

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

ПЕРМСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А. М. ГОРЬКОГО

М. И. Шлюomis

ДИНАМИКА ЖИДКИХ ПАРАМАГНЕТИКОВ

Учебное пособие по спецкурсу

Пермь - 1983

УДК 538.245:538.4

Шлиомис М.И. Динамика жидких парамагнетиков. Учебное пособие по спецкурсу. — Пермь: Пермский университет, 1983, 68 с.

Излагаются основы гидродинамики и обсуждаются физические свойства парамагнитных жидкостей. Из-за связи магнитных и вращательных механических степеней свободы молекул жидкого парамагнетика при течении его в магнитном поле возникает сложное взаимодействие гидродинамических и магнитных явлений. Развиваемая концепция внутреннего вращения позволяет рассмотреть эти явления с единой точки зрения и описать специфичные для парамагнитных жидкостей гидродинамические аналоги гиромагнитных эффектов Эйнштейна-де Гааза и Барнетта.

Пособие предназначено для студентов физических факультетов и аспирантов, специализирующихся по теоретической физике и физической гидродинамике.

Библиогр. 32 назв. Ил. 7.

Рецензенты: кафедра теоретической физики Пермского педагогического института; директор Института механики сплошных сред УНЦ АН СССР член-корреспондент АН СССР профессор А.А.Поздеев

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета Пермского университета

Темплан 1983, поз. 662

Подписано к печати 15.01.83.

Формат 60x84 ¹/₁₆. Бум.тип. № 2. Печать офсетная. Усл.печ.л. 3,95. Уч.-изд.л. 3,5. Тираж 500 экз. Цена 15 к. Заказ 247.

Редактор Т.И.Пивоварова

Технический редактор Л.Г.Подорова

Корректор В.И.Шербилина

Редакционно-издательский отдел Пермского университета.

614600, Пермь, ул.Букирева, 15

Типография Пермского университета.

614600, Пермь, ул.Букирева, 15

© Пермский государственный университет, 1983

ВВЕДЕНИЕ

Традиционное описание динамики реальных жидкостей основывается на чисто эмпирической классификации, по которой изучаемую жидкость относят к тому или иному реологическому типу - вязкая жидкость, дилатантная, псевдопластическая, упруговязкая и т.п. При таком подходе реологическую модель (вид тензора напряжений) приходится выбирать из интуитивных соображений, что и составляет основную трудность: часто нельзя даже качественно предсказать, как поведет себя та или иная неньютоновская жидкость, ибо в распоряжении исследователя обычно имеется крайне ограниченное число надежных экспериментальных результатов.

С середины 60-х годов интенсивно развивается новый подход к построению гидродинамических моделей реальных жидкостей. Он базируется на анализе микроскопической структуры, понимаемой на уровне составляющих жидкость молекул или частиц суспензии. Конечная цель теоретических построений - вывести макроскопические свойства жидкости, проследив явно их связь с микроструктурой. Эту программу уже удалось реализовать применительно к целому ряду конкретных жидкостей. Существенные успехи получены в области гидродинамики таких сложных сред, как жидкие кристаллы, суспензии (в том числе магнитные), растворы и расплавы полимеров, парамагнитные жидкости.

Настоящее пособие, посвященное гидродинамике жидких парамагнетиков, написано по материалам спецкурса "Динамика аномальных жидкостей", читаемого автором для студентов физического факультета Пермского университета, специализирующихся по теоретической физике и физической гидродинамике.

В первой главе строится полная система гидродинамических уравнений для жидкости с внутренним вращением. Эта система характеризуется несимметричным тензором напряжений и содержит, наряду с обычными уравнениями, еще и уравнение для скорости изменения внутреннего момента импульса. Движение такой среды сопровождается перераспределением вращательного момента между внутренними ("спиновыми") и внешними (гидродинамическими) степенями свободы.

В парамагнитной жидкости внутренний механический момент связан гиромагнитным отношением с магнитным моментом, что позволяет воз-

действовать на движение жидкости посредством магнитного поля. Уравнения движения выводятся во второй главе; там же в качестве примера решается задача о стационарном течении парамагнитной жидкости по круглой трубе (аналог задачи Пуазейля).

