоремой Гаусса по отношению ко второму слагаемому, а затем предположением о том, что поток через замкнутую бесконечно удалённую поверхность равен нулю. В результате получим

$$\partial_4\int j_4dV=0. \qquad (2.2.9)$$

Это соотношение выражает закон сохранения величины

$$Q = -i\int j_4 dV\,, \qquad (2.2.10)$$

которая является полным зарядом поля.

Теперь рассмотрим закон сохранения момента, который возникает, если пространство-время изотропно. Поворот на бесконечно малый угол в пространстве-времени соответствует преобразованию (1.6.8). При таком преобразовании биспинор ψ_α изменяется как

$$\psi'_\alpha = \psi_\alpha + \delta\psi_\alpha\,, \qquad (2.2.11)$$

где

$$\delta\psi_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}Y_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_\beta\,. \qquad (2.2.12)$$

Найдём, как меняется производная при повороте:

$$\frac{\partial\psi'_\alpha}{\partial x'_\rho} = (\delta_{\rho\nu}+\varepsilon_{\rho\nu})\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\psi_\alpha+\delta\psi_\alpha) = \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\rho} + \varepsilon_{\rho\nu}\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}Y_{\mu\nu\alpha\beta}\frac{\partial\psi_\beta}{\partial x_\rho}\,. \qquad (2.2.13)$$

В доказательстве (2.2.13) производная от биспинора в повёрнутой системе координат была выражена через производную в исходной системе координат с помощью преобразования (1.6.7) для $\frac{\partial}{\partial x'_\rho}$ и (2.2.11) для биспинора ψ_α, а затем была использована малость поворота для того, чтобы пренебречь слагаемыми второго порядка по $\varepsilon_{\rho\nu}$. Таким образом, изменение производной будет

$$\delta\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\rho} = \varepsilon_{\rho\nu}\partial_\nu\psi_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}Y_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\rho\psi_\beta\,. \qquad (2.2.14)$$

При таком преобразовании функция Лагранжа $L\left(\psi_\alpha,\partial_\rho\psi_\alpha\right)$ должна оставаться неизменной:

$$\delta\psi_\alpha\frac{\partial L}{\partial\psi_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\psi_\alpha)}\delta\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\rho} = 0\,.$$

Подставляя сюда (2.2.12) и (2.2.14), находим

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}Y_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_\beta\frac{\partial L}{\partial\psi_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\psi_\alpha)}\left[\varepsilon_{\rho\nu}\partial_\nu\psi_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}Y_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\rho\psi_\beta\right] = 0\,. \qquad (2.2.15)$$

Подставляя в (2.2.15) $\frac{\partial L}{\partial\psi_\alpha}$ из уравнения (2.1.7), получим

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi_\alpha)}\partial_\nu\psi_\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left[Y_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_\beta\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\psi_\alpha)}\right] = 0\,. \qquad (2.2.16)$$

Меняя в (2.2.16) индексы μ и ν местами, а потом, вычитая полученное выражение из (2.2.16), получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi_\alpha)}\partial_\nu\psi_\alpha - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu\psi_\alpha)}\partial_\mu\psi_\alpha + \\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left[Y_{\mu\nu\alpha\beta}\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\psi_\alpha)}\psi_\sigma - Y_{\mu\nu\alpha\beta}\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\psi_\alpha)}\psi_\sigma\right] = 0.\end{aligned} \qquad (2.2.17)$$

Пользуясь свойством $Y_{\mu\nu\beta\alpha} = -Y_{\nu\mu\beta\alpha}$, а также формулой

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi_\alpha)}\partial_\nu\psi_\alpha - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu\psi_\alpha)}\partial_\mu\psi_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\rho}\left(x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho}\right),$$

преобразуем (2.2.17) к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left[\left(x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho}\right) + Y_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_\beta\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\psi_\alpha)}\right] = 0\,. \qquad (2.2.18)$$

Мы пришли к закону сохранения тензора плотности полного момента импульса

$$m_{\mu\nu,\rho} = \left(x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho}\right) + Y_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_\beta\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\psi_\alpha)}\,. \qquad (2.2.19)$$

Интегрирование (2.2.19) по объёму даёт, что тензор

$$M_{\mu\nu} = i\int m_{\mu\nu,4}d\vec{x} \qquad (2.2.20)$$

не меняется со временем:

$$\frac{d}{dt}M_{\mu\nu} = 0\,.$$

Пространственные компоненты $M_{\mu\nu}$ дают вектор полного момента импульса

$$M_i = \frac{1}{2}e_{ikl}M_{kl}\,. \qquad (2.2.21)$$

Тензор $M_{\mu\nu}$ является суммой тензора орбитального момента импульса,

$$L_{\mu\nu} = i\int\left(x_\mu T_{\nu 4} - x_\nu T_{\mu 4}\right)d\vec{x}\,, \qquad (2.2.22)$$

и спинового тензора,

$$S_{\mu\nu} = i\int \frac{\partial L}{\partial(\partial_4 \psi_\alpha)} Y_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_\beta d\vec{x}\,. \qquad (2.2.23)$$

$L_{\mu\nu}$ и $S_{\mu\nu}$ не сохраняются во времени по отдельности, сохраняется только $M_{\mu\nu}$.

Для примера найдём спиновый тензор для спинорного поля (оно будет рассмотрено подробно в § 2.5). Используя выражения для лагранжиана спинорного поля $L = -\bar{\psi}\left(\gamma_\alpha \partial_\alpha + m\right)\psi$, а также (1.6.5) и (1.6.8), получим (опуская спинорные индексы α и β)

$$Y_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}\,. \qquad (2.2.24)$$

Следовательно,

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int \psi^\dagger \sigma_{\mu\nu}\psi d\vec{x},, \qquad (2.2.25)$$

тогда

$$S_i = \frac{1}{2}e_{ikl}S_{kl} = \frac{1}{2}\int \psi^\dagger \Sigma_i \psi\,, \qquad (2.2.26)$$

где

$$\Sigma_i = \frac{1}{2}e_{ikl}\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}. \qquad (2.2.27)$$

2.3. Скалярное действительное поле

Скалярным полем ϕ называется поле, которое определяется уравнением Клейна–Гордона

$$\left(-\partial_\alpha \partial_\alpha + m^2\right)\phi = 0\,. \qquad (2.3.1)$$

Лагранжиан должен быть таким, чтобы уравнение Лагранжа–Эйлера привело к уравнению (2.3.1). Легко проверить, что это достигается выбором лагранжиана в виде (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант)

$$L\left(\phi, \partial_\alpha \phi\right) = -\frac{1}{2}\left[\left(\partial_\alpha \phi\right)^2 + m^2\phi^2\right], \qquad (2.3.2)$$

Используя (2.3.2), найдём тензор энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\alpha \phi\right)}\partial_\beta \phi - \delta_{\alpha\beta}L = -\partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \delta_{\alpha\beta}L\,.$$

Теперь можно найти четырёхмерный импульс поля $P_\alpha = i\int T_{4\alpha} d\vec{x}$ (в выкладках ниже сделана замена $x_4 = it = ix_0$, $\partial_4 = -i\partial_0$):

$$\begin{aligned} P_4 &= i\int T_{44} d\vec{x} = i\int \left(\partial_0 \phi \partial_0 \phi - L\right) d\vec{x} = \\ &= \frac{i}{2}\int \left[\left(\partial_0 \phi\right)^2 + \left(\nabla\phi\right)^2 + m^2\phi^2\right] d\vec{x}, \end{aligned} \qquad (2.3.3)$$

$$P_k = i\int T_{4k} d\vec{x} = -\int \partial_0 \phi \partial_k \phi d\vec{x}\,. \qquad (2.3.4)$$

Представим полевую функцию ϕ через её трёхмерный Фурье-образ:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int \left[\phi^{(+)}\left(\vec{q}\right)e^{-iq_0x_0 + i\vec{q}\vec{x}} + \phi^{(-)}\left(\vec{q}\right)e^{iq_0x_0 + i\vec{q}\vec{x}}\right] d\vec{q} = \\ &= \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x). \end{aligned} \qquad (2.3.5)$$

Слагаемые $\phi^{(+)}$ и $\phi^{(-)}$ называют положительно и отрицательно частотными. В разложении (2.3.5) было учтено наличие двух решений уравнения Клейна–Гордона с положительной и отрицательной энергиями $\pm q_0$, где $q_0 = \sqrt{\vec{q}^{\,2} + m^2}$. Легко убедиться, что разложение (2.3.5) удовлетворяют уравнению (2.3.1). Сделав во втором члене замену $\vec{q}$ на $-\vec{q}$, можно переписать (2.3.5) в виде

$$\phi(x) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int \left[\phi^{(+)}\left(\vec{q}\right)e^{iqx} + \phi^{(-)}\left(-\vec{q}\right)e^{-iqx}\right] d\vec{q}\,, \qquad (2.3.6)$$

где $qx = \vec{q}\vec{x} - q_0x_0$. Заметим, что так как поле действительное, то $\phi^*(x) = \phi(x)$ и

$$\left(\phi^{(+)}\left(\vec{q}\right)\right)^* = \phi^{(-)}\left(-\vec{q}\right). \qquad (2.3.7)$$

Для подстановки в P_α нам нужны производные от (2.3.6):

$$\partial_k \phi = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int \left[iq_k\phi^{(+)}\left(\vec{q}\right)e^{iqx} - iq_k\phi^{(-)}\left(-\vec{q}\right)e^{-iqx}\right] d\vec{q}\,, \qquad (2.3.8)$$

$$\partial_0 \phi = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int \left[-iq_0\phi^{(+)}\left(\vec{q}\right)e^{iqx} + iq_0\phi^{(-)}\left(-\vec{q}\right)e^{-iqx}\right] d\vec{q}\,. \qquad (2.3.9)$$

Теперь выразим импульс и энергию через Фурье-образы полевых функций. Подставляя (2.3.8) и (2.3.9) в (2.3.4), получим

$$P_k = \iiint \frac{q_k' q_0}{(2\pi)^3}\left[\phi^{(+)}\left(\vec{q}\,'\right)\phi^{(-)}\left(-\vec{q}\right)e^{i(q'-q)x} - \phi^{(+)}\left(\vec{q}\,'\right)\phi^{(+)}\left(\vec{q}\right)e^{i(q'+q)x}\right] d\vec{q}\,' d\vec{q} d\vec{x} +$$

$$+\iiint \frac{q'_k q_0}{(2\pi)^3}\left[\phi^{(-)}(-\vec{q}')\phi^{(+)}(\vec{q})e^{-i(q'-q)x} - \phi^{(-)}(-\vec{q}')\phi^{(-)}(-\vec{q})e^{-i(q'+q)x}\right]d\vec{q}'d\vec{q}d\vec{x}. \quad (2.3.10)$$

Пользуясь интегральным представлением для функции Дирака

$$\delta(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{q}\vec{x}}d\vec{x}, \quad (2.3.11)$$

преобразуем (2.3.10) к виду

$$\begin{aligned} P_k &= \int q_k q_0\left[\phi^{(+)}(\vec{q})\phi^{(-)}(-\vec{q}) + \phi^{(-)}(-\vec{q})\phi^{(+)}(\vec{q})\right]d\vec{q} - \\ &-\int q_k q_0\left[\phi^{(+)}(-\vec{q})\phi^{(+)}(\vec{q})e^{-2ix_0q_0} + \phi^{(-)}(\vec{q})\phi^{(-)}(-\vec{q})e^{2ix_0q_0}\right]d\vec{q}. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Из (2.3.7) следует, что подынтегральная функция во втором слагаемом в (2.3.12) является нечётной функцией, а интеграл от нечётной функции в симметричных пределах равен нулю, поэтому окончательно получим

$$P_k = \int q_k q_0\left[\phi^{(+)}(\vec{q})\phi^{(-)}(-\vec{q}) + \phi^{(-)}(-\vec{q})\phi^{(+)}(\vec{q})\right]d\vec{q}. \quad (2.3.13)$$

Используя новые обозначения

$$\phi^{(+)}(\vec{q}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2q_0}}a^+(q), \qquad \phi^{(-)}(-\vec{q}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2q_0}}a(q), \quad (2.3.14)$$

перепишем (2.3.13) в виде

$$P_k = \frac{1}{2}\int q_k\left[a^+(q)a(q) + a(q)a^+(q)\right]d\vec{q}. \quad (2.3.15)$$

Аналогичным образом можно найти выражение для P_4:

$$P_4 = \frac{i}{2}\int q_0\left[a^+(q)a(q) + a(q)a^+(q)\right]d\vec{q}. \quad (2.3.16)$$

С учётом формулы $P_4 = iH$ получим гамильтониан поля

$$H = \frac{1}{2}\int q_0\left[a^+(q)a(q) + a(q)a^+(q)\right]d\vec{q}. \quad (2.3.17)$$

Функция $\phi(x)$, выраженная через переменные $a^{\pm}(q)$, имеет вид

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{1}{\sqrt{2q_0}}\left[a^+(q)e^{iqx} + a(q)e^{-iqx}\right]d\vec{q}. \quad (2.3.18)$$

Перейдём к квантовому полю. Для этого объявим $a^+(q)$ и $a(q)$ операторами и введём постулаты квантования, как коммутационные соотношения:

$$\left[a(q'), a^+(q)\right]_- = \delta(\vec{q} - \vec{q}'), \quad (2.3.19)$$

$$\left[a^+(q), a^+(q')\right]_- = \left[a(q), a(q')\right]_- = 0. \quad (2.3.20)$$

Из этих соотношений легко получить два полезных коммутатора:

$$\left[a(q), H\right]_- = q_0 a(q), \quad (2.3.21)$$

$$\left[a^+(q), H\right]_- = -q_0 a^+(q). \quad (2.3.22)$$

Эти два равенства связаны операцией эрмитова сопряжения, если операторы $a(q)$ и $a^+(q)$ эрмитово сопряжены друг другу (тогда и оператор H является эрмитовым).

Ясно, что

$$\left[a(q), P_\alpha\right]_- = q_\alpha a(q), \quad (2.3.23)$$

$$\left[a^+(q), P_\alpha\right]_- = -q_\alpha a^+(q), \quad (2.3.24)$$

где

$$P_\alpha = \frac{1}{2}\int q_\alpha\left[a^+(q)a(q) + a(q)a^+(q)\right]d\vec{q}. \quad (2.3.25)$$

Запишем уравнение на собственные значения гамильтониана H:

$$H\left|E\right\rangle = E\left|E\right\rangle. \quad (2.3.26)$$

Найдём физический смысл оператора $a^+(q)$ и $a(q)$. Подействуем гамильтонианом H на состояние $a(q)\left|E\right\rangle$:

$$Ha(q)\left|E\right\rangle = \left(a(q)H - \left[a(q), H\right]_-\right)\left|E\right\rangle = \left(E - q_0\right)a(q)\left|E\right\rangle. \quad (2.3.27)$$

Таким образом, действие оператора $a(q)$ на состояние $\left|E\right\rangle$ приводит к уменьшению значения энергии поля на q_0 (а четырехмерного импульса на q_α), поэтому $a(q)$ называют оператором уничтожения частицы.

Теперь рассмотрим действие $a^+(q)$ на состояние $\left|E\right\rangle$:

$$Ha^+(q)\left|E\right\rangle = \left(a^+(q)H - \left[a^+(q), H\right]_-\right)\left|E\right\rangle = \left(E + q_0\right)a^+(q)\left|E\right\rangle. \quad (2.3.28)$$

Таким образом, действие оператора $a^+(q)$ приводит к увеличению энергии состояния $\left|E\right\rangle$, a^+ поэтому его называют оператором рождения.

Теперь рассмотрим, как оператор рождения действует на сопряженный $\left|E\right\rangle$ вектор:

$$\left\langle E\right|a^+(q)H = \left\langle E\right|\left(Ha^+(q) + \left[a^+(q), H\right]_-\right) = \left\langle E\right|a^+(q)\left(E - q_0\right). \quad (2.3.29)$$

Сравнивая выражения (2.3.29) и (2.3.27), приходим к выводу, что операторы рождения и уничтожения сопряжены друг с другом, т.е. $(a^+(q))^\dagger = a(q)$.

Теперь докажем, что E – положительная величина. Для этого уравнение (2.3.26) умножим на вектор $\langle E|$ и из $\langle E|H|E\rangle = E\langle E|E\rangle$ получим

$$E = \frac{\langle E|H|E\rangle}{\langle E|E\rangle}. \tag{2.3.30}$$

Используя уравнение (2.3.17), получим

$$E = \frac{1}{2\langle E|E\rangle}\int q_0\left[\langle E|a^+(q)a(q)|E\rangle + \langle E|a(q)a^+(q)|E\rangle\right]d\vec{q}\,. \tag{2.3.31}$$

Пользуясь тем, что операторы рождения и уничтожения являются сопряженными, мы можем переписать (2.3.31) следующим образом:

$$E = \frac{1}{2\langle E|E\rangle}\int q_0\left[\left(a|E\rangle\right)^\dagger a|E\rangle + \left(a^+|E\rangle\right)^\dagger a^+|E\rangle\right]d\vec{q}\,.$$

Ясно, что $E \ge 0$ ($q_0 = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}$ определена как положительная величина): в квантовой теории энергия частиц принимает только неотрицательные значения. Как следствие, можно сделать вывод о том, что невозможно действовать на вектор $|E\rangle$ оператором уничтожения до бесконечности. Должен существовать вектор $|0\rangle$, называемый вакуумом, действие на который оператора уничтожения приводит к нулю:

$$a(q)|0\rangle = 0\,. \tag{2.3.32}$$

Вакууму соответствует минимальная энергия

$$E_{\min} = \frac{1}{2\langle 0|0\rangle}\int q_0\left[\langle 0|a^+(q)a(q)|0\rangle + \langle 0|a(q)a^+(q)|0\rangle\right]d\vec{q}\,,$$

которая должна быть равна нулю. Первый член в этом интеграле, действительно, равен нулю, а второй дает бесконечный вклад. Чтобы избавиться от этой нефизичной бесконечности, введём оператор нормального произведения N, действующий следующим образом:

$$N(aa^+) = a^+a, \quad N(a^+a) = a^+a\,. \tag{2.3.33}$$

Постулируем, что гамильтониан должен быть записан в «нормальной» форме, тогда

$$H = \int q_0 a^+(q)a(q)d\vec{q}, \quad P_k = \int q_k a^+(q)a(q)d\vec{q}\,. \tag{2.3.34}$$

В этом случае действие операторов H и P_k на вакуум будет давать ноль:

$$P_k|0\rangle = 0, \quad H|0\rangle = 0, \text{ т.е. } E_{\min} = 0\,.$$

От нулевого уровня энергии и импульса отчитываются все остальные уровни энергии, которые получаются действием оператора рождения.

Рассмотрим состояние с двумя частицами с импульсами $q_{1\alpha}$ и $q_{2\alpha}$. Это состояние можно получить, подействовав на вакуум операторами $a^+(q_{2\alpha})$ и $a^+(q_{1\alpha})$:

$$a^+(q_{2\alpha})a^+(q_{1\alpha})|0\rangle\,. \tag{2.3.35}$$

Теперь подействуем оператором импульса на (2.3.35):

$$P_\alpha a^+(q_{2\alpha})a^+(q_{1\alpha})|0\rangle = \left(\left[P_\alpha, a^+(q_{2\alpha})\right]_- + a^+(q_{2\alpha})P_\alpha\right)a^+(q_{1\alpha})|0\rangle =$$

$$= \left(\left[P_\alpha, a^+(q_{2\alpha})\right]_- a^+(q_{1\alpha}) + a^+(q_{2\alpha})\left[P_\alpha, a^+(q_{1\alpha})\right]_- + a^+(q_{2\alpha})a^+(q_{1\alpha})P_\alpha\right)|0\rangle\,,$$

т.е.

$$P_\alpha a^+(q_{2\alpha})a^+(q_{1\alpha})|0\rangle = \left(q_{1\alpha} + q_{2\alpha}\right)a^+(q_{2\alpha})a^+(q_{1\alpha})|0\rangle\,,$$

и $a^+(q_{2\alpha})a^+(q_{1\alpha})|0\rangle$ – состояние с двумя частицами с четырёхмерным импульсом $(q_{1\alpha} + q_{2\alpha})$. Аналогично, рассматривая состояние с n_1 частиц с импульсом q_1, n_2 частиц с импульсом $q_2, \ldots,$ n_k частиц с импульсом q_k, получим

$$\begin{aligned} &P_\alpha \underbrace{a^+(q_k)\ldots a^+(q_k)}_{n_k}\ldots\underbrace{a^+(q_1)\ldots a^+(q_1)}_{n_1}|0\rangle = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} n_i q_i\right)a^+(q_k)\ldots a^+(q_1)|0\rangle, \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

т.е. несколько частиц могут иметь одинаковый импульс. Это значит, что скалярные состояния подчиняются статистике Бозе.