Третья глава посвящена изучению гиромагнитных свойств жидких парамагнетиков. Показано, что в таких жидкостях могут наблюдаться при определенных условиях гиромагнитные явления, аналогичные эффектам Зейнштейна-де Гааза и Барнетта в твердых ферромагнетиках.

В последней, четвертой, главе исследуется распространение малых возмущений в проводящем жидком парамагнетике. Наличие у жидкости магнитных степеней свободы приводит к появлению новой ветви собственных колебаний; при этом оказывается, что в некоторой (резонансной) области частот возможны спиновые волны.

Глава I. ЖИДКОСТИ С ВНУТРЕННИМ ВРАЩЕНИЕМ

§ I. Гидродинамика молекул со спином

Не рассматривая пока магнитных свойств парамагнитной жидкости и влияния магнитного поля на ее движение, обобщим классическую гидродинамику в одном только направлении. А именно, учтем, что момент импульса реальной жидкости в общем случае не сводится к одному лишь "орбитальному" моменту $\vec{L} = \rho[\vec{r}\vec{v}]$, связанному с трансляционным движением молекул, но содержит еще и внутренний - "спиновый" - момент \vec{S} , обусловленный их собственным вращением. В качестве элементарных носителей внутреннего момента могут выступать либо сами молекулы среды (как в парамагнитной жидкости), либо посторонние включения: твердые частицы в суспензиях, пузырьки пара или капельки другой жидкости в эмульсиях.

На необходимость упомянутого обобщения обычной гидродинамической модели впервые указал в 1943 году Я.И. Френкель в книге "Кинетическая теория жидкостей" [1]:

"В классической гидродинамике Навье-Стокса частицы жидкости трактуются как материальные точки, для которых понятие собственного (осевого) вращения, или спина, не имеет смысла. Вследствие этого обстоятельства угловая скорость жидкости $\vec{\Omega}$ в какой-либо точке может быть определена как вихрь ее поступательной скорости \vec{v} (деленный пополам) согласно формуле $\vec{\Omega} = 0.5 \cdot \text{rot } \vec{v}$.

Это определение вихревого движения остается в силе и для таких жидкостей, молекулы которых не могут быть уподоблены точкам, но должны трактоваться как маленькие твердые тела. Последним при этом необходимо приписывать, помимо трех поступательных степеней свободы, три вращательные степени свободы, с которыми и связано явление спина... Необходимо отметить, что введение внутренних, или спиновых, степеней свободы молекул связано с весьма радикаль-

ным видоизменением и обобщением классической гидродинамики".

Намеченная Я.И.Френкелем программа построения "гидродинамики молекул со спином" [1] была реализована В.С.Сорокиным [2]. Он показал, что в жидкости с внутренними вращательными степенями свободы даже в отсутствие сдвиговых или объемных деформаций возникает внутреннее трение. В самом деле, если жидкость вращается как твердое тело (т.е. как целое), то при внезапном изменении состояния вращения нарушится равновесное распределение момента импульса между L и S . Это значит, что начнутся необратимые, связанные с дополнительной диссипацией энергии, релаксационные процессы, при которых видимое (гидродинамическое) вращение будет частично переходить в скрытую форму, либо, наоборот, вихревое движение жидкости будет создаваться за счет внутреннего момента импульса.

Спустя 20 лет после появления работы В.С.Сорокина [2] вновь возник интерес к жидкостям с внутренним вращением. На этот раз он был связан с развернутыми в 60-е годы исследованиями физических свойств и гидродинамики "неклассических" сред - жидких кристаллов, концентрированных суспензий, растворов и расплавов полимеров. В эти годы появились работы [3-6], в которых уравнения движения жидкости с внутренним моментом импульса были получены методами термодинамики необратимых процессов.