2.4. Комплексные скалярные поля

Комплексное скалярное поле подчиняется уравнению Клейна–Гордона

$$\left(p^2 + m^2\right)\phi = 0\,. \tag{2.4.1}$$

Ему также будет удовлетворять ϕ^*, комплексно сопряжённая полевая функция

$$\left(p^2 + m^2\right)\phi^* = 0\,. \tag{2.4.2}$$

Легко проверить, что лагранжиан, из которого с помощью уравнения Лагранжа–Эйлера можно получить (2.4.1) и (2.4.2), для комплексных полей можно выбрать в виде

$$L = -\partial_\alpha \phi^* \partial_\alpha \phi - m^2 \phi^* \phi \, . \qquad (2.4.3)$$

Теперь мы можем записать тензор энергии-импульса поля

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \partial_\beta \phi + \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\beta \phi^*\right)} \partial_\beta \phi^* - L\delta_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \phi^* \partial_\beta \phi - \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi^* - L\delta_{\alpha\beta} \, .$$

Далее найдём импульс

$$P_k = i\int T_{4k} d\vec{x} = -\int \left(\partial_k \phi^* \partial_0 \phi + \partial_k \phi \partial_0 \phi^*\right) d\vec{x} \qquad (2.4.4)$$

и энергию поля

$$P_4 = iH = i\int T_{44} d\vec{x} = i\int \left(\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial_k \phi^* \partial_k \phi + m^2 \phi^* \phi\right) d\vec{x} \, . \qquad (2.4.5)$$

Поле комплексное, поэтому вектор плотности тока не равен нулю:

$$j_\alpha = -ie\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \phi - \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\alpha \phi^*\right)} \phi^*\right] = ie\left[\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\alpha} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \phi^*\right]. \qquad (2.4.6)$$

Заряд поля равен

$$Q = -i\int j_4 d\vec{x} = -ie\int \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial x_0} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial x_0} \phi^*\right] d\vec{x} \, . \qquad (2.4.7)$$

По аналогии с действительным полем решение уравнения Клейна–Гордона для комплексного поля представим через его Фурье-образы

$$\phi(x) = \int N_q \left[a(q) e^{iqx} + a(-q) e^{-iqx}\right] d\vec{q} \, , \qquad (2.4.8)$$

$$\phi^*(x) = \int N_q \left[a^*(q) e^{-iqx} + a^*(-q) e^{iqx}\right] d\vec{q} \, , \qquad (2.4.9)$$

где $qx = \vec{q}\vec{x} - q_0 x_0$, $q_0 = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}$, $N_q = 1/\sqrt{(2\pi)^3 2q_0}$. Подставляя (2.4.8) и (2.4.9) в (2.4.4), (2.4.5) и (2.4.7), после преобразований, аналогичных проделанным в предыдущем разделе, получим

$$P_k = \int q_k \left[a^*(q) a(q) + a^*(-q) a(-q)\right] d\vec{q} \, , \qquad (2.4.10)$$

$$P_4 = i\int q_0 \left[a^*(q) a(q) + a^*(-q) a(-q)\right] d\vec{q} \, , \qquad (2.4.11)$$

$$Q = e\int \left[a^*(q) a(q) - a^*(-q) a(-q)\right] d\vec{q} \, . \qquad (2.4.12)$$

После переобозначений $a^*(q) \to a^+(q)$, $a^*(-q) \to b^+(q)$, $a(-q) \to b(q)$ эти выражения можно записать как

$$P_k = \int q_k \left[a^+(q) a(q) + b^+(q) b(q)\right] d\vec{q} \, , \qquad (2.4.13)$$

$$P_4 = i\int q_0 \left[a^+(q) a(q) + b^+(q) b(q)\right] d\vec{q} \, , \qquad (2.4.14)$$

$$Q = e\int \left[a^+(q) a(q) - b^+(q) b(q)\right] d\vec{q} \, . \qquad (2.4.15)$$

Так как $P_4 = iH$, то гамильтониан

$$H = \int q_0 \left[a^+(q) a(q) + b^+(q) b(q)\right] d\vec{q} \, . \qquad (2.4.16)$$

При переходе к квантовой теории будем считать, что a, b, a^+, b^+ – операторы и постулируем коммутационные соотношения:

$$\left[a(q), a^+(q')\right]_- = \left[b(q), b^+(q')\right]_- = \delta(\vec{q} - \vec{q}') \, , \qquad (2.4.17)$$

$$\begin{aligned} \left[a(q), a(q')\right]_- &= \left[a^+(q), a^+(q')\right]_- = 0, \\ \left[b(q), b(q')\right]_- &= \left[b^+(q), b^+(q')\right]_- = 0, \end{aligned} \qquad (2.4.18)$$

$$\begin{aligned} \left[a(q), b(q')\right]_- &= \left[a^+(q), b^+(q')\right]_- = 0, \\ \left[b(q), a(q')\right]_- &= \left[b^+(q), a^+(q')\right]_- = 0. \end{aligned} \qquad (2.4.19)$$

Пользуясь постулатами квантования (2.4.17), (2.4.18) и (2.4.19), несложно получить необходимые для дальнейших вычислений коммутаторы

$$\begin{aligned} \left[a^+, P_\alpha\right]_- &= -q_\alpha a^+, \quad \left[b^+, P_\alpha\right]_- = -q_\alpha b^+, \\ \left[a^+, Q\right]_- &= -ea^+, \quad \left[b^+, Q\right]_- = eb^+, \end{aligned} \qquad (2.4.20)$$

$$\begin{aligned} \left[a, P_\alpha\right]_- &= q_\alpha a, \quad \left[b, P_\alpha\right]_- = q_\alpha b, \\ \left[a, Q\right]_- &= ea, \quad \left[b, Q\right]_- = -eb. \end{aligned} \qquad (2.4.21)$$

Докажем первое соотношение:

$$\begin{aligned} \left[a^+, P_\alpha\right]_- &= \int q_\alpha a^+(q) \left(a^+(q') a(q') + b^+(q') b(q')\right) d\vec{q}' - \\ &- \int q_\alpha \left(a^+(q') a(q') + b^+(q') b(q')\right) a^+(q) d\vec{q}' = \\ &= \int q_\alpha \delta(\vec{q} - \vec{q}') a^+(q') d\vec{q}' = -q_\alpha a^+ \end{aligned}$$

Аналогично доказываются все остальные коммутационные соотношения.

Операторы заряда, импульса и энергии коммутируют и обладают общей системой собственных функций. Постулируем существование вектора вакуума $|0\rangle$, обладающего свойствами:

$$H|0\rangle = P_k|0\rangle = Q|0\rangle = 0 \, ,$$

для чего необходимо выполнение условий

$$a|0\rangle = b|0\rangle = 0\,. \qquad (2.4.22)$$

Вектор $|0\rangle$ соответствует состоянию, в котором частицы отсутствуют. Теперь найдём результат действия оператора a^+ на состояние $|0\rangle$:

$$P_\alpha a^+|0\rangle = \left[P_\alpha, a^+\right]_-|0\rangle + a^+P_\alpha|0\rangle = q_\alpha a^+|0\rangle + 0 = q_\alpha a^+|0\rangle, \qquad (2.4.23)$$

$$Qa^+|0\rangle = \left[Q, a^+\right]_-|0\rangle + a^+Q|0\rangle = ea^+|0\rangle + 0 = ea^+|0\rangle\,. \qquad (2.4.24)$$

Таким образом, действие оператора a^+ приводит к появлению частицы с энергией q_0, зарядом e и импульсом q_k, т.е. a^+ – оператор рождения частицы. Теперь найдём результат действия оператора b^+ на состояние $|0\rangle$:

$$P_\alpha b^+|0\rangle = \left[P_\alpha, b^+\right]_-|0\rangle + b^+P_\alpha|0\rangle = q_\alpha b^+|0\rangle + 0 = q_\alpha b^+|0\rangle, \qquad (2.4.25)$$

$$Qb^+|0\rangle = \left[Q, b^+\right]_-|0\rangle + b^+Q|0\rangle = -eb^+|0\rangle + 0 = -eb^+|0\rangle\,. \qquad (2.4.26)$$

Таким образом, действие оператора b^+ приводит к появлению античастицы с энергией q_0, зарядом $-e$ и импульсом q_k, т.е. b^+ – оператор рождения античастиц. Действие операторов a и b сводится к уничтожению соответствующих частиц, и они являются операторами уничтожения частиц и античастиц соответственно. Легко построить состояние с несколькими частицами. Например, состояние $a^+(q_{1\alpha})b^+(q_{2\alpha})|0\rangle$ имеет четырёхмерный импульс $q_{1\alpha}+q_{2\alpha}$ и заряд $Q=0$. Ещё раз подчеркнём, что энергия как частиц, так и античастиц в квантовой теории поля положительны.

2.5. Спинорные поля

В теории поля $\psi(x)$ и $\bar\psi(x)$ рассматриваются не как волновые функции частиц, а как полевые функции, удовлетворяющие уравнению Дирака:

$$\left(\gamma_\alpha\partial_\alpha + m\right)\psi = 0\,, \qquad (2.5.1)$$

$$\left(\partial_\alpha\bar\psi\right)\gamma_\alpha - m\bar\psi = 0\,. \qquad (2.5.2)$$

Эти уравнения можно получить из функции Лагранжа, записанной следующим образом:

$$L = -\bar\psi\left(\gamma_\alpha\partial_\alpha + m\right)\psi \qquad (2.5.3)$$

(это выражение не равно нулю, как может показаться из (2.5.1), так как в (2.5.3) поля варьируются).

Найдём тензор энергии импульса:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\alpha\psi\right)}\partial_\beta\psi + \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\alpha\bar\psi\right)}\partial_\beta\bar\psi - L\delta_{\alpha\beta} = -\bar\psi\gamma_\alpha\partial_\beta\psi \qquad (2.5.4)$$

(в правой части положено $L=0$, так как на этом этапе поле ψ уже «физическое» и описывается уравнением (2.5.5)). Отсюда найдём импульс поля

$$P_\alpha = i\int T_{4\alpha}d\vec x = -i\int\bar\psi\gamma_4\partial_\alpha\psi d\vec x \qquad (2.5.6)$$

и гамильтониан

$$H = -iP_4 = i\int\bar\psi\gamma_4\partial_0\psi d\vec x \qquad (2.5.7)$$

(напомним, что $\partial_4 = -i\partial_0$).

Найдём плотность тока:

$$j_\alpha = -ie\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\alpha\psi\right)}\psi - \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\alpha\bar\psi\right)}\bar\psi\right] = ie\bar\psi\gamma_\alpha\psi\,. \qquad (2.5.8)$$

Такой же результат для j_α мы получили при выводе уравнения Дирака. Из (2.5.8) получим заряд:

$$Q = e\int\bar\psi\gamma_4\psi d\vec x = e\int|\psi|^2 d\vec x\,. \qquad (2.5.9)$$

В главе 1 были получены базисные решения уравнения Дирака:

$$u_+^r = N_+\begin{pmatrix}\varphi^r\\ \dfrac{\sigma_k p_k c}{mc+p_0}\varphi^r\end{pmatrix}, \quad u_-^r = N_-\begin{pmatrix}-\dfrac{\sigma_k p_k c}{p_0+mc}\chi^r\\ \chi^r\end{pmatrix}. \qquad (2.5.10)$$

Разложим полевую функцию по этим базисным решениям:

$$\psi(x) = \sum_{r=\pm1}\int N_p\left[c_r^{(+)}(\vec p)u_+^r(\vec p)e^{i(\vec p\vec x - p_0x_0)} + c_r^{(-)}(\vec p)u_-^r(\vec p)e^{i(\vec p\vec x + p_0x_0)}\right]d\vec p\,, \qquad (2.5.11)$$

где $c_r^{(\pm)}(\vec p)$ – Фурье-коэффициенты, а $N_p = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\dfrac{1}{\sqrt{2p_0}}$. Сделаем замену $\vec p\to-\vec p$ во втором слагаемом и введём упрощённые обозначения

$$\begin{aligned} &u_+^r(\vec p) = u^r(p), \quad u_-^r(-\vec p) = u^r(-p),\\ &c_r^{(+)}(\vec p) = c_r(p), \quad c_r^{(-)}(-\vec p) = c_r(-p). \end{aligned} \qquad (2.5.12)$$

В результате получим следующее выражение для $\psi(x)$:

$$\psi(x)=\sum_{r=\pm1}\int N_p\left[c_r(p)u^r(p)e^{ipx}+c_r(-p)u^r(-p)e^{-ipx}\right]d\vec{p}=\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x)\,. \tag{2.5.13}$$

Для сопряженной функции разложение имеет вид

$$\bar{\psi}(x)=\sum_{r=\pm1}\int N_p\left[c_r^*(p)\bar{u}^r(p)e^{-ipx}+c_r^*(-p)\bar{u}^r(-p)e^{ipx}\right]d\vec{p}=\bar{\psi}^{(-)}(x)+\bar{\psi}^{(+)}(x). \tag{2.5.14}$$

Подставляя (2.5.13) и (2.5.14) в (2.5.9), (2.5.6) и (2.5.7), с учетом соотношений ортогональности (1.11.10)-(1.11.13) получим выражения для заряда:

$$Q=e\sum_{r=\pm1}\int\left[c_r^*(p)c_r(p)+c_r^*(-p)c_r(-p)\right]d\vec{p}\,, \tag{2.5.15}$$

для гамильтониана:

$$H=\sum_{r=\pm1}\int p_0\left[c_r^*(p)c_r(p)-c_r^*(-p)c_r(-p)\right]d\vec{p}\,, \tag{2.5.16}$$

для импульса:

$$P_k=\sum_{r=\pm1}\int p_k\left[c_r^*(p)c_r(p)-c_r^*(-p)c_r(-p)\right]d\vec{p}\,. \tag{2.5.17}$$

Покажем, как получается, например, (2.5.16). После подстановки (2.5.13) и (2.5.14) в (2.5.7) получим для гамильтониана:

$$\begin{aligned}H&=i\int\bar{\psi}^{(+)}\gamma_4\partial_0\psi^{(+)}d\vec{x}+i\int\bar{\psi}^{(-)}\gamma_4\partial_0\psi^{(+)}d\vec{x}+\\&+i\int\bar{\psi}^{(-)}\gamma_4\partial_0\psi^{(-)}d\vec{x}+i\int\bar{\psi}^{(+)}\gamma_4\partial_0\psi^{(-)}d\vec{x}.\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

Первое слагаемое,

$$s_1=i\int\bar{\psi}^{(+)}\gamma_4\partial_0\psi^{(+)}d\vec{x}=i\sum_{r,r'}\int d\vec{x}\int N_{p'}c_{r'}^*(-p')\bar{u}^r(-p')e^{ip'x}d\vec{p}'\gamma_4\cdot$$

$$\cdot\int N_pc_r(p)u^r(p)(-ip_0)e^{ipx}d\vec{p},$$

равно нулю, что является следствием (1.11.13). Аналогично доказывается равенство нулю третьего слагаемого. Рассмотрим второе слагаемое:

$$\begin{aligned}s_2&=i\int\bar{\psi}^{(-)}\gamma_4\partial_0\psi^{(+)}d\vec{x}=\\&=\sum_{r,r'}\int d\vec{x}\int N_{p'}c_{r'}^*(p')\bar{u}^{r'}(p')e^{-ip'x}d\vec{p}'\gamma_4\int N_pc_r(p)u^r(p)p_0e^{ipx}d\vec{p}=\\&=\sum_{r,r'}\int d\vec{p}d\vec{p}'\left[\int d\vec{x}e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{x}}\right]N_{p'}N_pc_{r'}^*(p')\bar{u}^{r'}(p')\gamma_4c_r(p)u^r(p)e^{i(p_0-p_0')x_0}\,p_0=\\&=(2\pi)^3\int d\vec{p}N_p^2c_{r'}^*(p)\underbrace{\bar{u}^{r'}(p)\gamma_4u^r(p)}_{2p_0\delta_{rr'}}c_r(p)p_0.\end{aligned}$$

Пользуясь (1.11.10), получим

$$s_2=\int d\vec{p}c_r^*(p)c_r(p)p_0\,.$$

Аналогично получается четвёртое слагаемое.

Явная несообразность в формулах (2.5.15), (2.5.16) и (2.5.17) состоит в том, что гамильтониан неположителен, а заряд имеет один знак. Перейдём к квантовой теории поля, в которой будет описан способ разрешить это противоречие. В квантовой теории поля $c_r^*(p)$, $c_r(p)$, $c_r(-p)$ и $c_r^*(-p)$, а значит, и $\psi(\vec{x},t)$, являются операторами.

Запишем уравнение Гейзенберга для $\psi(\vec{x},t)$:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial x_0}=\left[\psi,H\right]_-\,. \tag{2.5.19}$$

Подставим в это уравнение (2.5.13):

$$\begin{aligned}&i\sum_{r=\pm1}\int N_p\left[-ip_0c_r(p)u^r(p)e^{ipx}+ip_0c_r(-p)u^r(-p)e^{-ipx}\right]d\vec{p}=\\&=\sum_{r=\pm1}\int N_p\left[\left[c_r(p),H\right]_-u^r(p)e^{ipx}+\left[c_r(-p),H\right]_-u^r(-p)e^{-ipx}\right]d\vec{p}.\end{aligned}$$

Коэффициенты при одинаковых экспонентах должны совпадать, что будет выполнено при

$$\left[c_r(p),H\right]_-=p_0c_r(p),\quad\left[c_r(-p),H\right]_-=-p_0c_r(-p)\,. \tag{2.5.20}$$

То же самое можно повторить для $\bar{\psi}(x)$, и в результате мы получим ещё два коммутационных соотношения:

$$\left[c_r^*(p),H\right]_-=-p_0c_r^*(p),\quad\left[c_r^*(-p),H\right]_-=p_0c_r^*(-p)\,. \tag{2.5.21}$$

Из этих коммутационных соотношений можно заключить, что $c_r^*(p)$ и $c_r(-p)$ являются операторами рождения, а $c_r^*(-p)$ и $c_r(p)$ являются операторами уничтожения. Обозначим $c_r(-p)$ как $d_r^+(p)$, $c_r^*(-p)$ как $d_r(p)$, а $c_r^*(p)$ как $c_r^+(p)$. После таких переобозначений полевые функции примут вид

$$\psi(x)=\sum_{r=\pm1}\int N_p\left[c_r(p)u^r(p)e^{ipx}+d_r^+(p)u^r(-p)e^{-ipx}\right]d\vec{p}=\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x), \tag{2.5.22}$$

$$\bar{\psi}(x)=\sum_{r=\pm1}\int N_p\left[c_r^+(\bar{p})\bar{u}^r(p)e^{-ipx}+d_r(p)\bar{u}^r(-p)e^{ipx}\right]d\vec{p}=\bar{\psi}^{(-)}(x)+\bar{\psi}^{(+)}(x). \tag{2.5.23}$$

Теперь мы можем ввести вакуумное состояние как состояние, действие на которое операторов уничтожения даёт ноль:

$$c_r(p)\left|0\right\rangle=0,\quad d_r(p)\left|0\right\rangle=0\,. \tag{2.5.24}$$

Для спинорных полей должен выполняться принцип Паули. Ввести его можно с помощью антикоммутационных соотношений

$$\left[c_r(p), c_{r'}(p')\right]_+ = 0, \quad \left[c_r^+(p), c_{r'}^+(p')\right]_+ = 0. \qquad (2.5.25)$$

Для доказательства этого утверждения подействуем на вакуум двумя операторами рождения:

$$c_r^{\ +}(p)c_{r'}^{\ +}(p')\left|0\right\rangle. \qquad (2.5.26)$$

Из соотношений (2.5.25) следует, что $c_r^{\ +}(p)c_{r'}^{\ +}(p') = -c_{r'}^{\ +}(p')c_r^{\ +}(p)$, тогда

$$c_r^{\ +}(p)c_{r'}^{\ +}(p')\left|0\right\rangle = -c_{r'}^{\ +}(p')c_r^{\ +}(p)\left|0\right\rangle. \qquad (2.5.27)$$

Если $r = r'$ и $p = p'$, то две частицы находятся в одном состоянии, как следует из приведённого выше уравнения, такое состояния невозможно:

$$c_r^{\ +}(p)c_r^{\ +}(p)\left|0\right\rangle = -c_r^{\ +}(p)c_r^{\ +}(p)\left|0\right\rangle = 0. \qquad (2.5.28)$$

Заменив p на $-p$ и p' на $-p'$ в антикоммутационных соотношениях (2.5.25), приходим ещё к двум соотношениям:

$$\left[d_r(p), d_{r'}(p')\right]_+ = 0, \quad \left[d_r^+(p), d_{r'}^+(p')\right]_+ = 0. \qquad (2.5.29)$$

Если в (2.5.29) заменить p' на $-p'$, то получаются ещё два антикоммутационных соотношения:

$$\left[c_r(p), d_{r'}(p')\right]_+ = 0, \quad \left[c_r^+(p), d_{r'}^+(p')\right]_+ = 0. \qquad (2.5.30)$$

Найдём ещё одно антикоммутационное соотношение. Для этого подставим в первый коммутатор (2.5.20) гамильтониан, выраженный через операторы рождения и уничтожения:

$$\left[c_{r'}(p'), \sum_{r=\pm1}\int p_0\left[c_r^+(p)c_r(p) - d_r(p)d_r^+(p)\right]d\vec{p}\right]_- = p_0' c_{r'}(p').$$

Вычисляя его, получим

$$\sum_{r=\pm1}\int p_0\left[c_{r'}(p')c_r^+(p)c_r(p) - c_r^+(p)c_r(p)c_{r'}(p') - \right.$$

$$\left. - c_{r'}(p')d_r(p)d_r^+(p) + d_r(p)d_r^+(p)c_{r'}(p')\right]d\vec{p} = p_0' c_{r'}(p').$$

С помощью равенств (2.5.25) и (2.5.30) несложно доказать, что третье и четвёртое слагаемые в сумме дают ноль, тогда

$$\sum_{r=\pm1}\int p_0\left[c_{r'}(p')c_r^+(p)c_r(p) - c_r^+(p)c_r(p)c_{r'}(p')\right]d\vec{p} = p_0' c_{r'}(p').$$

Во втором слагаемом, пользуясь антикоммутационными соотношениями, поменяем местами $c_r(p)$ и $c_{r'}(p')$:

$$\sum_{r=\pm1}\int p_0\left[c_{r'}(p')c_r^+(p)c_r(p) + c_r^+(p)c_{r'}(p')c_r(p)\right]d\vec{p} = p_0' c_{r'}(p'),$$

т.е.

$$\sum_{r=\pm1}\int\left[\left[c_{r'}(p'), c_r^+(p)\right]_+ c_r(p)p_0\right]d\vec{p} = p_0' c_{r'}(p').$$

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы

$$\left[c_{r'}(p'), c_r^+(p)\right]_+ = \delta_{rr'}\delta(\vec{p} - \vec{p}'). \qquad (2.5.31)$$

Если провести аналогичные выкладки с $\left[c_r(-p), H\right]_- = -p_0 c_r(-p)$, получим ещё один антикоммутатор:

$$\left[d_r(p), d_{r'}^+(p')\right]_+ = \delta_{rr'}\delta\left(\vec{p} - \vec{p}'\right). \qquad (2.5.32)$$

Объединим полученные для спинорных полей антикоммутационные соотношения:

$$\left[d_r(p), d_{r'}(p')\right]_+ = 0, \quad \left[d_r^+(p), d_{r'}^+(p')\right]_+ = 0, \qquad (2.5.33)$$

$$\left[c_r(p), d_{r'}(p')\right]_+ = 0, \quad \left[c_r^+(p), d_{r'}^+(p')\right]_+ = 0, \qquad (2.5.34)$$

$$\begin{aligned}\left[c_{r'}(p'), c_r^+(p)\right]_+ &= \delta_{rr'}\delta(\vec{p} - \vec{p}'),\\ \left[d_r(p), d_{r'}^+(p')\right]_+ &= \delta_{rr'}\delta\left(\vec{p} - \vec{p}'\right).\end{aligned} \qquad (2.5.35)$$

Чтобы сделать энергию (2.5.16) положительно определённой, а заряд (2.5.15)– могущим иметь произвольный знак, введём оператор нормального произведения, ставящий оператор рождения перед оператором уничтожения:

$$N\left(c_r(p)c_{r'}(p')\right) = c_r(p)c_{r'}(p'),$$

$$N\left(c_r(p)c_{r'}^+(p')\right) = -c_{r'}^+(p')c_r(p), \quad N\left(d_r(p)d_{r'}^+(p')\right) = -d_{r'}^+(p')d_r(p),$$

$$N\left(c_{r'}^+(p')c_r(p)\right) = c_{r'}^+(p')c_r(p), \quad N\left(d_r(p)d_{r'}(p')\right) = d_r(p)d_{r'}(p'). \qquad (2.5.36)$$

В отличие от оператора нормального произведения для скалярных полей, для спинорных знак меняется при перестановке операторов. Запишем заряд, гамильтониан и импульс в «нормальной» форме:

$$Q = \sum_{r=\pm1}\int e\left[c_r^+(p)c_r(p) - d_r^+(p)d_r(p)\right]d\vec{p}, \qquad (2.5.37)$$

$$H = \sum_{r=\pm1}\int p_0\left[c_r^+(p)c_r(p) + d_r^+(p)d_r(p)\right]d\vec{p}, \qquad (2.5.38)$$

$$P_k = \sum_{r=\pm1}\int p_k\left[c_r^+(p)c_r(p) + d_r^+(p)d_r(p)\right]d\vec{p}. \qquad (2.5.39)$$

Найдём коммутатор

$$\left[Q, c_r^+(p)\right]_- = e\sum_{r=\pm1}\int\left[c_{r'}^+(p')c_{r'}(p')c_r^+(p) - d_{r'}^+(p')d_{r'}(p')c_r^+(p) - \right.$$
$$\left. - c_r^+(p)c_{r'}^+(p')c_{r'}(p') + c_r^+(p)d_{r'}^+(p')d_{r'}(p')\right]d\vec{p}.$$

Используя антикоммутационные соотношения, это выражение можно привести к виду

$$\left[Q, c_r^+(p)\right]_- = e\sum_{r=\pm1}\int\left[c_{r'}^+(p')c_{r'}(p')c_r^+(p) - c_r^+(p)c_{r'}^+(p')c_{r'}(p')\right]d\vec{p}.$$

Переставим $c_r^+(p)$ и $c_{r'}^+(p')$ во втором слагаемом:

$$\left[Q, c_r^+(p)\right]_- = e\sum_{r=\pm1}\int\left[c_{r'}^+(p')c_{r'}(p')c_r^+(p) + c_{r'}^+(p')c_r^+(p)c_{r'}(p')\right]d\vec{p}.$$

Выделяя антикоммутатор $\left[c_{r'}^+(p'), c_{r'}(p')\right]_+$, а затем подставляя его значение $\delta_{rr'}\delta(\vec{p}-\vec{p}')$ и проводя интегрирование и суммирование, получим

$$\left[Q, c_r^+(p)\right]_- = e\sum_{r=\pm1}\int\left(c_{r'}^+(p')\left[c_{r'}(p'), c_r^+(p)\right]_+\right)d\vec{p} = ec_r^+(p). \quad (2.5.40)$$

Несложно найти ещё два коммутационных соотношения:

$$\left[Q, d_r^+(p)\right]_- = -ed_r^+(p), \quad \left[P_\alpha, c_r^+(p)\right]_- = p_\alpha c_r^+(p). \quad (2.5.41)$$

Используя все эти коммутационные соотношения, как и для скалярного поля, легко продемонстрировать, что $c_r^+(p_\alpha)$, действуя на вакуум, рождает частицу с четырёхмерным импульсом p_α и зарядом e, а $d_r^+(p_\alpha)$ – рождает античастицу с четырёхмерным импульсом p_α и с зарядом $-e$.

Вектор спина

$$S_i = \frac{1}{2}e_{ikl}S_{kl} = \frac{1}{2}\int\psi^\dagger\,\Sigma_i\psi d\vec{x}\text{, где } \Sigma_i = \begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_i\end{pmatrix}. \quad (2.5.42)$$

Подставив в выражение для S_i полевые функции (2.5.13) и (2.5.14), подействовав оператором спиральности $\vec{S}\vec{n}$ на ψ и учтя, что $(\vec{\Sigma}\vec{n})u_\pm^r = ru_\pm^r$, можно найти

$$\vec{S}\vec{n} = \sum_{r=\pm1}\frac{r}{2}\int\left[c_r^+(p)c_r(p) + d_r^+(p)d_r(p)\right]d\vec{p}. \quad (2.5.43)$$

Теперь найдём коммутатор оператора спиральности с $c_r^+(p)$:

$$\left[\vec{S}\vec{n}, c_r^+(p)\right]_- = \frac{1}{2}rc_r^+(p) \quad (2.5.44)$$

и с $d_r^+(p)$:

$$\left[\vec{S}\vec{n}, d_r^+(p)\right]_- = \frac{1}{2}rd_r^+(p). \quad (2.5.45)$$

Действие $\vec{S}\vec{n}$ на вакуум $|0\rangle$ даёт ноль:

$$\vec{S}\vec{n}|0\rangle = 0. \quad (2.5.46)$$

Теперь подействуем $\vec{S}\vec{n}$ на состояние $c_r^+(p)|0\rangle$

$$\vec{S}\vec{n}c_r^+(p)|0\rangle = \left[\vec{S}\vec{n}, c_r^+(p)\right]_-|0\rangle + c_r^+(p)\vec{S}\vec{n}|0\rangle = \frac{1}{2}rc_r^+(p)|0\rangle \quad (2.5.47)$$

и $d_r^+(p)|0\rangle$:

$$\vec{S}\vec{n}d_r^+(p)|0\rangle = \left[\vec{S}\vec{n}, d_r^+(p)\right]_-|0\rangle + d_r^+(p)\vec{S}\vec{n}|0\rangle = \frac{1}{2}rd_r^+(p)|0\rangle. \quad (2.5.48)$$

Следовательно, состояние $c_r^+(p)|0\rangle$ описывает частицу с четырёхмерным импульсом p_α, зарядом e и спиральностью $r/2$, а состояние $d_r^+(p)|0\rangle$ описывает античастицу с четырёхмерным импульсом p_α, зарядом $-e$ и спиральностью $r/2$.

2.6. Электромагнитное поле

Система уравнений Максвелла, описывающая электромагнитное поле без зарядов и токов, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{H} &= \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{H} = 0,\\ \mathrm{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{E} = 0. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Напряжённости электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей выражаются через векторный $\vec{A}$ и скалярный Φ потенциалы по правилу

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}. \quad (2.6.2)$$

В терминах потенциалов поля систему уравнений Максвелла можно переписать через тензор электромагнитного поля,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad (2.6.3)$$

в виде

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0, \tag{2.6.4}$$

где $A_\mu = \left(\vec{A}, i\Phi\right)$. Из двух последних уравнений получаем

$$\partial_\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A_\mu = 0. \tag{2.6.5}$$

Используя условие Лоренца $\partial_\mu A_\mu = 0$, преобразуем (2.6.5) к виду

$$\partial^2_\mu A_\nu = 0 \text{ или } \Box A_\nu = 0. \tag{2.6.6}$$

Условие Лоренца возможно, так как тензор электромагнитного поля определен неоднозначно и инвариантен по отношению к замене

$$A'_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x_\mu}, \tag{2.6.7}$$

где $f(x)$ - произвольная функция. В частности, функцию $f(x)$ можно выбрать таким образом, что $A_4(x) = 0$, тогда условие Лоренца сводится к $\operatorname{div} A(x) = 0$.

Таким образом, уравнения поля и условие Лоренца образуют систему уравнений

$$\begin{cases} \Box A_\mu = 0 \\ \partial_\mu A_\mu = 0. \end{cases} \tag{2.6.8}$$

Уравнение Даламбера $\Box A_\mu = 0$ по сути является частным случаем уравнения Клейна–Гордона $\left(\Box + m^2\right) A_\mu = 0$ при $m = 0$ (масса покоя фотона равна нулю) для четырёхкомпонентного поля. Уравнению Клейна–Гордона удовлетворяют решения, отвечающие как положительным, так и отрицательным энергиям,

$$A^{(+)}_\mu(x) = e_\mu e^{ikx}, \tag{2.6.9}$$

$$A^{(-)}_\mu(x) = e_\mu e^{-ikx}. \tag{2.6.10}$$

В (2.6.9) и (2.6.10) e_μ – вектор поляризации, конкретный вид которого будет определён в дальнейшем. Применим условие Лоренца к $A^{(\pm)}_\mu$:

$$\partial_\mu A^{(\pm)}_\mu = 0 \text{ или } ik_\mu e_\mu = 0, \text{ т.е. } \vec{e}\vec{k} - e_0 k_0 = 0. \tag{2.6.11}$$

На потенциал мы можем наложить ещё одно скалярное условие. К примеру, воспользовавшись кулоновской калибровкой $\Phi = 0$, получим $\vec{e}\vec{k} = 0$, что соответствует поперечности электромагнитной волны.

Построим классическую теорию поля для электромагнитных волн. Для этого нам необходимо подобрать такую функцию Лагранжа,

чтобы, используя уравнения Лагранжа–Эйлера, можно было получить уравнение Даламбера. Легко проверить, что её можно взять в виде

$$L = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{2.6.12}$$

Запишем общие уравнения для тензора энергии-импульса, четырёхмерного импульса и тока:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\alpha A_\mu\right)} \partial_\beta A_\mu - \delta_{\alpha\beta} L,$$

$$P_\beta = i \int T_{4\beta} d\vec{x},$$

$$j_\alpha = -ie \left[\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\alpha A_\mu\right)} A_\mu - \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\alpha A^\dagger_\mu\right)} A^\dagger_\mu \right].$$

Подставляя (2.6.12) в эти выражения, находим

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \partial_\nu A_\mu \partial_\nu A_\mu - \partial_\alpha A_\mu \partial_\beta A_\mu, \tag{2.6.13}$$

$$P_\beta = -i \int \partial_4 A_\mu \partial_\beta A_\mu d\vec{x}, \tag{2.6.14}$$

$$H = -iP_4 = \int \partial_4 A_\mu \partial_4 A_\mu d\vec{x}, \tag{2.6.15}$$

$$P_4 = i \int T_{44} d\vec{x} = i \int \left[\partial_0 \phi \partial_0 \phi - L\right] d\vec{x} = \frac{i}{2} \int \left[\left(\partial_0 \phi\right)^2 + \left(\nabla \phi\right)^2\right] d\vec{x}, \tag{2.6.16}$$

$$j_\alpha = 0. \tag{2.6.17}$$

Представим четырёхмерный потенциал как суперпозицию плоских волн:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2k_0}} \left[A^{(+)}_\mu(\vec{k}) e^{ikx} + A^{(-)}_\mu(-\vec{k}) e^{-ikx} \right]. \tag{2.6.18}$$

В этом выражении $k_0 = \left|\vec{k}\right|$, так как $m = 0$. Выберем направление $\vec{k}$ вдоль оси z, тогда

$$k_\mu = \left(0, 0, k_0, ik_0\right),\ k^2 = 0. \tag{2.6.19}$$

Пусть индекс λ нумерует поляризацию $\lambda = 1, 2, 3, 4$. Четырёхмерные векторы поляризации (они нужны для релятивистского описания) можно выбрать как

$$e^{\lambda=1}_\mu = \left(1, 0, 0, 0\right), \quad e^{\lambda=2}_\mu = \left(0, 1, 0, 0\right), \tag{2.6.20}$$

$$e^{\lambda=3}_\mu = \left(0, 0, 1, 0\right), \quad e^{\lambda=4}_\mu = \left(0, 0, 0, i\right). \tag{2.6.21}$$

Между ними выполняется соотношение

$$e_\mu^\lambda e_\mu^{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}\eta_\lambda\ , \qquad (2.6.22)$$

где $\eta_\lambda = 1$ для $\lambda = 1,2,3$ и $\eta_\lambda = -1$ для $\lambda = 4$. Из (2.6.22) следует равенство

$$\sum_{\lambda=1}^{4} e_\mu^\lambda e_\nu^\lambda \eta_\lambda = \delta_{\mu\nu}\ . \qquad (2.6.23)$$

Запишем скалярные произведения векторов поляризации и волнового вектора:

$$e_\mu^{\lambda=1}k_\mu = 0,\quad e_\mu^{\lambda=2}k_\mu = 0,\quad e_\mu^{\lambda=3}k_\mu = k_0,\quad e_\mu^{\lambda=4}k_\mu = -k_0\ . \qquad (2.6.24)$$

Теперь разложим амплитуды $A_\mu^{(+)}(\vec{k})$ и $A_\mu^{(-)}(\vec{k})$ по базисным векторам e_μ^λ:

$$A_\mu^{(+)}(\vec{k}) = \sum_{\lambda=1}^{4} a_\lambda(k) e_\mu^\lambda,\quad A_\mu^{(-)}(-\vec{k}) = \sum_{\lambda=1}^{4} a_\lambda(-k) e_\mu^\lambda\ . \qquad (2.6.25)$$

Коэффициенты разложения $a_\lambda(k)$ и $a_\lambda(-k)$ – проекции амплитуд $A_\mu^{(+)}(\vec{k})$ и $A_\mu^{(-)}(-\vec{k})$ на пространственные и временное направления. Подставим эти разложения в выражения для $A_\mu(x)$:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^{4} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2k_0}} e_\mu^\lambda \left[a_\lambda(k) e^{ikx} + a_\lambda(-k) e^{-ikx} \right] = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x)\ . \qquad (2.6.26)$$

Заметим, что $A_\mu^* = A_\mu \eta_\mu = \left(\vec{A}, -A_4\right)$, так как $A_4^* = (i\Phi)^* = -i\Phi$, а также $\left(e_\mu^\lambda\right)^* = e_\mu^\lambda \eta_\lambda$ (в этих формулах нет сумм по повторяющимся индексам). Учитывая это, находим, что

$$A_\mu^* = A_\mu \eta_\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^{4} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2k_0}} \eta_\mu e_\mu^\lambda \left[a_\lambda^*(k) e^{-ikx} + a_\lambda^*(-k) e^{ikx} \right] . \qquad (2.6.27)$$