Один из вариантов [6] вывода полной системы гидродинамических уравнений приведен ниже. Идея применяемого феноменологического метода, основанного на использовании одних только законов сохранения и условия возрастания энтропии, принадлежит Л.Д.Ландау. Этот метод, позволяющий строго определить и диссипативные члены уравнений, был впервые применен И.М.Халатниковым для построения гидродинамики гелия (сначала [7] при условии потенциальности сверхтекуческого движения, а затем [8] и с учетом вихрей сверхтекучей скорости).

§ 2. Законы сохранения

Определяя обычным образом плотность потока массы как импульс единицы объема жидкости, запишем уравнения сохранения массы, энергии, импульса и момента:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{Q} = 0; \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0; \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(L_{ik} + S_{ik}) + \frac{\partial G_{ikl}}{\partial x_l} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь $L_{ik} = e_{ikl} L_l$, $S_{ik} = e_{ikl} S_l$, где L_l и S_l - псевдовекторы плотности гидродинамического и внутреннего моментов, а e_{ikl} - тензор Леви-Чивита; E - полная энергия единицы объема жидкости; \vec{Q} , Π_{ik} и G_{ikl} - подлежащие определению плотности потоков энергии, импульса и вращательного момента. Полная система гидродинамических уравнений содержит еще уравнение роста энтропии

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v} S) = \frac{R}{T}, \quad (2.5)$$

где R - диссипативная функция.

Вместо тензора потока импульса Π_{ik} введем тензор напряжений σ_{ik} согласно равенству

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.3) и пользуясь (2.1), получим уравнение движения в виде

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2.7)$$

Из определения тензора

$$L_{ik} = \rho [\vec{r} \vec{v}]_{ik} = \rho (x_i v_k - x_k v_i)$$

и уравнения (2.7) следует

$$\frac{\partial L_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_e} (\nu_e L_{ik}) = \frac{\partial}{\partial x_e} (x_i \sigma_{ke} - x_k \sigma_{ie}) + \sigma_{ik} - \sigma_{ki} . \quad (2.8)$$

Из сравнения (2.8) и (2.4) видно, что для жидкостей с $\bar{S} = 0$ тензор напряжений симметричен: $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$. Поэтому в гидродинамике Навье-Стокса, использующей симметричный тензор напряжений [9], закон сохранения вращательного момента не имеет самостоятельного значения - он является следствием уравнения движения (2.7), выражающего закон сохранения импульса.

Исключая из уравнения (2.4) производную $\partial L_{ik} / \partial t$ с помощью (2.8), получим

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial t} = \sigma_{ki} - \sigma_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_e} (G_{ike} - \nu_e L_{ik} + x_i \sigma_{ke} - x_k \sigma_{ie}) ,$$

или иначе

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_e} (\nu_e S_{ik}) = \sigma_{ki} - \sigma_{ik} - \frac{\partial q_{ike}}{\partial x_e} ; \quad (2.9)$$

здесь введен тензор плотности потока внутреннего момента q_{ike} , связанный с тензором G_{ike} соотношением

$$q_{ike} = G_{ike} - \nu_e (L_{ik} + S_{ik}) + x_i \sigma_{ke} - x_k \sigma_{ie} .$$

Уравнения (2.1), (2.2), (2.5), (2.7) и (2.9) образуют полную систему гидродинамических уравнений для жидкости с внутренним вращением. Однако физический смысл они приобретут лишь после того, как будет выяснен вид неизвестных членов \bar{Q} , σ_{ik} , q_{ike} и R .

§ 3. Термодинамические соотношения

Введем локальную систему отсчета Σ' , в которой скорость данного элемента жидкости равна нулю. Эта система вращается отно-

сительно лабораторной Σ с угловой скоростью $\vec{\Omega} = 1/2 \text{ rot } \vec{v}$. Объемные плотности энергии в рассматриваемых системах отсчета связаны известным соотношением [10]

$$E = E' + (\vec{L} + \vec{S}) \vec{\Omega} \quad (3.1)$$

Для дальнейшего удобно записать E еще одним способом. В системе Σ' наряду с плотностью полной энергии E' введем в рассмотрение внутреннюю энергию жидкости U , включающую в себя энергию скрытого вращения. Тогда в неподвижной системе Σ внутренняя энергия будет $U + \vec{S} \vec{\Omega}$, и, определяя E как сумму кинетической и внутренней энергии жидкости, получим

$$E = \frac{1}{2} \rho v^2 + \vec{S} \vec{\Omega} + U \quad (3.2)$$

Полный момент импульса связан с энергией E' соотношением [10]

$$\vec{L} + \vec{S} = - \frac{\partial E'}{\partial \vec{\Omega}} ; \quad (3.3)$$