Сравнивая это выражение с выражением для A_μ, получим для коэффициентов

$$a_\lambda^*(k) = a_\lambda(-k)\ . \qquad (2.6.28)$$

Используя условие Лоренца, получим

$$\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^{4} e_\mu^\lambda k_\mu \left[a_\lambda(k) e^{ikx} - a_\lambda^*(k) e^{-ikx} \right] = 0\ . \qquad (2.6.29)$$

В силу того, что экспоненты независимы, приравняем коэффициенты при них нулю:

$$\sum_{\lambda=1}^{4} e_\mu^\lambda k_\mu a_\lambda(k) = k_0 a_3(k) - k_0 a_4(k) = 0\ ,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{4} e_\mu^\lambda k_\mu a_\lambda^*(k) = k_0 a_3^*(k) - k_0 a_4^*(k) = 0\ .$$

В результате получим, что

$$a_3(k) = a_4(k)\ . \qquad (2.6.30)$$

Теперь подставим разложения $A_\mu(x)$ в формулы для H и P_k, после чего получим следующие выражения для энергии и импульса классического электромагнитного поля:

$$H = \int \sum_{\lambda=1}^{4} a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) \eta_\lambda k_0 d\vec{k}\ , \qquad (2.6.31)$$

$$P_k = \int \sum_{\lambda=1}^{4} a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) \eta_\lambda k_k d\vec{k}\ . \qquad (2.6.32)$$

Покажем, например, как получается (2.6.32):

$$P_k = -\int \frac{d\vec{x}}{(2\pi)^3} \int\int \frac{k_k k_0'}{\sqrt{4k_0 k_0'}} \sum_\lambda \sum_{\lambda'} e_\mu^\lambda e_\mu^{\lambda'} \left[a_\lambda(k) e^{ikx} - a_\lambda(-k) e^{-ikx} \right] \cdot$$
$$\cdot \left[a_{\lambda'}(k') e^{ik'x} - a_{\lambda'}(-k') e^{-ik'x} \right] d\vec{k} d\vec{k}'.$$

Пользуясь (2.6.22), получим

$$P_k = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} \int\int \frac{k_k k_0'}{\sqrt{4k_0 k_0'}} \sum_\lambda \eta_\lambda \left[a_\lambda(k) e^{ikx} - a_\lambda(-k) e^{-ikx} \right] \cdot$$
$$\cdot \left[a_\lambda(k') e^{ik'x} - a_\lambda(-k') e^{-ik'x} \right] d\vec{k} d\vec{k}'.$$

Раскрывая скобки, выделяя δ - функции и интегрируя по $d\vec{k}'$, приведём предыдущее выражение к виду

$$P_k = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} \int\int \frac{k_k}{2} \sum_\lambda \eta_\lambda \left[a_\lambda(k) a_\lambda(-k) + a_\lambda(-k) a_\lambda(k) \right] d\vec{k}\ .$$

Из равенства $a_\lambda^*(-k) = a_\lambda(k)$ следует, что

$$P_k = \int \sum_{\lambda=1}^{4} a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) \eta_\lambda k_k d\vec{k}\ .$$

Если учесть, что условие Лоренца привело к $a_3(k) = a_4(k)$, получим

$$H = \int \sum_{\lambda=1}^{2} a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) k_0 d\vec{k} \ge 0\ , \qquad (2.6.33)$$

$$P_k = \int \sum_{\lambda=1}^{2} a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) k_k d\vec{k}\ . \qquad (2.6.34)$$

Таким образом, вклад в наблюдаемые величины вносят только поперечные компоненты, как и должно быть для электромагнитного поля.

Перейдём к квантовой теории поля. Для этого заменим a_λ a_λ^* на операторы. Таким образом,

$$A_\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda=1}^{4}\int\frac{d\vec{k}e_\mu^\lambda}{\sqrt{2k_0}}\left[a_\lambda(k)e^{ikx}+a_\lambda^+(k)e^{-ikx}\right] = A_\mu^{(+)}(x)+A_\mu^{(-)}(x)\,. \tag{2.6.35}$$

Постулируем коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered}\left[a_\lambda(k),a_{\lambda'}^+(k')\right]_- = \delta(\vec{k}-\vec{k}')\delta_{\lambda\lambda'}\eta_\lambda,\\ \left[a_\lambda^+(k),a_{\lambda'}^+(k')\right]_- = 0,\quad \left[a_\lambda(k),a_{\lambda'}(k')\right]_- = 0\end{gathered} \tag{2.6.36}$$

(суммирование по λ отсутствует).

Пользуясь этими коммутационными соотношениями, несложно получить коммутаторы:

$$\begin{gathered}\left[a_\lambda(k),H\right] = k_0 a_\lambda(k),\qquad \left[a_\lambda(k),P_i\right] = k_i a_\lambda(k),\\ \left[a_\lambda^+(k),H\right] = -k_0 a_\lambda^+(k),\quad \left[a_\lambda^+(k),P_i\right] = -k_i a_\lambda^+(k).\end{gathered} \tag{2.6.37}$$

Продольную и временную компоненты можно исключить из P_k применяя условие Лоренца, но в отличии от классической теории поля, записанное для средних значений, т.е. в виде

$$\langle\varphi|\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}|\varphi\rangle = 0\,, \tag{2.6.38}$$

где $|\varphi\rangle$ – некоторое состояние. Подставляя в (2.6.38) $A_\mu(x)$ из (2.6.35), получим

$$\langle\varphi|\sum_{\lambda=1}^{4}\int\frac{d\vec{k}}{\sqrt{2k_0}}k_\mu e_\mu^\lambda\left[a_\lambda(k)e^{ikx}-a_\lambda^+(k)e^{-ikx}\right]|\varphi\rangle = 0\,.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при экспонентах, получаем

$$\begin{aligned}0 &= \langle\varphi|\sum_{\lambda=1}^{4}k_\mu e_\mu^\lambda a_\lambda(k)|\varphi\rangle = \\ &= \langle\varphi|e_\mu^1 k_\mu a_1(k)+e_\mu^2 k_\mu a_2(k)+e_\mu^3 k_\mu a_3(k)+e_\mu^4 k_\mu a_4(k)|\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Для k вдоль оси z, $k_\mu = (0,0,k_0,ik_0)$ и соотношение, записанное выше, примет вид

$$\langle\varphi|k_0 a_3(k)-k_0 a_4(k)|\varphi\rangle = 0\,,\ \text{т.е.}\ \langle\varphi|a_3(k)|\varphi\rangle = \langle\varphi|a_4(k)|\varphi\rangle. \tag{2.6.39}$$

Учитывая (2.6.39), найдём среднее для четырёхмерного импульса

$$\begin{aligned}\langle\varphi|P_\alpha|\varphi\rangle &= \langle\varphi|\int\sum_{\lambda=1}^{4}a_\lambda^+(k)a_\lambda(k)\eta_\lambda k_\alpha d\vec{k}|\varphi\rangle = \\ &= \int\left(\langle\varphi|\sum_{\lambda=1}^{2}a_\lambda^+(k)a_\lambda(k)k_\alpha|\varphi\rangle+\langle\varphi|\left(a_3^+(k)a_3(k)-a_4^+(k)a_4(k)\right)k_\alpha|\varphi\rangle\right)d\vec{k}.\end{aligned}$$

В результате получим

$$\langle\varphi|P_\alpha|\varphi\rangle = \int\langle\varphi|\sum_{\lambda=1}^{2}a_\lambda^+(k)a_\lambda(k)k_\alpha|\varphi\rangle d\vec{k}\,,$$

или

$$\langle H\rangle = \int\langle\varphi|\sum_{\lambda=1}^{2}a_\lambda^+(k)a_\lambda(k)k_0|\varphi\rangle d\vec{k}\,,$$

$$\langle P_k\rangle = \int\langle\varphi|\sum_{\lambda=1}^{2}a_\lambda^+(k)a_\lambda(k)k_k|\varphi\rangle d\vec{k}\,.$$

Таким образом, вклад в наблюдаемые величины дают только поперечные компоненты. Операторы $a_{1,2}(k)$ и $a_{1,2}^+(k)$ можно интерпретировать как операторы уничтожения и рождения физических (поперечных) фотонов. Для вакуумного состояния

$$a_{\lambda=1}(k)|0\rangle = 0\,,\ a_{\lambda=2}(k)|0\rangle = 0\,, \tag{2.6.40}$$

однако,

$$a_{\lambda=3}(k)|0\rangle \neq 0\,,\ a_{\lambda=4}(k)|0\rangle \neq 0\,. \tag{2.6.41}$$

Несмотря на (2.6.41), вклад нефизических фотонов в вакуумное состояние (и любое другое) равен нулю, так как $\langle 0|a_3^+a_3-a_4^+a_4|0\rangle$.

Используя оператор числа частиц $N_\lambda(k) = a_\lambda^+(k)a_\lambda(k)$, получим

$$\langle H\rangle = \int\langle\varphi|\sum_{\lambda=1}^{2}N_\lambda(k)k_0|\varphi\rangle d\vec{k} = \int\sum_{\lambda=1}^{2}\langle\varphi|N_\lambda(k)|\varphi\rangle k_0 d\vec{k}\,.$$

Обозначив собственные значения H через E, собственные значения оператора $N_\lambda(k)$ через $n_\lambda(k)$, получим

$$E = \int\sum_{\lambda=1}^{2}n_\lambda(k)k_0 d\vec{k}\,.$$

Это выражение показывает, что электромагнитные волны можно интерпретировать как частицы (фотоны). Они не имеют заряда и являются одновременно как частицей, так и античастицей. По этой причине они могут рождаться и исчезать поодиночке.

3.Феймановские диаграммы

3.1.Представление взаимодействий

В представлении Шредингера состояние системы задаётся функцией состояния, подчиняющейся уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi^s(t) = \left(H_0 + H_{\text{int}}\right)\Phi^s(t), \qquad (3.1.1)$$

где для удобства гамильтониан разделён на две части: H_0 – часть гамильтониана, не описывающая взаимодействие частиц или полей, H_{int} – включающая их взаимодействие.

Составим матричный элемент некоторого не зависящего от времени оператора O:

$$O(t) = \left\langle \Phi_i^s(t) \middle| \mathrm{O} \middle| \Phi_j^s(t) \right\rangle, \qquad (3.1.2)$$

Возьмём некоторый унитарный оператор V (унитарность означает, что $VV^\dagger = I$) и перепишем (3.1.2) в виде

$$O(t) = \left\langle \Phi_i^s(t) \middle| V^\dagger V \mathrm{O} V^\dagger V \middle| \Phi_j^s(t) \right\rangle = \left\langle \Phi_i(t) \middle| \mathrm{O}(t) \middle| \Phi_j(t) \right\rangle,$$

где

$$\left|\Phi(t)\right\rangle = V^\dagger(t)\left|\Phi^s(t)\right\rangle, \ \mathrm{O}(t) = V(t)\mathrm{O}V^\dagger(t). \qquad (3.1.3)$$

Выберем $V(t)$ в виде

$$V(t) = \exp\left(iHt\right), \qquad (3.1.4)$$

где $H = H_0 + H_{\text{int}}$ – полный гамильтониан. Для такого оператора $V(t)$

$$i\frac{\partial\left|\Phi(t)\right\rangle}{\partial t} = -H\exp(iHt)\left|\Phi^s(t)\right\rangle + \exp(iHt)i\frac{\partial\left|\Phi^s(t)\right\rangle}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, $\left|\Phi\right\rangle$ не зависит от времени. Теперь найдём, как изменяется во времени оператор $\mathrm{O}(t)$:

$$i\frac{\partial \mathrm{O}(t)}{\partial t} = -H\exp(iHt)\mathrm{O}\exp(-iHt) + \exp(iHt)\mathrm{O}\exp(-iHt)H = \left[\mathrm{O}(t), H\right]_-.$$

Мы получили уравнение Гейзенберга, описывающее эволюцию оператора $\mathrm{O}(t)$:

$$i\hbar\frac{\partial \mathrm{O}(t)}{\partial t} = \left[\mathrm{O}(t), H\right]_-. \qquad (3.1.5)$$

Таким образом, в представлении Гейзенберга вектор состояния не изменяется со временем, а оператор подчиняется уравнению (3.1.5).

Введём представление взаимодействий. Для этого унитарный оператор $V(t)$ выберем в виде

$$V(t) = \exp\left(iH_0 t\right).$$

Найдём, как эволюционирует вектор состояния $\left|\Phi(t)\right\rangle$:

$$i\frac{\partial\left|\Phi(t)\right\rangle}{\partial t} = -H_0\exp(iH_0 t)\left|\Phi^s(t)\right\rangle + \exp(iH_0 t)i\frac{\partial\left|\Phi^s(t)\right\rangle}{\partial t}.$$

Используя уравнение (3.1.1), подставим $\dfrac{\partial\left|\Phi^s(t)\right\rangle}{\partial t}$ в полученное уравнение, тогда

$$i\frac{\partial\left|\Phi(t)\right\rangle}{\partial t} = H_{\text{int}}\exp(iH_0 t)\left|\Phi^s(t)\right\rangle = H_{\text{int}}\left|\Phi^s(t)\right\rangle.$$

Для оператора $\mathrm{O}(t)$

$$i\frac{\partial \mathrm{O}(t)}{\partial t} = \left[\mathrm{O}(t), H_0\right]_-. \qquad (3.1.6)$$

Таким образом, мы получаем уравнения, описывающие эволюцию состояний квантовой системы в представлении взаимодействия:

$$i\hbar\frac{\partial\left|\Phi(t)\right\rangle}{\partial t} = H_{\text{int}}\left|\Phi(t)\right\rangle, \qquad (3.1.7)$$

$$i\hbar\frac{\partial \mathrm{O}(t)}{\partial t} = \left[\mathrm{O}(t), H_0\right]_-. \qquad (3.1.8)$$

Это представление очень удобно для приближённого решения задач квантовой физики. Когда частица свободна, взаимодействие отсутствует, представление взаимодействия совпадает с представлением Гейзенберга. «Включая» взаимодействие, мы не изменяем уравнения для операторов и можем использовать полученные раньше решения для свободных полей. Важно, что при этом коммутационные соотношения остаются теми же, что и для свободных полей. Это следует из того, что они могут быть получены из уравнения (2.5.19), которое в представлении взаимодействия описывает функции поля как для свободных, так и для взаимодействующих полей.

3.2. Матрица рассеяния

Для дальнейшего построения теории введём оператор эволюции $U(t,t_0)$, который связывает вектор состояний в определённый момент времени с вектором состояния в более поздний момент времени:

$$\left|\Phi(t)\right\rangle = U(t,t_0)\left|\Phi(t_0)\right\rangle .$$

За взаимодействием элментарных частиц, происходящим за чрезвычайно короткое время и на малых расстояниях, мы наблюдаем, например с помощью реакций рассеняия, на очень больших расстояниях и за большие времена. Поэтому, как правило, мы не можем проследить за деталями взаимодействия, следующими из знания матрицы $U(t,t_0)$, и определяем результат взаимодействия соответственно постановке задачи рассеяния в квантовой механики $t\to\infty$ и $t\to-\infty$. В соответствии с этим фундаментальную роль играет S-матрица, оператор $S=U(\infty,-\infty)$, который, связывает состояния при $t=\infty$ и $t=-\infty$:

$$\left|\Phi(\infty)\right\rangle = S\left|\Phi(-\infty)\right\rangle . \qquad (3.2.1)$$

Частицы в начальный и конечный моменты времени рассматриваются как свободные.

Запишем дифференциальное уравнение (3.1.7) в виде интегрального:

$$\left|\Phi(t)\right\rangle = \left|\Phi(t_0)\right\rangle - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_{\text{int}}\left|\Phi(t_1)\right\rangle \qquad (3.2.2)$$

и будем его решать методом итераций. Для этого подставим в уравнение (3.2.2) вместо $\left|\Phi(t_1)\right\rangle$ выражение для $\left|\Phi(t)\right\rangle$, взятое из того же уравнения (3.2.2):

$$\left|\Phi(t)\right\rangle = \left|\Phi(t_0)\right\rangle - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_{\text{int}}(t_1)\left(\left|\Phi(t_0)\right\rangle - i\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\text{int}}(t_2)\left|\Phi(t_2)\right\rangle\right) =$$

$$= \left|\Phi(t_0)\right\rangle - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_{\text{int}}(t_1)\left|\Phi(t_0)\right\rangle + (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\text{int}}(t_1) H_{\text{int}}(t_2)\left|\Phi(t_2)\right\rangle .$$

Повторяя эту процедуру n раз, получим для $\left|\Phi(t)\right\rangle$

$$\left|\Phi(t)\right\rangle = \left[1 + (-i)\int_{t_0}^{t} dt_1 H_{\text{int}}(t_1) \ldots + \right.$$

$$\left. + (-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{\text{int}}(t_1)\ldots H_{\text{int}}(t_n)\right]\left|\Phi(t_n)\right\rangle .$$

Устремляя n к бесконечности, мы приведём эту формулу к виду

$$\left|\Phi(t)\right\rangle = U(t,t_0)\left|\Phi(t_0)\right\rangle , \qquad (3.2.3)$$

где

$$U(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 H_{\text{int}}(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\text{int}}(t_1) \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{\text{int}}(t_n) . \qquad (3.2.4)$$

Существенно, что гамильтонианы $H_{\text{int}}(t)$, взятые в разные моменты времени не коммутируют друг с другом, поскольку они составлены из операторов полей, взятых в разные моменты времени, которые не коммутируют между собой.

Несложно показать, что $U(t,t_0)$ – унитарная матрица $\left(UU^{\dagger}=1\right)$. Для доказательства этого подставим (3.2.3) в (3.1.7):

$$i\frac{\partial U(t,t_0)\left|\Phi(t_0)\right\rangle}{\partial t} = H_{\text{int}} U(t,t_0)\left|\Phi(t_0)\right\rangle ,$$

или

$$i\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} = H_{\text{int}} U(t,t_0) . \qquad (3.2.5)$$

Нам также понадобится эрмитово сопряжённое (3.2.5) уравнение

$$-i\frac{\partial U^{\dagger}(t,t_0)}{\partial t} = U^{\dagger}(t,t_0) H_{\text{int}} . \qquad (3.2.6)$$

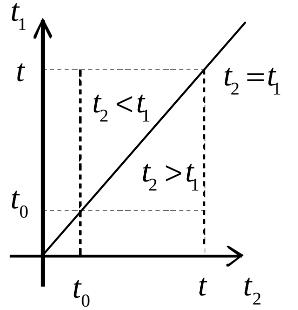

Рис. 1. Области интегрирования

Умножив уравнение (3.2.5) слева на $U^{\dagger}$, а уравнение (3.2.6) справа на U, а потом вычитая одно из другого, получим $i\partial\left(U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0)\right)/\partial t = 0$. Таким образом, произведение $U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0)$ не зависит от времени, но т.к. $U(t_0,t_0)=I$ – оператор тождественного преобразования, то и при произвольных t произведение $U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0)=I$.