производная берется здесь при фиксированных значениях плотности, энтропии и внутреннего момента \vec{S} . Последний должен рассматриваться как независимая переменная, которая только в равновесии является функцией от $\vec{\Omega}$. (Аналогичным образом обстоит дело в ферромагнетике: нашим \vec{S} и $\vec{\Omega}$ там соответствует намагниченность \vec{M} и поле \vec{H}). Интегрируя (3.3) по $\vec{\Omega}$ и сравнивая получающееся из (3.1) выражение для E с (3.2); находим

$$U = \tilde{U} - \vec{S} \vec{\Omega}, \quad (3.4)$$

где \tilde{U} - некоторая функция плотности среды, энтропии и внутреннего момента \vec{S} . Разложение скалярной функции \tilde{U} по степеням этого вектора содержит, очевидно, лишь члены четных степеней; с точностью до \vec{S}^2 имеем

$$U = U_0(\rho, S) + \frac{\vec{S}^2}{2I} - \vec{S} \vec{\Omega} ; \quad (3.5)$$

(здесь U_0 зависит только от энтропии и плотности среды). Условие $\partial U / \partial \vec{S} = 0$ определяет равновесное значение $\vec{S} = I \vec{\Omega}$.

так что \bar{I} имеет смысл объемной плотности момента инерции.

Из (3.5) следует термодинамическое тождество для внутренней энергии:

$$dU = \rho T ds + w d\rho + I^{-1}(\bar{S} - I\bar{\Omega})d\bar{S} - \bar{S} d\bar{\Omega}, \quad (3.6)$$

где $s = S/\rho$ и w - энтропия и тепловая функция единицы массы. Пользуясь (3.6) и определением энтальпии $w = \rho^{-1}(U + p)$, получаем выражение для дифференциала давления

$$dp = -\rho T ds + \rho dw - I^{-1}(\bar{S} - I\bar{\Omega})d\bar{S} - \bar{S} d\bar{\Omega}, \quad (3.7)$$

которое в полностью покоящейся жидкости - $\bar{S} = \bar{\Omega} = 0$ - переходит в обычное термодинамическое соотношение

$$dw = T ds + \rho^{-1} dp.$$

§ 4. Вывод уравнений

Перейдем к определению неизвестных членов в гидродинамических уравнениях. Продифференцируем энергию E (3.2) по времени; пользуясь тождеством (3.6), получим

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left(\frac{v^2}{2} + w\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\bar{S}}{I} \frac{\partial \bar{S}}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Входящие сюда производные по времени можно исключить с помощью законов сохранения соответствующих величин и закона возрастания энтропии. Подставляя в (4.1) производные $\partial \rho / \partial t$ и $\partial \bar{v} / \partial t$ из (2.1) и (2.7), имеем

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\rho \bar{v} \nabla \frac{v^2}{2} - \bar{v} \nabla p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} -$$

$$- \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \operatorname{div} (\rho \bar{v}) + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\bar{S}}{I} \frac{\partial \bar{S}}{\partial t}; \quad (4.2)$$

из тензора напряжений σ_{ik} здесь выделено давление:

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \sigma'_{ik}. \quad (4.3)$$

Член с ∇p в (4.2) преобразуется посредством тождества (3.7). Выделяя в правой части члены вида div , получим, с учетом (2.1), (2.5) и (2.9),

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \left[\rho \bar{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) + \bar{v} (\bar{S} \bar{\Omega}) - (\bar{v} \sigma') + I^{-1} (\bar{S} g) \right] =$$

$$= R - \left[\sigma'_{ik} + \frac{\bar{S}}{I} (\bar{S} - I \bar{\Omega}) \delta_{ik} \right] \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{S_{ik}}{I} \right) + \frac{g_{ik}}{I} \frac{\partial S_i}{\partial x_k}. \quad (4.4)$$

Здесь введены обозначения $(\bar{v} \sigma')$ и $(\bar{S} g)$ для векторов с компонентами $v_k \sigma'_{ik}$ и $S_k g_{ik}$, где $g_{ik} = 1/2 \cdot \epsilon_{mni} g_{mnk}$. Сравнивая (4.4) с уравнением сохранения энергии (2.2), находим:

$$\bar{Q} = \rho \bar{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) + \bar{v} (\bar{S} \bar{\Omega}) - (\bar{v} \sigma') + I^{-1} (\bar{S} g); \quad (4.5)$$

$$R = \left[\sigma'_{ik} + \frac{\bar{S}}{I} (\bar{S} - I \bar{\Omega}) \delta_{ik} \right] \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{I} (S_{ik} - \right.$$

$$\left. - I \Omega_{ik}) \right] - \frac{g_{ik}}{2I} \left[\frac{\partial S_i}{\partial x_k} + \frac{\partial S_k}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial S_k}{\partial x_i} - \frac{\partial S_i}{\partial x_k} \right) \right], \quad (4.6)$$

где

$$\Omega_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right).$$

В силу закона возрастания энтропии диссипативная функция R должна быть положительной. Из этого требования следует наиболее

общий вид тензоров \bar{b}'_{ik} и g_{ik} . Ограничиваясь линейными по градиентам членами и учитывая определение (4.3), получим

$$\bar{b}_{ik} = - \left[p + \frac{\bar{S}}{I} (\bar{S} - I \bar{\Omega}) \right] \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_e}{\partial x_e} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_e}{\partial x_e} + \frac{1}{2\tau_s} (S_{ik} - I \Omega_{ik}); \quad (4.7)$$

$$g_{ik} = -\lambda_1 \left(\frac{\partial S_i}{\partial x_k} + \frac{\partial S_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial S_e}{\partial x_e} \right) - \lambda_2 \delta_{ik} \frac{\partial S_e}{\partial x_e} + \lambda_3 \left(\frac{\partial S_k}{\partial x_i} - \frac{\partial S_i}{\partial x_k} \right). \quad (4.8)$$

В этих выражениях выделены, как обычно, симметричные комбинации производных с нулевым следом (члены с коэффициентами η и λ_1). Обусловленная внутренним вращением добавка к тензору напряжений состоит из двух частей: перенормировки давления $(\bar{S} - I \bar{\Omega}) \bar{S} / I$ и диссипативного члена $(2\tau_s)^{-1} (S_{ik} - I \Omega_{ik})$. Последний является антисимметричным тензором, так что в целом тензор напряжений оказывается несимметричным.

Подставляя (4.7) и (4.8) в (4.6), находим

$$R = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_e}{\partial x_e} \right)^2 + \zeta (\text{div } \vec{v})^2 + \frac{1}{I\tau_s} (\bar{S} - I \bar{\Omega})^2 + \frac{\lambda_1}{2I} \left(\frac{\partial S_i}{\partial x_k} + \frac{\partial S_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial S_e}{\partial x_e} \right)^2 + \frac{\lambda_2}{I} (\text{div } \vec{S})^2 + \frac{\lambda_3}{2I} (\text{rot } \vec{S})^2. \quad (4.9)$$

Для обеспечения положительности этой квадратичной формы должны выполняться условия:

$$\eta, \zeta, \tau_s, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0. \quad (4.10)$$