Преобразуем интегралы в уравнении (3.2.4) так, чтобы они имели одинаковые пределы интегрирования. Рассмотрим частный случай, когда есть всего два интегрирования $(n = 2)$:

$$\tilde{N} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\text{int}}(t_1) H_{\text{int}}(t_2) . \qquad (3.2.7)$$

Множители в подинтегральной функции не коммутируют, т.к. они взяты в разные моменты времени. Интегрирование в (3.2.7) происходит по верхнему треугольнику на рис.1. Сменим порядок интегрирования:

$$\tilde{N} = \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_2}^{t} dt_1 H_{\text{int}}(t_1) H_{\text{int}}(t_2) . \qquad (3.2.8)$$

В (3.2.8) интегрирование по-прежнему идёт по верхнему треугольнику на рис.1. Теперь переобозначим t_1 и t_2:

$$\tilde{N} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2 H_{\text{int}}(t_2) H_{\text{int}}(t_1) . \qquad (3.2.9)$$

В (3.2.9) интегрирование уже идёт по нижнему треугольнику. Разделим (3.2.7) и (3.2.9) на 2, после чего полученные выражения сложим:

$$\tilde{N} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\text{int}}(t_1) H_{\text{int}}(t_2) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2 H_{\text{int}}(t_2) H_{\text{int}}(t_1) . \qquad (3.2.10)$$

Для перехода к интегрированию по всему квадрату на рис.1 нужно ввести хронологический оператор Дайсона

$$P\big(A(t_1)B(t_2)\big) = \begin{cases} A(t_1)B(t_2), & t_1 \ge t_2 \\ B(t_2)A(t_1), & t_1 \le t_2 \end{cases} , \qquad (3.2.11)$$

который расставляет сомножители в порядке убывания времени слева направо. Уравнение (3.2.10) с его помощью можно переписать в виде

$$\tilde{N} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 P(H_{\text{int}}(t_1) H_{\text{int}}(t_2)) , \qquad (3.2.12)$$

в котором интегрирование ведётся по всему квадрату. Пользуясь хронологическим оператором, $U(t, t_0)$ можно в общем случае привести к выражению

$$U(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n P(H_{\text{int}}(t_1) H_{\text{int}}(t_2) \ldots H_{\text{int}}(t_n)) . \qquad (3.2.13)$$

Как и в (3.2.11), хронологический оператор выстраивает произведение любого числа операторов так, чтобы временные аргументы убывали слева направо. Ряд U можно записать в виде выражения

$$U(t,t_0) = P\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} dt' H_{\text{int}}(t') \right) . \qquad (3.2.14)$$

Устремляя $t \to \infty$, а $t_0 \to -\infty$, получим для оператора S:

$$S = P\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty} dt' H_{\text{int}}(t') \right) . \qquad (3.2.15)$$

Выражая $H_{\text{int}}(t)$ через плотность гамильтониана взаимодействия $H_{\text{int}}(x)$:

$$H_{\text{int}}(t) = \int H_{\text{int}}(x) d\vec{x} , \qquad (3.2.16)$$

преобразуем (3.2.15) к виду (здесь $dx = d\vec{x}dt$)

$$S = P\exp\left(-i\int H_{\text{int}}(x) dx \right) . \qquad (3.2.17)$$

3.3. *Сечение рассеяния*

Знание S-матрицы позволяет определить вероятность перехода из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$. В самом деле, разложим состояние, получившееся в результате взаимодействия, по полной системе функций (в конечном состоянии)

$$S|i\rangle = \sum_f c_f |f\rangle . \qquad (3.3.1)$$

Очевидно, что коэффициенты разложения $c_f = \langle f|S|i\rangle$, причём $|c_f|^2$ есть вероятность найти систему в состоянии $|f\rangle$

$$W_{fi} = |\langle f|S|i\rangle|^2 . \qquad (3.3.2)$$

Матричные элементы $\langle f|S|i\rangle$ представим как

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle + \langle f|S - I|i\rangle . \qquad (3.3.3)$$

Второй член в (3.3.3) отвечает за переходы, связанные с взаимодействием, и с учётом сохранения энергии запишем его в виде

$$\langle f|S - I|i\rangle = (2\pi)^4 R_{if} \delta(p_f - p_i) , \qquad (3.3.4)$$

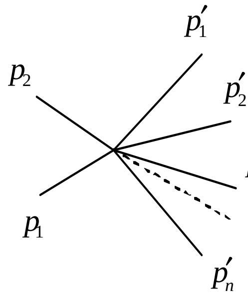

Рис. 2. Столкновение двух частиц

где $p_f = p'_1 + p'_2 + ... + p'_n$ – суммарный импульс конечных частиц, а $p_i = p_1 + p_2$ – импульс начальных частиц (для столкновения двух частиц). Вероятность перехода равна $dW_{if} = \left|\left\langle f\left|S - I\right|i\right\rangle\right|^2$. Вероятность того, что при этом конечные частицы будут иметь импульсы в интервале от p'_i до $p'_i + dp'_i$, где $i = 1, 2, ..., n$, задаётся выражением

$$dW_{if} = (2\pi)^4 \left|R_{if}\right|^2 \delta\left(p_f - p_i\right) \lim_{\substack{T\to\infty \\ V\to\infty}} \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-T/2}^{T/2} dx_0 \int_V d\vec{r} e^{i\left(p_f - p_i\right)x} \right) dp'_1 dp'_2 ... dp'_n . \quad (3.3.5)$$

Введём обозначение $d\Gamma = dp'_1 dp'_2 ... dp'_n$. Одну из дельта-функций мы записали, воспользовавшись её интегральным представлением

$$\delta\left(p_f - p_i\right) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ V\to\infty}} \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-T/2}^{T/2} dx_0 \int_V d\vec{r} e^{i\left(p_f - p_i\right)x} \right).$$

Так как интеграл в (3.3.5) умножается на $\delta\left(p_f - p_i\right)$, то экспоненту можно заменить на единицу. В результате после интегрирования получим

$$dW_{if} = \left|R_{if}\right|^2 \delta\left(p_f - p_i\right) \lim_{\substack{T\to\infty \\ V\to\infty}} \left[VT\right] d\Gamma . \quad (3.3.6)$$

Будем считать, что объём V и время T достаточно велики, но не бесконечны. В этом случае вероятность перехода за время T в объёме V можно вычислять по формуле

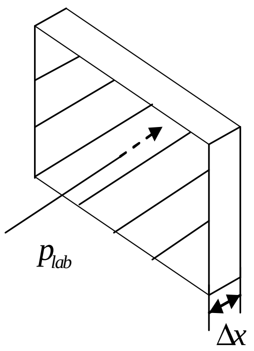

Рис. 3. Элементарный объём

$$dW_{if} = \left|R_{if}\right|^2 \delta\left(p_f - p_i\right) VT d\Gamma . \quad (3.3.7)$$

Отнесённая к единице объёма и времени вероятность равна

$$d\omega_{if} = \frac{dW_{if}}{VT} = \left|R_{if}\right|^2 \delta\left(p_f - p_i\right) d\Gamma . \quad (3.3.8)$$

Теперь получим выражение для дифференциального сечения рассеяния. В системе отсчёта, где частица-мишень покоится (лабораторная система), рассмотрим элементарный объём (рис. 3) с поперечным сечением ΔS и толщиной Δx. Будем считать, что скорость падаю-

щей частицы $\vec{v}_1^{lab}$ перпендикулярна площадке ΔS. Вероятность того, что падающая частица будет находиться в данном объёме в течение промежутка времени Δt, равна

$$\rho_1^{\text{lab}} v_1^{\text{lab}} \Delta S \Delta t , \quad (3.3.9)$$

где v_1^{lab} – скорость падающей частицы в лабораторной системе отсчёта, а ρ_1^{lab} – плотность вероятности обнаружения этой частицы в данном объёме.

Вероятность того, что падающая частица, попав в объём $\Delta S \Delta x$, столкнётся с частицей мишени, равна площади поперечного сечения частицы мишени σ_{if}, которая называется сечением рассеяния, делённой на ΔS и умноженной на вероятность обнаружить частицу в элементе объёма $\Delta S \Delta x$:

$$\frac{\sigma_{if}}{\Delta S}\left[\rho_2^{\text{lab}} \Delta S \Delta x\right]. \quad (3.3.10)$$

Таким образом, вероятность рассеяния в объёме $\Delta S \Delta x$ за время Δt будет

$$\rho_1^{\text{lab}} v_1^{\text{lab}} \Delta S \Delta t \frac{\sigma_{if}}{\Delta S}\left[\rho_2^{\text{lab}} \Delta S \Delta x\right]. \quad (3.3.11)$$

С другой стороны, вероятность (3.3.11) должна быть равна $d\omega_{if} \Delta S \Delta x \Delta t$, т.е.

$$\rho_1^{\text{lab}} v_1^{\text{lab}} \Delta S \Delta t \frac{\sigma_{if}}{\Delta S}\left[\rho_2^{\text{lab}} \Delta S \Delta x\right] = \left|R_{if}\right|^2 \delta\left(p_f - p_i\right) d\Gamma \Delta S \Delta x . \quad (3.3.12)$$

Выражая отсюда сечение рассеяния, получим

$$d\sigma_{if} = \frac{d\omega_{if}}{j} , \quad (3.3.13)$$

где поток

$$j = v_1^{\text{lab}} \rho_1^{\text{lab}} \rho_2^{\text{lab}} . \quad (3.3.14)$$

В произвольной системе отсчёта j имеет вид

$$j = \rho_1 \rho_2 \frac{\sqrt{\left(p_1 p_2\right)^2 - m_1^2 m_2^2}}{p_{10} p_{20}} , \quad (3.3.15)$$

где p_1 и p_2 – четырёхмерные импульсы сталкивающихся частиц, m_1 и m_2 – их массы; ρ_1 и ρ_1 связаны с четырёхмерными векторами потока $j^{(1)} = \left(\rho_1 \vec{v}_1, i\rho_1\right)$, $j^{(2)} = \left(\rho_2 \vec{v}_2, i\rho_2\right)$ следующим соотношением:

$$\rho_1^{\text{lab}}\rho_2^{\text{lab}} = -j_\alpha^{(1)} j_\alpha^{(2)} = -\rho_1\rho_2 \frac{p_1 p_2}{p_{10} p_{20}}. \qquad (3.3.16)$$

Также введём вероятность распада частицы за единицу времени в системе отсчёта, где частица покоится, как

$$d\Gamma_{if} = \frac{d\omega_{if}}{\rho}. \qquad (3.3.17)$$

3.4. Скалярные и электромагнитные поля: переход к нормальному произведению, свёртки

Рассмотрим скалярные действительные поля и найдём связь между хронологическим и нормальным произведением. Напомним решение уравнения Клейна–Гордона (для простоты рассмотрим действительное поле):

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{q}}{\sqrt{2q_0}} \left[a(q)e^{iqx} + a^+(q)e^{-iqx} \right] = \phi^{(+)} + \phi^{(-)}.$$

$\phi^{(+)}(x)$ содержит оператор уничтожения, а $\phi^{(-)}(x)$ – оператор рождения. Покажем, что под знаком нормального произведения операторы скалярных полей можно переставлять:

$$N(\phi_1\phi_2) = N(\phi_2\phi_1). \qquad (3.4.1)$$

(В (3.4.1) использовано обозначение $\phi_1 = \phi(x_1)$ и $\phi_2 = \phi(x_2)$). Докажем (3.4.1):

$$N(\phi_1^{(+)}\phi_2^{(+)}) = \phi_1^{(+)}\phi_2^{(+)} = \phi_2^{(+)}\phi_1^{(+)} = N(\phi_2^{(+)}\phi_1^{(+)}),$$
$$N(\phi_1^{(-)}\phi_2^{(-)}) = \phi_2^{(-)}\phi_1^{(-)} = \phi_1^{(-)}\phi_2^{(-)} = N(\phi_2^{(-)}\phi_1^{(-)}).$$

Теперь запишем $\phi_1\phi_2$ как N-произведение:

$$\phi_1\phi_2 = N\left(\phi_1^{(+)}\phi_2^{(+)}\right) + N\left(\phi_1^{(-)}\phi_2^{(-)}\right) + N\left(\phi_1^{(-)}\phi_2^{(+)}\right) + \phi_1^{(+)}\phi_2^{(-)} =$$
$$= N\left(\phi_1^{(+)}\phi_2^{(+)}\right) + N\left(\phi_1^{(-)}\phi_2^{(-)}\right) + N\left(\phi_1^{(-)}\phi_2^{(+)}\right) + N\left(\phi_1^{(+)}\phi_2^{(-)}\right) + \left[\phi_1^{(+)}, \phi_2^{(-)}\right]_-,$$

т.е.

$$\phi_1\phi_2 = N(\phi_1\phi_2) + \left[\phi_1^{(+)}, \phi_2^{(-)}\right]_-. \qquad (3.4.2)$$

Найдём коммутатор:

$$\left[\phi^{(+)}(x_1), \phi^{(-)}(x_2)\right]_- = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int \frac{d\vec{q}\,d\vec{q}'}{\sqrt{4q_0 q_0'}} \left[a(q), a^+(q')\right] \exp\left(i(qx_1 - q'x_2)\right).$$

Так как $\left[a^+, a\right]_- = \delta(\vec{q} - \vec{q}')$, то

$$\left[\phi^{(+)}(x_1), \phi^{(-)}(x_2)\right]_- = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{q}}{2q_0} e^{iq(x_1 - x_2)}. \qquad (3.4.3)$$

В S-матрицу входят хронологические произведения, и в дальнейшем нам будет необходимо перейти от P-произведений к N-произведениям. Этот переход осуществляется следующим образом:

$$P(\phi(x_1)\phi(x_2)) = N\left(\phi(x_1)\phi(x_2)\right) + \dot{\phi}(x_1)\dot{\phi}(x_2), \qquad (3.4.4)$$

где $\dot{\phi}(x_1)\dot{\phi}(x_2)$ называется свёрткой операторов $\phi(x_1)$ и $\phi(x_2)$. Найдём её, используя предыдущие результаты:

$$P(\phi(x_1)\phi(x_2)) = \begin{cases} \phi(x_1)\phi(x_2) = N\left(\phi(x_1)\phi(x_2)\right) + \left[\phi^{(+)}(x_1), \phi^{(-)}(x_2)\right]_-, & t_1 > t_2 \\ \phi(x_2)\phi(x_1) = N\left(\phi(x_1)\phi(x_2)\right) + \left[\phi^{(+)}(x_2), \phi^{(-)}(x_1)\right]_-, & t_1 < t_2 \end{cases}$$
(3.4.5)

т.е.

$$\dot{\phi}(x_1)\dot{\phi}(x_2) = \begin{cases} t_1 > t_2, & \left[\phi^{(+)}(x_1), \phi^{(-)}(x_2)\right]_- \\ t_1 < t_2, & \left[\phi^{(+)}(x_2), \phi^{(-)}(x_1)\right]_-. \end{cases} \qquad (3.4.6)$$

Для того чтобы лучше понять смысл свёртки, рассмотрим вакуумное среднее выражения (3.4.4):

$$\langle 0 | P(\phi(x_1)\phi(x_2)) | 0 \rangle = \dot{\phi}(x_1)\dot{\phi}(x_2) \qquad (3.4.7)$$

(нормальное произведение, действуя на вакуум, даёт ноль). Отсюда, т.к. $\phi^{(+)}$ содержит оператор уничтожения, получим

$$\dot{\phi}(x_1)\dot{\phi}(x_2) = \begin{cases} t_1 > t_2, & \langle 0 | \left[\phi^{(+)}(x_1), \phi^{(-)}(x_2)\right]_- | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^{(+)}(x_1)\phi^{(-)}(x_2) | 0 \rangle \\ t_1 < t_2, & \langle 0 | \left[\phi^{(+)}(x_2), \phi^{(-)}(x_1)\right]_- | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^{(+)}(x_2)\phi^{(-)}(x_1) | 0 \rangle. \end{cases}$$
(3.4.8)

Правая часть равенства (3.4.8) может быть интерпретирована так: при $t_1 > t_2$ частица создаётся в точке x_2 и исчезает в точке x_1, а при $t_1 < t_2$ частица создаётся в точке x_1 и исчезает в точке x_2. Поэтому свёртка также называется функцией распространения, или пропагатором. Свёртка не содержит операторов (её называют также с-числом, чтобы отличить от обычных функций).

Используя (3.4.3), запишем свёртку через интегралы:

$$\overset{\bullet}{\phi}(x_1)\overset{\bullet}{\phi}(x_2) = \begin{cases} t_1 > t_2, \ \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int \dfrac{d\vec{q}}{2q_0}\exp\left[iq(x_1 - x_2)\right] \\ t_1 < t_2, \ \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int \dfrac{d\vec{q}}{2q_0}\exp\left[-iq(x_1 - x_2)\right]. \end{cases} \quad (3.4.9)$$

Эти выражения можно записать как аналитическую функцию (Ф. Дайсон):

$$\Delta(x_1 - x_2) = \overset{\bullet}{\phi}(x_1)\overset{\bullet}{\phi}(x_2) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\lim_{\varepsilon\to 0}\int dq\frac{\exp\left[iq(x_1 - x_2)\right]}{q^2 + m^2 - i\varepsilon}, \quad (3.4.10)$$

где $dq = d\vec{q}dq_0$, $q = (\vec{q}, iq_0)$ и $q^2 = \vec{q}^2 - q_0^2$.

Для доказательства идентичности (3.4.9) и (3.4.10) возьмём в (3.4.9) интеграл по в q_0. Подынтегральное выражение в (3.4.10) в комплексной плоскости q_0 имеет полюса в точках $q_{0(1,2)} = \pm\sqrt{\vec{q}^2 + m^2 - i\varepsilon}$. Бесконечно малая величина ε необходима только для того, чтобы правильно обходить эти полюса. Разложим $q_{0(1,2)}$ по ε:

$$q_{0(1,2)} = \pm\sqrt{\vec{q}^2 + m^2 - i\varepsilon} \approx \pm\sqrt{\vec{q}^2 + m^2}\left(1 - \frac{i\varepsilon}{2\left(\vec{q}^2 + m^2\right)}\right) = \pm\sqrt{\vec{q}^2 + m^2}\left(1 - i\varepsilon_1\right),$$

где $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2\left(\vec{q}^2 + m^2\right)}$. Если $t_1 - t_2 > 0$, то необходимо интегрировать по нижнему полукругу, как это показано на рис. 4: контур обходится против часовой стрелки, т.е. вычет в полюсе берётся со знаком плюс (согласно лемме Жордана). В этом случае интеграл по окружности бесконечного радиуса будет равен нулю, так как

$$e^{iqx} = e^{-iq_0x_0 + i\vec{q}\vec{x}} = e^{x_0\,\mathrm{Im}\,q_0}\cdot e^{i\left(-x_0\,\mathrm{Re}\,q_0 + \vec{q}\vec{x}\right)},$$

и для интеграла (3.4.10) получим

$$\Delta(x_1 - x_2) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d\vec{q}\oint\frac{e^{iq(x_1 - x_2)dq_0}}{(q_0 - q_{01})(q_0 - q_{02})} =$$

$$= -2\pi i \underset{\substack{q_0 = q_{01} = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}(1 - i\varepsilon_1)\\ \varepsilon_1\to 0}}{res}\left\{\frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{iq(x_1 - x_2)}d\vec{q}}{-(q_0 - q_{01})(q_0 - q_{02})}\right\} =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\frac{e^{i\vec{q}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}e^{-i(t_1 - t_2)\sqrt{\vec{q}^2 + m^2}}}{2\sqrt{\vec{q}^2 + m^2}} = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{iq(x_1 - x_2)}}{2q_0}d\vec{q}.$$

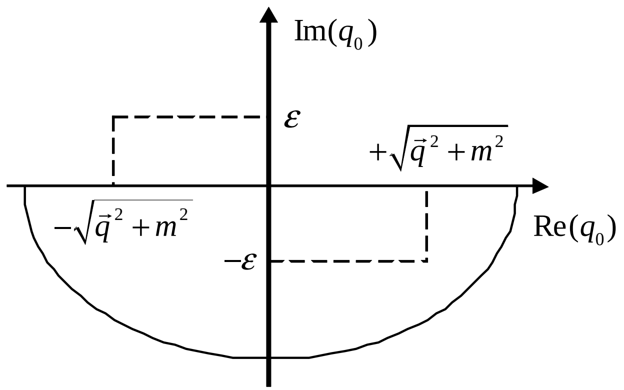

Рис. 4. Контур интегрирования в комлексной плоскости q_0

Теперь рассмотрим случай, когда $t_1 - t_2 < 0$. Интеграл по q_0 необходимо брать по верхнему полукругу, обходя по часовой стрелке полюс в точке q_{02} (т.е. вычет берётся со знаком минус):

$$\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d\vec{q}\oint dq_0\frac{e^{iq(x_1 - x_2)}}{(q_0 - q_{01})(q_0 - q_{02})} =$$

$$= 2\pi i \underset{\substack{q_0 = q_{02} = -\sqrt{\vec{q}^2 + m^2}(1 - i\varepsilon_1)\\ \varepsilon_1\to 0}}{res}\left\{\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d\vec{q}\frac{e^{iq(x_1 - x_2)}}{-(q_0 - q_{01})(q_0 - q_{02})}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\frac{e^{i\vec{q}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}e^{-i(t_1 - t_2)\sqrt{\vec{q}^2 + m^2}}}{2\sqrt{\vec{q}^2 + m^2}} = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{iq(x_1 - x_2)}}{2q_0}d\vec{q}.$$

Таким образом, мы показали, что свёртка может быть записана как аналитическая функция (3.4.10). Как это следует из (3.4.9), функция $\Delta(x)$ является чётной и $\overset{\bullet}{\phi}(x_1)\overset{\bullet}{\phi}(x_2) = \overset{\bullet}{\phi}(x_2)\overset{\bullet}{\phi}(x_1)$.

Все результаты, полученные в этом разделе для скалярных полей, справедливы и для электромагнитных полей. В случае электромагнитного поля масса частицы равна нулю и свёртка имеет вид

$$\overset{\bullet}{A}_\mu(x_1)\overset{\bullet}{A}_\nu(x_2) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\delta_{\mu\nu}\int dk\frac{\exp\left[ik(x_1 - x_2)\right]}{k^2 - i\varepsilon}, \ \varepsilon\to 0. \quad (3.4.11)$$

Формулу (3.4.11) можно получить используя (2.6.26) и (2.6.36) таким же образом, как и формулу (3.4.10). Отметим, что

$$\dot{A}_\mu(x_1)\dot{A}_\nu(x_2) = \dot{A}_\mu(x_2)\dot{A}_\nu(x_1). \qquad (3.4.12)$$

3.5. Спинорные поля: нормальное произведение и свёртка

Проведём аналогичные вычисления для спинорных полей. Общее решение уравнения Дирака имеет вид

$$\psi(x) = \sum_{r=\pm1}\int N_p\left[c_r(p)u^r(p)e^{ipx} + d_r^+(p)u^r(-p)e^{-ipx}\right]d\vec{p} = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}, \qquad (3.5.1)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r=\pm1}\int N_p\left[c_r^+(\vec{p})\bar{u}^r(p)e^{-ipx} + d_r(p)\bar{u}^r(-p)e^{ipx}\right]d\vec{p} = \bar{\psi}^{(-)} + \bar{\psi}^{(+)}, \qquad (3.5.2)$$

где $\psi^{(+)}(x)$, $\bar{\psi}^{(+)}(x)$ содержат операторы уничтожения, а $\psi^{(-)}(x)$, $\bar{\psi}^{(-)}(x)$ – операторы рождения. Тогда

$$N(\psi^{(+)}(x_1)\bar{\psi}^{(-)}(x_2)) = -\bar{\psi}^{(-)}(x_2)\psi^{(+)}(x_1) = -N(\bar{\psi}^{(-)}(x_2)\psi^{(+)}(x_1)),$$
$$N(\psi^{(-)}(x_1)\bar{\psi}^{(+)}(x_2)) = \psi^{(-)}(x_1)\bar{\psi}^{(+)}(x_2) = -N(\psi^{(+)}(x_2)\psi^{(-)}(x_1)),$$
$$N(\psi^{(+)}(x_1)\bar{\psi}^{(+)}(x_2)) = \psi^{(+)}(x_1)\bar{\psi}^{(+)}(x_2) = -N(\bar{\psi}^{(+)}(x_2)\psi^{(+)}(x_1)),$$
$$N(\psi^{(-)}(x_1)\bar{\psi}^{(-)}(x_2)) = \psi^{(-)}(x_1)\bar{\psi}^{(-)}(x_2) = -N(\bar{\psi}^{(-)}(x_2)\psi^{(-)}(x_1))$$

и, следовательно,

$$N(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)) = -N(\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1)), \qquad (3.5.3)$$

т.е. при каждой перестановке операторов Ферми под знаком нормального произведения появляется множитель -1.

Введём хронологическое T-произведение Вика, которое отличается от P-произведения тем, что для спинорных полей

$$T\left(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\right) = \begin{cases}\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2), & x_{10} > x_{20}\\ -\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1), & x_{20} > x_{10},\end{cases} \qquad (3.5.4)$$

а для скалярных P-произведение и T-произведение совпадают. В S-матрице P-произведение может быть заменено на T-произведение, так как в H_{int} операторы спинорных полей входят парами, ψ и $\bar{\psi}$.

Разложим T-произведения на нормальные произведения:

$$T\left(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\right) = \begin{cases}N\left(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\right) + \left[\psi^{(+)}(x_1),\bar{\psi}^{(-)}(x_2)\right]_+, & x_{10} > x_{20}\\ N\left(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\right) - \left[\bar{\psi}^{(+)}(x_1),\psi^{(-)}(x_2)\right]_+, & x_{20} > x_{10}\end{cases} \qquad (3.5.5)$$

Определяя свёртку спинорных операторов как

$$\dot{\psi}(x_1)\dot{\bar{\psi}}(x_2) = \begin{cases}\left[\psi^{(+)}(x_1),\bar{\psi}^{(-)}(x_2)\right]_+, & x_{10} > x_{20}\\ -\left[\bar{\psi}^{(+)}(x_2),\psi^{(-)}(x_1)\right]_+, & x_{20} > x_{10},\end{cases} \qquad (3.5.6)$$

перепишем (3.5.5) в виде

$$T\left(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\right) = N\left(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\right) + \dot{\psi}(x_1)\dot{\bar{\psi}}(x_2). \qquad (3.5.7)$$

Подставляя явные выражения для фермионных операторов (2.5.22) и (2.5.23) в (3.5.6) и используя перестановочные соотношения (2.5.33)–(2.5.35), получим

$$\left[\psi^{(+)}(x_1),\bar{\psi}^{(-)}(x_2)\right]_+ = \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_r\int\frac{1}{2p_0}u^r(p)\bar{u}^r(p)e^{ip(x_1-x_2)}d\vec{p}, \qquad (3.5.8)$$

$$\left[\bar{\psi}^{(+)}(x_2),\psi^{(-)}(x_1)\right]_+ = -\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_r\int\frac{1}{2p_0}u^r(-p)\bar{u}^r(-p)e^{-ip(x_1-x_2)}d\vec{p} \qquad (3.5.9)$$

и, расставляя спинорные индексы,

$$\dot{\psi}_\alpha(x_1)\dot{\bar{\psi}}_\beta(x_2) = \begin{cases}\dfrac{1}{(2\pi)^3}\sum_r\int\dfrac{1}{2p_0}u_\alpha^r(p)\bar{u}_\beta^r(p)e^{ip(x_1-x_2)}d\vec{p}, & x_{10} > x_{20}\\ -\dfrac{1}{(2\pi)^3}\sum_r\int\dfrac{1}{2p_0}u_\alpha^r(-p)\bar{u}_\beta^r(-p)e^{-ip(x_1-x_2)}d\vec{p}, & x_{20} > x_{10}.\end{cases} \qquad (3.5.10)$$

В (3.5.10) входят матрицы $\Lambda_{\alpha\beta}(p) = \sum_r u_\alpha^r(p)\bar{u}_\beta^r(p)$ и $\Lambda_{\alpha\beta}(-p) = \sum_r u_\alpha^r(-p)\bar{u}_\beta^r(-p)$. Используя (1.11.11) – (1.11.13), для этих матриц можно получить следующие свойства:

$$\Lambda_{\alpha\beta}(p)u_\beta^r(p) = 2mu_\alpha^r(p), \qquad (3.5.11)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}(p)u_\beta^r(-p) = 0, \qquad (3.5.12)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}(-p)u_\beta^r(-p) = 2mu_\alpha^r(-p), \qquad (3.5.13)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}(-p)u_\beta^r(p) = 0. \qquad (3.5.14)$$

Также выполняется соотношение

$$\frac{1}{2m}\Lambda_{\alpha\beta}(p) + \frac{1}{2m}\Lambda_{\alpha\beta}(-p) = 1, \qquad (3.5.15)$$

т.е. матрицы $\Lambda_{\alpha\beta}$ являются проектирующими операторами. Непосредственной проверкой можно убедиться, что равенства (3.5.11)–(3.5.14) выполняются, если

$$\Lambda_{\alpha\beta}(p) = -i\left(\hat{p}+im\right)_{\alpha\beta}, \tag{3.5.16}$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}(-p) = i\left(\hat{p}-im\right)_{\alpha\beta}. \tag{3.5.17}$$

В самом деле,

$$-i\left(\hat{p}+im\right)u(p) = -i\left(im+im\right)u(p) = 2mu(p), \tag{3.5.18}$$

$$-i\left(\hat{p}+im\right)u(-p) = -i\left(-im+im\right)u(-p) = 0. \tag{3.5.19}$$

Подставляя (3.5.16) и (3.5.17) в (3.5.10), получим

$$\dot{\psi}_\alpha(x_1)\dot{\bar{\psi}}_\beta(x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int \dfrac{1}{2p_0}\dfrac{\hat{p}+im}{i}e^{ip(x_1-x_2)}d\vec{p}, & x_{10} > x_{20} \\ \dfrac{-1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int \dfrac{1}{2p_0}\dfrac{\hat{p}-im}{i}e^{-ip(x_1-x_2)}d\vec{p}, & x_{20} > x_{10}, \end{cases}$$

или

$$\dot{\psi}_\alpha(x_1)\dot{\bar{\psi}}_\beta(x_2) = \begin{cases} \dfrac{-i}{(2\pi)^3}\left(-i\gamma_\mu\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}+im\right)_{\alpha\beta}\displaystyle\int \dfrac{1}{2p_0}e^{ip(x_1-x_2)}d\vec{p}, & x_{10} > x_{20} \\ \dfrac{-i}{(2\pi)^3}\left(-i\gamma_\mu\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}+im\right)_{\alpha\beta}\displaystyle\int \dfrac{1}{2p_0}e^{-ip(x_1-x_2)}d\vec{p}, & x_{20} > x_{10}. \end{cases} \tag{3.5.20}$$

Таким образом,

$$\dot{\psi}_\alpha(x_1)\dot{\bar{\psi}}_\beta(x_2) = -i\left(-i\gamma_\mu\partial_\mu + im\right)_{\alpha\beta}\Delta\left(x_1-x_2\right). \tag{3.5.21}$$

С учётом результатов предыдущего параграфа (3.5.21) можно представить в виде единой аналитической функции:

$$\dot{\psi}_\alpha(x_1)\dot{\bar{\psi}}_\beta(x_2) = -i\left(-i\gamma_\mu\partial_\mu + im\right)_{\alpha\beta}\frac{(-i)}{\left(2\pi\right)^4}\int\frac{e^{ip(x_1-x_2)}dp}{p^2+m^2-i\varepsilon} = \\ = \frac{-1}{\left(2\pi\right)^4}\int\frac{(\hat{p}+im)_{\alpha\beta}e^{ip(x_1-x_2)}dp}{p^2+m^2-i\varepsilon}. \tag{3.5.22}$$

Это выражение можно переписать в более компактном (но формальном) виде, учтя, что $p^2+m^2 = \left(\hat{p}+im\right)\ \left(\hat{p}-im\right)$:

$$\dot{\psi}(x_1)\dot{\bar{\psi}}(x_2) = \frac{-1}{\left(2\pi\right)^4}\int\frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{\hat{p}-im}. \tag{3.5.23}$$

Легко показать, что

$$\dot{\psi}(x_1)\dot{\psi}(x_2) = 0, \quad \dot{\bar{\psi}}(x_1)\dot{\bar{\psi}}(x_2) = 0, \quad \dot{\psi}(x_2)\dot{\bar{\psi}}(x_1) = -\dot{\bar{\psi}}(x_2)\dot{\psi}(x_1)\ . \tag{3.5.24}$$

В выражении для оператора S входят T-произведения операторов H_{int}, каждый из которых содержит нормальные произведения группы операторов:

$$T(N(A_1B_1C_1...)N(A_2B_2C_2...)...N(A_nB_nC_n...)).$$

Такое произведение называется смешанным, и его необходимо представить в виде суммы нормальных произведений. Для этого воспользуемся теоремой Вика, которая утверждает, что смешанное произведение операторов полей равно сумме их нормальных произведений, в которых операторы соединены всеми возможными свёртками за исключением тех, которые объединяют операторы под одним нормальным произведением (с одинаковым x):

$$T(N(A_1B_1C_1)N(A_2B_2C_2)...N(A_nB_nC_n)) = \\ = N(A_1B_1C_1A_2B_2C_2...A_nB_nC_n) + N(\dot{A}_1B_1C_1\dot{A}_2B_2C_2...A_nB_nC_n) + \\ + N(\dot{A}_1B_1C_1A_2\dot{B}_2C_2...A_nB_nC_n) + ... + \\ + N(\dot{A}_1\ddot{B}_1C_1\dot{A}_2\ddot{B}_2C_2...A_nB_nC_n).... \tag{3.5.25}$$

Первое слагаемое не содержит свёрток, затем идут все возможные слагаемые с двумя свёртками, затем– слагаемые с тремя свертками и т.д. Нормальное произведение определено как

$$N(ABC...XYZ) = (-1)^q AZX...BYC, \tag{3.5.26}$$

$$N(\dot{A}B\dot{C}...X\ddot{Y}\ddot{Z}) = (-1)^q\dot{A}\dot{C}\ddot{Y}\ddot{Z}N(B...X). \tag{3.5.27}$$

В этих формулах справа операторы расположены в нормальной форме, q – число перестановок фермионных операторов при переходе от левой к правой части равенства. Например,

$$N(\psi_1\dot{\psi}_2\bar{\psi}_3\dot{\bar{\psi}}_4) = (-1)^3\dot{\psi}_2\dot{\bar{\psi}}_4N(\psi_1\bar{\psi}_3), \tag{3.5.28}$$

где была сделана перестановка $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$, которая является нечётной.

Для двух операторов

$$T\left(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\right) = N\left(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\right) + \dot{\psi}(x_1)\dot{\bar{\psi}}(x_2) \tag{3.5.29}$$

– эту формулу мы получили раньше для различных полей. Используя её и предполагая справедливость формулы для произведения n операторов (3.5.25), можно доказать справедливость формулы для $n+1$ операторов, т.е. доказать теорему Вика по индукции. Отметим, что т.к.

операторы разных полей, например ψ и A_α, коммутируют, их свёртки равны нулю.

3.6. Взаимодействие спинорного и электромагнитного полей

Рассмотрим взаимодействие электромагнитного и спинорного полей. Начнём с лагранжиана системы независимых спинорного и электромагнитного поля:

$$L_0 = -\bar{\psi}\left(\gamma_\alpha \partial_\alpha + m\right)\psi - \frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{3.6.1}$$

Введем взаимодействие, произведя в (3.6.1) следующую замену:

$$\partial_\alpha \psi \to \left(\partial_\alpha - ieA_\alpha\right)\psi, \quad \partial_\alpha \bar{\psi} \to \left(\partial_\alpha + ieA_\alpha\right)\bar{\psi}. \tag{3.6.2}$$

При этом полный лагранжиан (учитывающий взаимодействие) примет вид

$$L(x) = L_0(x) + ie\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha \psi(x) A_\alpha(x), \tag{3.6.3}$$

т.е. лагранжиан взаимодействия фермионных и электромагнитных полей

$$L_{\text{int}}(x) = ie\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha \psi(x) A_\alpha(x) = j_\alpha(x) A_\alpha(x) \tag{3.6.4}$$

имеет вид произведения токов. В (3.6.4) $j_\mu(x)$ – четырёхмерный ток спинорного поля (2.5.8). Из формулы

$$T_{44} = \sum_{\varphi=\psi,\bar{\psi},A_\mu} \frac{\partial L}{\partial(\partial_4 \varphi)}\partial_4 \varphi - L\delta_{\alpha\beta}$$

и соотношений

$$P_\alpha = i\int T_{4\alpha} d\vec{x} = (P_k, iH), \quad P_4 = i\int T_{44} d\vec{x}$$

видно, что T_{44} является плотностью гамильтониана. Так как L_{int} в (3.6.4) не содержит производных от полевых функций, плотность гамильтониана взаимодействия (которую обозначаем тем же символом H_{int}, но с аргументом x) будет равна

$$H_{\text{int}}(x) = -L_{\text{int}}(x) = -j_\alpha(x) A_\alpha(x). \tag{3.6.5}$$

Найдём оператор S,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!}\int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_n T\left(H_{\text{int}}(x_1) H_{\text{int}}(x_2) \ldots H_{\text{int}}(x_n)\right), \tag{3.6.6}$$

рассматривая последовательно каждый из членов разложения с $n = 0,\ 1,\ 2$. Оператор тока $j_\alpha(x)$ содержит заряд электрона и так как $e^2/(4\pi\hbar c) \approx 1/137$, то члены ряда теории возмущений (3.6.6) быстро убывают.

В нулевом порядке

$$S^{(0)} = I, \tag{3.6.7}$$

что соответствует отсутствию взаимодействия (начальное и конечное состояния совпадают). В первом порядке оператор рассеяния имеет вид

$$S^{(1)} = -i\int dx T(H_{\text{int}}(x)) = -e\int dx N\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha \psi(x)\right) A_\alpha(x). \tag{3.6.8}$$

Во втором порядке получим

$$S^{(2)} = -\frac{1}{2}\int dx_1 dx_2 T(H_{\text{int}}(x_1) H_{\text{int}}(x_2)) = -\frac{e^2}{2}\cdot$$
$$\cdot \int dx_1 dx_2 T\left(N\left(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\alpha \psi(x_1)\right) N\left(\bar{\psi}(x_2)\gamma_\beta \psi(x_2)\right)\right) T\left(A_\alpha(x_1) A_\beta(x_2)\right). \tag{3.6.9}$$

Множитель, содержащий операторы фермионов, обозначим

$$a = T\left(N\left(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\alpha \psi(x_1)\right) N\left(\bar{\psi}(x_2)\gamma_\beta \psi(x_2)\right)\right), \tag{3.6.10}$$

а множитель, содержащий фотонные операторы, обозначим

$$b = T\left(A_\alpha(x_1) A_\beta(x_2)\right). \tag{3.6.11}$$

Пользуясь теоремой Вика, раскроем хронологическое произведение в (3.6.10):

$$a = N\left(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\alpha \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\beta \psi(x_2)\right) + N(\dot{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\alpha \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\beta \dot{\psi}(x_2)) +$$
$$N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\alpha \dot{\psi}(x_1)\dot{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\beta \psi(x_2)) + N(\dot{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\alpha \ddot{\psi}(x_1)\ddot{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\beta \dot{\psi}(x_2)). \tag{3.6.12}$$

Второе и третье слагаемые в (3.6.12) дадут одинаковый вклад в $S^{(2)}$. Для доказательства рассмотрим второе слагаемое:

$$\int N(\underbrace{\dot{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\alpha \psi(x_1)}_{\alpha}\underbrace{\bar{\psi}(x_2)\gamma_\beta \dot{\psi}(x_2)}_{\beta}) T(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) dx_1 dx_2 \tag{3.6.13}$$

и поменяем группы операторов α и β (эта операция включает чётную перестановку фермионных операторов), а затем сделаем замены $x_1 \leftrightarrow x_2$ и $\mu \leftrightarrow \nu$. В результате мы получим третье слагаемое, так как $T(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)) = T(A_\nu(x_2) A_\mu(x_1))$. Последнее равенство следует, например, из того, что

$$T(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)) = N(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)) + \dot{A}_\mu(x_1)\dot{A}_\nu(x_2) =$$
$$= N(A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)) + \dot{A}_\nu(x_2)\dot{A}_\mu(x_1).$$

3.7. Комптоновское рассеяние

Рассмотрим процесс рассеяния фотона на электроне (эффект Комптона):

$$e^- + \gamma \to e^- + \gamma.$$

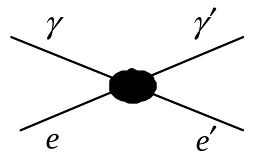

Рис. 5. Комптоновское рассеяние

Пусть k и p – четырёхмерные импульсы начальных фотона и электрона, k' и p' – четырёхмерные импульсы конечных фотона и электрона; r и r' – спиральности начального и конечного электронов, λ и λ' – индексы векторов поляризации начального и конечного фотонов соответственно. Начальный вектор состояния строится с помощью операторов свободных полей

$$\left| i \right\rangle = c_r^+(p) a_\lambda^+(k) \left| 0 \right\rangle , \tag{3.7.1}$$

где $c_r^+(p)$ — оператор рождения электрона, $a_\lambda^+(k)$ – оператор рождения фотона. Соответственно конечный вектор состояния (записанный для кет-вектора) имеет вид

$$\left\langle f \right| = \left\langle 0 \right| a_{\lambda'}(k') c_{r'}(p') . \tag{3.7.2}$$

В первом порядке теории возмущений получим

$$\left\langle f \right| S^{(1)} \left| i \right\rangle = -e \int dx \left\langle f \right| N\left(\bar{e}(x)\gamma_\alpha e(x)\right) A_\alpha \left| i \right\rangle , \tag{3.7.3}$$

где используются обозначения $e(x)$, $\bar{e}(x)$ для полевых функций электрона вместо $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$. Распишем нормальное произведение:

$$\begin{aligned} N\left(\bar{e}(x)\gamma_\alpha e(x)\right) &= \bar{e}^{(-)}(x)\gamma_\alpha e^{(+)}(x) + \bar{e}^{(+)}(x)\gamma_\alpha e^{(+)}(x) + \\ &+ \bar{e}^{(-)}(x)\gamma_\alpha e^{(-)}(x) + N\left(\bar{e}^{(+)}(x)\gamma_\alpha e^{(-)}(x)\right) \equiv a_1 + a_2 + a_3 + a_4 , \end{aligned} \tag{3.7.4}$$

где $e^{(+)}(x)$ содержит оператор уничтожения электрона, $e^{(-)}(x)$ – оператор рождения позитрона, $\bar{e}^{(+)}(x)$ – оператор уничтожения позитрона, $\bar{e}^{(-)}(x)$ – оператор рождения электрона. Явно выписав спиновые индексы, рассмотрим четвёртое слагаемое в (3.7.4):

$$\begin{aligned} a_4 &= N\left(\bar{e}_\sigma^{(+)}(x)\left(\gamma_\alpha\right)_{\sigma\sigma'} e_{\sigma'}^{(-)}(x)\right) \\ &= -e_\sigma^{(-)}(x)\left(\gamma_\alpha\right)_{\sigma\sigma'} \bar{e}_{\sigma'}^{(+)}(x) = -e^{(-)}(x)\gamma_\alpha^T \bar{e}^{(+)}(x). \end{aligned}$$

Подействуем оператором $\bar{e}_\sigma^{(+)}(x)$ на $\left| i \right\rangle$ и перенесём его к $\left| 0 \right\rangle$:

$$\bar{e}^{(+)}(x)\left| i \right\rangle = \bar{e}^{(+)}(x) c_r^+(p) a_\lambda^+(k) \left| 0 \right\rangle = -c_r^+(p) a_\lambda^+(k) \bar{e}^{(+)}(x) \left| 0 \right\rangle = 0 , \tag{3.7.5}$$

т.е. $\left\langle f \right| a_4 \left| i \right\rangle = 0$. Аналогично можно доказать, что $a_2 \left| i \right\rangle = 0$. Найдём вклад третьего слагаемого из (3.7.4) в матричный элемент, «протаскивая» оператор рождения позитрона $e^{(-)}(x)$ к $\left\langle 0 \right|$:

$$\begin{aligned} \left\langle f \right| a_3 &= \left\langle 0 \right| a_{\lambda'}(k') c_{r'}(p') \bar{e}^{(-)}(x)\gamma_\alpha e^{(-)}(x) = \\ &= \left\langle 0 \right| e^{(-)}(x) a_{\lambda'}(k') c_{r'}(p') \bar{e}^{(-)}(x)\gamma_\alpha = 0, \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

т.е. вклад третьего слагаемого в матричный элемент также равен нулю. Найдём вклад первого слагаемого $a_1 = \bar{e}^{(-)}(x)\gamma_\alpha e^{(+)}(x)$. Подействуем оператором $e^{(+)}(x)$ на $\left| i \right\rangle$ и перенесём его к $\left| 0 \right\rangle$:

$$\begin{aligned} e^{(+)}(x)\left| i \right\rangle &= e^{(+)}(x) c_r^+(p) a_\lambda^+(k) \left| 0 \right\rangle = \\ &= \left(\left[e^{(+)}(x), c_r^+(p) \right]_+ - c_r^+(p) e^{(+)}(x)\right) a_\lambda^+(k) \left| 0 \right\rangle = \\ &= \int N_{p''} u^{r''}(p'') \left[c_{r''}(p''), c_r^+(p) \right]_+ e^{ip''x} d\vec{p}'' a_\lambda^+(k) \left| 0 \right\rangle = \\ &= N_p u^r(p) e^{ipx} a_\lambda^+(k) \left| 0 \right\rangle , \end{aligned} \tag{3.7.7}$$

т.е. $e^{(+)}(x)$ «аннигилирует» начальный электрон и даёт плоскую волну, соответствующую этому электрону.

Теперь подействуем оператором $\bar{e}^{(-)}(x)$ на $\left\langle f \right|$ и перенесём его к $\left\langle 0 \right|$:

$$\begin{aligned} \left\langle f \right| \bar{e}^{(-)}(x) &= \left\langle 0 \right| a_{\lambda'}(k') c_{r'}(p') \bar{e}^{(-)}(x) = \left\langle 0 \right| a_{\lambda'}(k') \left[c_{r'}(p'), \bar{e}_{r''}^{(-)}(x) \right]_+ - \\ &- \left\langle 0 \right| a_{\lambda'}(k') \bar{e}_{r''}^{(-)}(x) c_{r'}(p') = \left\langle 0 \right| a_{\lambda'}(k') N_{p'} \bar{u}^{r'}(p') e^{-ip'x} , \end{aligned} \tag{3.7.8}$$

т.е. $\bar{e}^{(-)}(x)$ «аннигилирует» начальный электрон и даёт соответствующую ему плоскую волну. Таким образом, вклад первого слагаемого будет таким

$$\left\langle f \right| a_1 \left| i \right\rangle = \left\langle 0 \right| a_{\lambda'}(k') N_{p'} \bar{u}^{r'}(p') e^{-ip'x} \gamma_\alpha N_p u^r(p) e^{ipx} a_\lambda^+(k) \left| 0 \right\rangle . \tag{3.7.9}$$

Слагаемые со второго по четвертое дали нулевые вклады в матричный элемент, потому что они содержат только один оператор электрона, и его было недостаточно, чтобы аннигилировать два электронных оператора в $\left\langle f \right|$ и $\left| i \right\rangle$. Можно дать ещё более простое объяснение: эти слагаемые содержали оператор позитрона, который беспрепятственно прошёл к $\langle 0|$ или $|0\rangle$, дав в результате ноль.

Найдём вклад фотонных операторов в матричный элемент:

$$\langle f|A_\alpha(x)|i\rangle = \langle f|\left(A_\alpha^{(+)}(x)+A_\alpha^{(-)}(x)\right)|i\rangle. \qquad (3.7.10)$$

Подействуем оператором $A_\alpha^{(+)}(x)$ на $|i\rangle$ (электронные операторы уже учтены в (3.7.7) и (3.7.8)), перенесём его к $|0\rangle$:

$$\begin{aligned} A_\alpha^{(+)}(x)a_\lambda^+(k)|0\rangle &= a_\lambda^+(k)A_\alpha^{(+)}(x)|0\rangle + \\ &+\left[A_\alpha^{(+)}(x), a_\lambda^+(k)\right]_-|0\rangle = N_k e_\alpha^\lambda e^{ikx}|0\rangle. \end{aligned} \qquad (3.7.11)$$

Подействовав оператором $A_\alpha^{(-)}(x)$ на $\langle f|$ и перенеся его к $\langle 0|$, получим

$$\langle 0|a_{\lambda'}(k')A_\alpha^{(-)}(x) = \langle 0|e_\alpha^{\lambda'}e^{-ik'x}N_{k'}. \qquad (3.7.12)$$

Справа в (3.7.11) и (3.7.12) стоят плоские волны, соответствующие начальному и конечному фотонам.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle 0|a_{\lambda'}(k')A_\alpha(x)a_\lambda(k)|0\rangle &= \langle 0|a_{\lambda'}(k')|0\rangle N_k e_\alpha^\lambda e^{ikx} + \\ &+\langle 0|a_\lambda^+(k)|0\rangle N_{k'}e_\alpha^{\lambda'}e^{ik'x} = 0+0=0. \end{aligned} \qquad (3.7.13)$$

Следовательно, матричный элемент комптоновского рассеяния в первом порядке имеет вид

$$\langle f|S^{(1)}|i\rangle = 0. \qquad (3.7.14)$$

Найдём матричный элемент $\langle f|S^{(2)}|i\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle = -\frac{(-ie)^2}{2}\langle f|\int T\left(N\left(\bar e(x_1)\gamma_\alpha e(x_1)\right)N\left(\bar e(x_2)\gamma_\beta e(x_2)\right)\right)\cdot \\ \cdot T\left(A_\alpha(x_1)A_\beta(x_2)\right)dx_1dx_2|i\rangle. \end{aligned} \qquad (3.7.15)$$

После раскрытия хронологического произведения получаем

$$\begin{aligned} a = T\left(N\left(\bar e(x_1)\gamma_\alpha e(x_1)\right)N\left(\bar e(x_2)\gamma_\beta e(x_2)\right)\right) = N\left(\bar e(x_1)\gamma_\alpha e(x_1)\bar e(x_2)\gamma_\beta e(x_2)\right) + \\ +2N\left(\bar e(x_1)\gamma_\alpha \dot e(x_1)\dot{\bar e}(x_2)\gamma_\beta e(x_2)\right) + \dot{\bar e}(x_1)\gamma_\alpha \ddot e(x_1)\ddot{\bar e}(x_2)\gamma_\beta \dot e(x_2). \end{aligned}$$

(3.7.16)

Первое и третье слагаемые в a дадут нулевые вклады, так как в первом слагаемом больше двух фермионных операторов, необходимых для «аннигилирования» начального и конечного электронов, а в третьем их нет вообще. Ненулевой вклад во втором слагаемом дает член, не содержащий позитронных операторов, т.е.

$$a = 2\bar e^{(-)}(x_1)\gamma_\alpha \dot e(x_1)\dot{\bar e}(x_2)\gamma_\beta e^{(+)}(x_2). \qquad (3.7.17)$$

Оператор $\bar e^{(-)}(x_1)$ «аннигилирует» конечный электрон, оператор $e^{(+)}(x_2)$ – начальный.

Вычислим вклад, даваемый фотонными операторами:

$$b = T\left(N(A_\alpha(x_1)A_\beta(x_2))\right) = N\left(A_\alpha(x_1)A_\beta(x_2)\right) + \dot A_\alpha(x_1)\dot A_\beta(x_2). \qquad (3.7.18)$$

Последнее слагаемое даст нулевой вклад, т.к. в нем нет фотонных операторов, необходимых для аннигиляции начального и конечного фотонов. $N\left(A_\alpha(x_2)A_\beta(x_2)\right)$ содержит четыре слагаемых; только два из них дадут ненулевой вклад:

$$b = A_\alpha^{(-)}(x_1)A_\beta^{(+)}(x_2) + A_\beta^{(-)}(x_2)A_\alpha^{(+)}(x_1). \qquad (3.7.19)$$

Используя (3.7.5), (3.7.6), (3.7.7), (3.7.8) и то, что

$$\dot e(x_1)\dot{\bar e}(x_2) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int \frac{\hat p_1 + im}{p_1^2+m^2-i\varepsilon}e^{ip_1(x_1-x_2)}dp_1, \qquad (3.7.20)$$

получим выражение для матричного элемента

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle = \frac{(-i)^2}{2!}2\int N_{p'}e^{-ip'x_1}\bar u^{r'}(p')(-ie\gamma_\alpha)\frac{(-1)}{(2\pi)^4}\frac{\hat p_1+im}{p_1^2+m^2}e^{ip_1(x_1-x_2)}\cdot \\ \cdot(-ie\gamma_\beta)N_p e^{ipx_2}u^r(p)\left[\langle 0|N_{k'}e_\alpha^{\lambda'}e^{-ik'x_1}N_k e_\beta^\lambda e^{ikx_2}|0\rangle + \right. \\ \left. +\langle 0|N_{k'}e_\beta^{\lambda'}e^{-ik'x_2}N_k e_\alpha^\lambda e^{ikx_1}|0\rangle\right]dx_1dx_2dp_1. \end{aligned} \qquad (3.7.21)$$

Переменные x_1 и x_2 находятся только в экспонентах, и по этим переменным можно проинтегрировать:

$$\int dx_1dx_2 e^{-i(p'+k'-p_1)x_1}e^{-i(p_1-p-k)x_2} = (2\pi)^8\delta(p'+k'-p_1)\delta(p_1-p-k), \qquad (3.7.22)$$

$$\int dx_1dx_2 e^{-i(p'-k-p_1)x_1}e^{-i(p_1-p+k')x_2} = (2\pi)^8\delta(p'-k-p_1)\delta(p_1-p+k'). \qquad (3.7.23)$$

Используя (3.7.22) и (3.7.23), а также то, что $\langle 0|0\rangle = 1$, преобразуем (3.7.21) к виду

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle = (-i)^2\int\left[N_{p'}\bar u^{r'}(p')(-ie\gamma_\alpha)(2\pi)^4\delta(p'+k'-p_1)\frac{(-1)}{(2\pi)^4}\frac{\hat p_1+im}{p_1^2+m^2}\right. \\ \left.(-ie\gamma_\beta)(2\pi)^4\delta(p_1-p-k)N_p u^r(p)N_{k'}e_\alpha^{\lambda'}N_k e_\beta^\lambda dp_1\right] + \\ +(-i)^2\int\left[N_{p'}\bar u^{r'}(p')(-ie\gamma_\alpha)(2\pi)^4\delta(p'-k-p_1)\frac{(-1)}{(2\pi)^4}\frac{\hat p_1+im}{p_1^2+m^2}\right. \end{aligned}$$

$$(-ie\gamma_\beta)(2\pi)^4\,\delta(p_1-p+k')N_p u^r(p)N_k e_\alpha^\lambda N_{k'}e_\beta^{\lambda'}dp_1\Big]. \qquad (3.7.24)$$

В (3.7.24) множители $N_p = 1/\sqrt{2p_0}$ и $N_k = 1/\sqrt{2k_0}$. По повторяющимся индексам α и β идёт суммирование; δ-функциям в (3.7.24) соответствуют законы сохранения энергии и импульса. По четырёхмерному импульсу p_1 можно проинтегрировать, и в результате получим

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = (-i)^2\, N_p N_{p'} N_k N_{k'} (2\pi)^8\,\delta(p'+k'-p-k)$$

$$\Big[\bar{u}^{r'}(p')e_\alpha^{\lambda'}(-ie\gamma_\alpha)\frac{(-1)}{(2\pi)^4}\frac{\hat{p}+\hat{k}+im}{(p+k)^2+m^2}e_\beta^\lambda(-ie\gamma_\beta)u^r(p)+$$

$$+\bar{u}^{r'}(p')e_\alpha^\lambda(-ie\gamma_\alpha)\frac{(-1)}{(2\pi)^4}\frac{\hat{p}-\hat{k}'+im}{(p-k')^2+m^2}e_\beta^{\lambda'}(-ie\gamma_\beta)u^r(p)\Big]. \qquad (3.7.25)$$

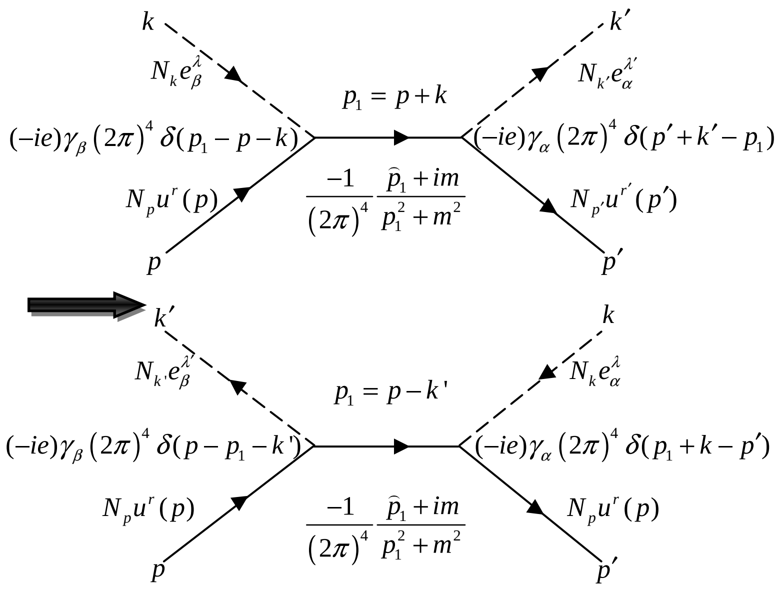

Рис.6. Диаграммы Фейнмана для эффекта Комптона во 2-ом порядке

Матричный элемент $\langle f|S^{(2)}|i\rangle$ можно представить в виде диаграмм Фейнмана. Геометрическим объектам на них соответствуют множите-

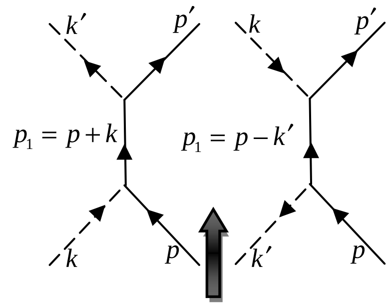

Рис.7. Диаграммы Фейнмана для эффекта Комптона во 2-ом порядке

ли, указанные на рис. 6, и каждая диаграмма ствует слагаемому в $S^{(2)}$. Читать диаграммы необходимо против стрелок на фермионных линиях (сплошные линии).Во втором порядке теории возмущений диаграммы Фейнмана имеют две вершины. Эти диаграммы можно интерпретировать как возникновение в результате взаимодействия электрона с фотоном виртуального электрона с импульсом p_1, который распадается на реальный электрон и фотон. Для виртуального электрона $p_1^2 \neq -m^2$.

Другой способ нарисовать диаграммы комптоновского рассеяния показан на рис.7. Большая стрелка на рис.6 и рис.7 соответствует «входящим» частицам.

3.8.Рассеяние электрона на ядре

Свободный электрон не может испустить фотон, т.к. при этом были бы нарушены законы сохранения энергии и импульса. Однако электрон, находящийся во внешнем поле, например в поле ядра, может испустить фотон, как это показано схематически на рис.8. Запишем выражения для начального и конечного состояний:

$$|i\rangle = c_r^+(p)|0\rangle, \qquad (3.8.1)$$
$$\langle f| = \langle 0|c_{r'}(p').$$

Электростатическое поле, создаваемое ядром, будем считать классическим, т.е. не содержащим операторов. В этом случае четырёхмерный потенциал можно записать в виде

$$A_\mu(x) = \left(0,0,0,\frac{-iZe}{|\vec{r}|}\right). \qquad (3.8.2)$$

В отличие от эффекта Комптона ненулевой вклад получится уже в первом порядке:

$$S^{(1)} = -\frac{(-i)}{1!}(-ie)\int T(\bar{e}(x)\gamma_\alpha e(x))A_\alpha(x)dx\,. \qquad (3.8.3)$$

Подставим в $S^{(1)}$ выражения для $\bar{e}(x)$ и $e(x)$. Ненулевой вклад в матрицу рассеяния даст только слагаемое

$$S^{(1)} = -e\int \bar{e}^{(-)}(x)\gamma_\alpha e^{(+)}(x)A_\alpha(x)dx\,. \qquad (3.8.4)$$

Матричный элемент равен

$$\left\langle f\left|S^{(1)}\right|i\right\rangle = -e\int\left\langle 0\right|c_{r'}(p')\bar{e}^{(-)}(x)\gamma_\alpha A_\alpha(x)e^{(+)}(x)c_r^{(+)}(p)\left|0\right\rangle dx\,. (3.8.5)$$

Преобразуем сначала левый множитель под знаком интеграла:

$$\left\langle 0\right|c_{r'}(p')\bar{e}^{(-)}(x) = \left\langle 0\right|\left(\left[c_{r'}(p')\bar{e}^{(-)}(x)\right]_+ - \bar{e}^{(-)}(x)c_{r'}(p')\right) = \left\langle 0\right|N_{p'}\bar{u}^{r'}(p)e^{-ip'x}.$$

Теперь преобразуем правый множитель под знаком интеграла:

$$e^{(+)}(x)c_r^+(p)\left|0\right\rangle = \left(\left[e^{(+)}(x),c_r^+(p)\right]_+ - c_r^+(p)e^{(+)}(x)\right)\left|0\right\rangle = N_p u^r(p)e^{ipx}\left|0\right\rangle.$$

Подставим полученные выражения в матричный элемент $S^{(1)}$:

$$\left\langle f\left|S^{(1)}\right|i\right\rangle = -eN_{p'}N_p\bar{u}^{r'}(p)\gamma_\alpha u^r(p)\int e^{i(p-p')x}A_\alpha(x)dx\,.$$

Сюда входит интеграл ($x_4 = it$):

$$A_4(q) = \int e^{i(p-p')x}A_4(x)dx = Ze\int e^{i(p-p')x}\frac{1}{|\vec{r}|}d\vec{x}dt\,. \qquad (3.8.6)$$

Интегрируя по времени, получим дельта-функцию по энергии:

$$A_4(q) = 2\pi\delta\left(p_0 - p_0'\right)\int e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{x}}\frac{Ze}{|\vec{r}|}d\vec{r}\,. \qquad (3.8.7)$$

Интеграл по объему имеет вид

$$I = \int e^{i\vec{q}\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}|}d\vec{r} = \frac{4\pi}{|\vec{q}|^2}\,, \qquad (3.8.8)$$

где $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$ – передача импульса ядру (энергия сохраняется, т.е. $q = (\vec{q},0)$).

Таким образом, выражение для матричного элемента примет вид

$$\left\langle f\left|S^{(1)}\right|i\right\rangle = -2\pi eN_{p'}N_p\bar{u}^{r'}(p')\gamma_4 u^r(p)A_4(\vec{q})\delta\left(p_0 - p_0'\right). \quad (3.8.9)$$

Выделим явно в выражении (3.8.9) амплитуду рассеяния

$$M_{if} = \bar{u}^{r'}(p)\gamma_4 u^r(p)\,, \qquad (3.8.10)$$

тогда

$$\left\langle f\left|S^{(1)}\right|i\right\rangle = -2\pi eN_{p'}N_pM_{if}A_4(\vec{q})\delta\left(p_0 - p_0'\right). \qquad (3.8.11)$$

Найдём дифференциальное сечение рассеяния. Если поляризация начального и конечного электронов неизвестна, по ним необходимо про-

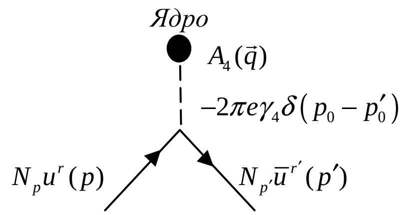

Рис.8. Диаграмма Фейнмана рассеяния электрона во внешнем поле (1-й порядок)

вести усреднение. Для усреднения пользуемся лой (подробнее усреднение по поляризациям будет рассмотрено в следующем учебном пособии)

$$\frac{1}{2}\sum_{r,r'}\left|M_{if}\right| = \frac{1}{2}Sp\left(M\Lambda\left(\hat{p}\right)\bar{M}\Lambda\left(\hat{p}'\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}Sp\left(\gamma_4\left(\hat{p}+im\right)\gamma_4\left(\hat{p}'+im\right)\right). \qquad (3.8.12)$$

Шпур произведения нечетного числа γ -матриц равен нулю, поэтому

$$\frac{1}{2}\sum_{r,r'}\left|M_{if}\right| = \frac{1}{2}m^2Sp\left(\gamma_4^2\right) - \frac{1}{2}Sp\left(\gamma_4\hat{p}\gamma_4\hat{p}'\right).$$

Вычисляя шпуры, получим

$$\frac{1}{2}\sum_{r,r'}\left|M_{if}\right| = 2m^2 + 2pp' = 2m^2 + 2\vec{p}\vec{p}' + 2E^2\,.$$

Поскольку энергия сохраняется, а $p_4p_4' = -E^2$, то трёхмерное скалярное произведение можно переписать в виде $\vec{p}\vec{p}' = \left|\vec{p}\right|^2\cos\theta = \left|\vec{p}\right|^2\left(1 - 2\sin^2\theta/2\right)$, где θ – угол между направлениями падающего и рассеянного электрона, тогда:

$$\frac{1}{2}\sum_{r,r'}\left|M_{if}\right| = 2m^2 + 2E^2 + 2\left|\vec{p}\right|^2 - 4\left|\vec{p}\right|^2\sin^2\frac{\theta}{2} = 4E^2\left(1 - \frac{\left|\vec{p}\right|^2}{E^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \qquad (3.8.13)$$

Дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \left|S_{if}\right|^2 = coef \times A_4^2e^2\left|M\right|^2,$$

и, взяв необходимый для данной задачи коэффициент (подробнее в следующем учебном пособии), найдем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{\left|\vec{q}\right|^4}\left|M\right|^2, \text{ где } \alpha = \frac{e^2}{4\pi(\hbar c)} \approx \frac{1}{137}\,. \qquad (3.8.14)$$

Поскольку $\left|\vec{q}\right|^2 = \left(2\left|\vec{p}\right|\sin\theta/2\right)^2$, то

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{16\left|\vec{p}\right|^4\sin^4\frac{\theta}{2}}\left|M\right|^2. \tag{3.8.15}$$

Так как $\vec{p}=\dfrac{E\vec{\mathrm{v}}}{c^2}$, то

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2\left(\hbar c\right)^2}{4\left|\vec{\mathrm{v}}\right|^4\left|E\right|^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1-\frac{\left|\vec{p}\right|^2c^2}{E^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{3.8.16}$$

В случае нерелятивистского предела $c^2\left|\vec{p}\right|^2/E^2<<1$, мы получаем формулу Резерфорда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{4m^2\vec{\mathrm{v}}^4\sin^4\frac{\theta}{2}}=\left(\frac{Z\alpha}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{3.8.17}$$

При рассеянии бесспиновой (скалярной) частицы (скалярное поле), множитель $\left(1-\dfrac{\left|\vec{p}\right|^2c^2}{E^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)$ отсутствует и в результате получается формула Резерфорда. Для частиц со спином этот множитель является следствием взаимодействия магнитного момента электрона с магнитным полем ядра. (В релятивистском случае электрическое и магнитное поля существуют совместно).

3.9.Рассеяние электрона на электроне

Кратко рассмотрим рассеяние электрона на электроне

$$e^-+e^-\to e^-+e^-. \tag{3.9.1}$$

Начальное состояние, в котором находятся два электрона с импульсами p_1 и p_2 и спиральностями r_1 и r_2, имеет вид

$$\left|i\right\rangle=c^+_{r_1}(p_1)c^+_{r_2}(p_2)\left|0\right\rangle. \tag{3.9.2}$$

Конечное состояние с двумя электронами с импульсами p_1' и p_2' и спиральностями r_1' и r_2' имеет вид

$$\left\langle f\right|=\left\langle 0\right|c_{r_1'}(p_1')c_{r_2'}(p_2'). \tag{3.9.3}$$

В первом порядке теории возмущений $\left\langle f\right|S^{(1)}\left|i\right\rangle=0$, поэтому начнём рассмотрение сразу со второго порядка:

$$S^{(2)}=-\frac{(-i)^2}{2!}(-ie)^2\cdot$$
$$\cdot\int dx_1dx_2T\left(N\left(\overline{e}(x_1)\gamma_\alpha e(x_1)A_\alpha(x_1)\right)N\left(\overline{e}(x_2)\gamma_\beta e(x_2)A_\beta(x_2)\right)\right). \tag{3.9.4}$$

Ненулевой вклад для начального (3.9.2) и конечного (3.9.3) состояний при раскрытии хронологического произведения даёт только $N(\overline{e}(x_1)\gamma_\alpha e(x_1)\overline{e}(x_2)\gamma_\beta e(x_2)\dot{A}_\alpha(x_1)\dot{A}_\beta(x_2))$, т.е.

$$S^{(2)}=-\frac{(-ie)^2}{2}\int N\left(\overline{e}(x_1)\gamma_\alpha e(x_1)\overline{e}(x_2)\gamma_\beta e(x_2)\right)\frac{-i}{\left(2\pi\right)^4}\delta_{\alpha\beta}\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2}dkdx_1dx_2. \tag{3.9.5}$$

N - произведение содержит 16 слагаемых, но только одно из них даст ненулевой вклад в изучаемый процесс:

$$\left\langle f\right|N(\overline{e}^{(-)}(x_1)\gamma_\alpha e^{(+)}(x_1)\overline{e}^{(-)}(x_2)\gamma_\beta e^{(+)}(x_2))\left|i\right\rangle=$$
$$=-\left\langle f\right|\overline{e}^{(-)}(x_1)\gamma_\alpha\overline{e}^{(-)}(x_2)e^{(+)}(x_1)\gamma_\beta e^{(+)}(x_2)\left|i\right\rangle. \tag{3.9.6}$$

Перенесём операторы уничтожения $e^{(+)}(x_1)$ и $e^{(+)}(x_2)$ к $\left|0\right\rangle$, последовательно коммутируя с операторами рождения в $\left|i\right\rangle$. На первом шаге

$$e^{(+)}(x_1)\gamma_\beta e^{(+)}(x_2)c^+_{r_2}(p_2)c^+_{r_1}(p_1)\left|0\right\rangle=$$
$$e^{(+)}(x_1)\gamma_\beta\left(\left[e^{(+)}(x_2),c^+_{r_2}(p_2)\right]_++c^+_{r_2}(p_2)e^{(+)}(x_1)\right)c^+_{r_1}(p_1)\left|0\right\rangle. \tag{3.9.7}$$

Используя выражения для антикоммутатора и поступая по аналогии с преобразованием (3.7.13), а затем «протаскивая» направо $e^{(+)}(x_1)$, получим

$$N_{p_1}u^{r_1}(p_1)e^{ip_1x_2}N_{p_2}u^{r_2}(p_2)e^{ip_2x_1}\left|0\right\rangle-N_{p_1}u^{r_1}(p_1)e^{ip_1x_1}N_{p_2}u^{r_2}(p_2)e^{ip_2x_2}\left|0\right\rangle. \tag{3.9.8}$$

Аналогично, перенося операторы рождения $\overline{e}^{(-)}(x_1)$ и $\overline{e}^{(-)}(x_2)$ к $\left\langle 0\right|$ в

$$\left\langle 0\right|c_{r_1'}(p_1')c_{r_2'}(p_2')\overline{e}^{(-)}(x_1)\gamma_\alpha\overline{e}^{(-)}(x_2),$$

используя (3.9.6), получим

$$\left\langle 0\right|N_{p_2'}\overline{u}^{r_2'}(p_2')e^{-ip_2'x_2}\gamma_\alpha N_{p_1'}\overline{u}^{r_1'}(p_1')e^{-ip_1'x_1}$$
$$-\left\langle 0\right|N_{p_1'}\overline{u}^{r_1'}(p_1')e^{-ip_1'x_2}\gamma_\alpha N_{p_2'}\overline{u}^{r_2'}(p_2')e^{-ip_2'x_1}. \tag{3.9.9}$$

Воспользовавшись (3.9.8) и (3.9.9), получим (две пары слагаемых дают одинаковый вклад)

$$\left\langle f\right|S^{(2)}\left|i\right\rangle=\left(-i\right)^2\left(-1\right)N_{p_1}N_{p_2}N_{p_1'}N_{p_2'}\left(-ie\right)^2\frac{-i}{\left(2\pi\right)^4}\delta_{\alpha\beta}\left(2\pi\right)^8\cdot$$

$$\int\Big[\bar{u}^{r_2'}(p_2')\gamma_\alpha\delta(p_2'-p_2-k)u^{r_2}(p_2)\frac{1}{k^2}\bar{u}^{r_1'}(p_1')\gamma_\beta\delta(p_1'-p_1+k)u^{r_1}(p_1)-$$
$$-\bar{u}^{r_1'}(p_1')\gamma_\alpha\delta(p_1'-p_2-k)u^{r_2}(p_2)\frac{1}{k^2}\bar{u}^{r_2'}(p_2')\gamma_\beta\delta(p_2'-p_1+k)u^{r_1}(p_1)\Big]dk. \tag{3.9.10}$$

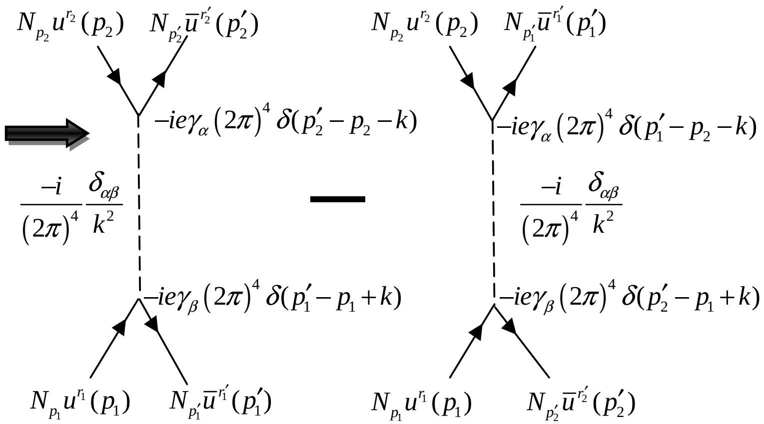

Рис.9. Диаграммы рассеяния электрона на электроне во 2-ом порядке

Знак минус перед вторым слагаемым в (3.9.10) возник из-за того, что электроны подчиняются статистике Ферми: при перестановке двух конечных (или начальных) электронов амплитуда рассеяния меняет знак. Проинтегрировав (3.9.10) по dk, получим

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle=(2\pi)^4 ie^2N_{p_1}N_{p_2}N_{p_1'}N_{p_2'}\delta(p_2'+p_1'-p_1-p_2)$$
$$\Big[\big(\bar{u}^{r_2'}(p_2')\gamma_\alpha u^{r_2}(p_2)\big)\big(\bar{u}^{r_1'}(p_1')\gamma_\alpha u^{r_1}(p_1)\big)/(p_1'-p_1)^2- \tag{3.9.11}$$
$$-\big(\bar{u}^{r_2'}(p_2')\gamma_\alpha u^{r_1}(p_1)\big)\big(\bar{u}^{r_1'}(p_1')\gamma_\alpha u^{r_2}(p_2)\big)/(p_2'-p_1)^2\Big].$$

Этот результат соответствует двум диаграммам на рис. 9.

3.10.Рассеяние позитрона на позитроне

Как пример процесса с античастицами приведем диаграммы Фейнмана для рассеяния позитрона на позитроне

$$e^+(p_1)+e^+(p_2)\to e^+(p_1')+e^+(p_2').$$

Матричный элемент определяется как

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle=-(2\pi)^4 ie^2N_{p_1}N_{p_2}N_{p_1'}N_{p_2'}\delta(p_1'+p_2'-p_1-p_2)$$
$$\left[\frac{\bar{u}^{r_1}(-p_1)\gamma_\alpha u^{r_1'}(-p_1')\bar{u}^{r_2}(-p_2)\gamma_\alpha u^{r_2'}(-p_2)}{(p_1'-p_1)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\bar{u}^{r_1}(-p_1)\gamma_\alpha u^{r_2'}(-p_2')\bar{u}^{r_2}(-p_2)\gamma_\alpha u^{r_1'}(-p_1')}{(p_2'-p_1)^2}\right]. \tag{3.10.1}$$

Таким образом, в диаграммах начальному позитрону соответствует $\bar{u}^r(-p)$, конечному $u^r(-p)$. Стрелки на фермионных линиях в диаграммах направлены «против» физических импульсов античастиц.

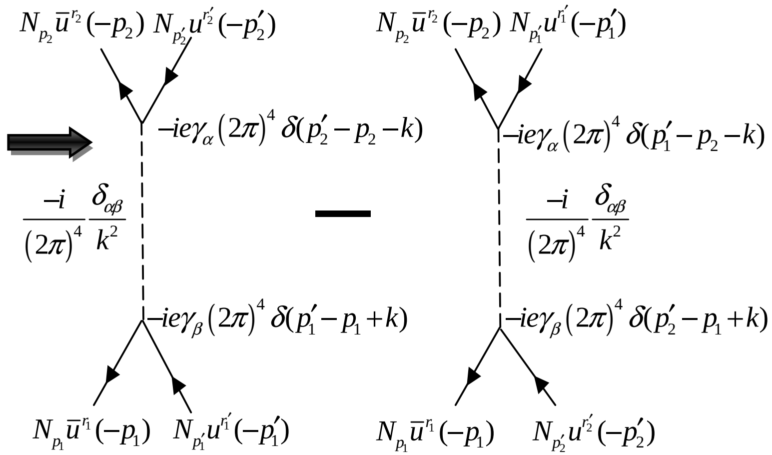

Рис.10. Диаграммы рассеяния позитрона на позитроне во 2-ом порядке

Заключение

В учебном пособии были подробно рассмотрены релятивистские волновые уравнения и изложен полевой подход в объёме, необходимом для изучения физики элементарных частиц и квантовой электродинамики. При изложении квантовой электродинамики на первом этапе были получены правила построения диаграмм Фейнмана. Дальнейшие сведения по квантовой электродинамике будут даны в следующем учебном пособии.

Рекомендуемая литература

1. *Ахиезер А.И.* Квантовая электродинамика / А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. М.: Наука, 1981.
2. *Давыдов А.С.* Квантовая механика / А.С.Давыдов. М.: Наука, 1973.
3. *Боголюбов Н.Н.* Введение в теорию квантованных полей / Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. М.: Наука, 1984.
4. *Биленький С.М.* Введение в диаграммную технику Фейнмана / С.М.Биленький. М.: Атомиздат, 1971.
5. *Бьоркен Д.Д.* Релятивистская квантовая теория / Д.Д.Бьоркен, С.Д.Дрелл. М: Наука, 1978.

Учебное издание

Хеннер Виктор Карлович

Мингалев Станислав Викторович

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ И ТЕОРИЮ ПОЛЯ

Учебное пособие

Редактор Н.В.Петрова

Корректор А.А.Алексеева

Подписано в печать 18.05.2009. Формат 60x84 ^{1}/16.

Усл. печ. л. 6,28. Уч.-изд. л. 5,8. Тираж 60 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел Пермского государственного университета

614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография Пермского государственного университета

614990. Пермь, ул. Букирева, 15