Окончательно уравнения движения жидкости с внутренним вращательным моментом запишутся так:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = - \nabla \left[p + \frac{\vec{S}}{I} (\vec{S} - I \vec{\Omega}) \right] + \left(\eta + \frac{I}{4\tau_s} \right) \Delta \vec{v} +$$

$$+ \left(\zeta + \frac{\eta}{3} - \frac{I}{4\tau_s} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v} + \frac{1}{2\tau_s} \operatorname{rot} \vec{S}; \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{S} = - \frac{1}{\tau_s} (\vec{S} - I \vec{\Omega}) - \vec{S} \operatorname{div} \vec{v} -$$

$$- D_1 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{S} + D_2 \nabla \operatorname{div} \vec{S} \quad (4.12)$$

$$(D_1 \equiv \lambda_1 + \lambda_3, \quad D_2 \equiv \lambda_2 + 4\lambda_1/3).$$

Вместе с уравнениями непрерывности (2.1) и роста энтропии (2.5) они образуют полную систему гидродинамических уравнений. Система содержит пять независимых кинетических коэффициентов: кроме обычных сдвиговой η и объемной ζ вязкостей появляется время релаксации τ_s и коэффициенты "поперечной" D_1 и "продольной" D_2 диффузии внутреннего момента импульса.

Уравнения несколько упрощаются, если жидкость можно считать несжимаемой ($\operatorname{div} \vec{v} = 0$):

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = - \nabla \left[p + \frac{\vec{S}}{I} (\vec{S} - I \vec{\Omega}) \right] +$$

$$+ \left(\eta + \frac{I}{4\tau_s} \right) \Delta \vec{v} + \frac{1}{2\tau_s} \operatorname{rot} \vec{S}; \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{S} = - \frac{1}{\tau_s} (\vec{S} - I \vec{\Omega}) + D \Delta \vec{S}; \quad (4.14)$$

(здесь $D_1 = D_2 \equiv D$).

§ 5. Примеры применения уравнений движения

Рассмотрим колебательное движение несжимаемой жидкости, вызванное, например, малыми гармоническими колебаниями погруженного в нее твердого тела. Уравнения (4.13)-(4.14) в этом случае могут быть линеаризованы [9] -

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p + \left(\eta + \frac{I}{4\tau_s} \right) \Delta \vec{v} + \frac{1}{2\tau_s} \text{rot } \vec{S};$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_s} (\vec{S} - I\vec{\Omega}) + D\Delta \vec{S}$$
(5.1)

- и допускают простое истолкование, если можно пренебречь диффузией внутреннего момента ($D=0$). Полагая тогда все величины пропорциональными $\exp(i\omega t)$, где ω - частота колебаний тела, получим, исключая \vec{S} из (5.1),

$$i\omega\rho \vec{v} = -\nabla p + \left(\eta + \frac{I}{4\tau_s} \cdot \frac{i\omega\tau_s}{1+i\omega\tau_s} \right) \Delta \vec{v}.$$

Коэффициент при $\Delta \vec{v}$ должен рассматриваться как первая вязкость; таким образом, наличие скрытого вращения эквивалентно в данной задаче замене обычной вязкости η на эффективную $\eta_e = \eta + \eta_r$, где

$$\eta_r = \frac{i\omega\tau_s}{1+i\omega\tau_s} \cdot \frac{I}{4\tau_s}.$$
(5.2)

Вращательная вязкость η_r исчезает при $\omega=0$ и стремится к предельному значению $I/4\tau_s$ при $\omega \rightarrow \infty$. В области промежуточных частот ($\omega\tau_s \sim 1$) вязкость η_r обнаруживает дисперсию; это обстоятельство может быть использовано для ее экспериментального определения.

Покажем в заключение, как может быть найдено время релаксации внутреннего момента, когда носителями его являются взвешенные в жидкости твердые частицы (суспензия). Вычисления проведем для случая малых концентраций шарообразных частиц.

В качестве вспомогательной задачи определим момент сил трения, действующий на шар радиуса a , равномерно вращающийся с

угловой скоростью $\vec{\omega}_s$ в неограниченной жидкости с заданным на бесконечности вихрем скорости $\vec{\Omega}$. В сферических координатах, где $\vec{\omega}_s$ и $\vec{\Omega}$ направлены вдоль полярной оси, скорость жидкости равна (в приближении Стокса) [9]:

$$v_\varphi \equiv v = r \sin \vartheta \left[\Omega - (\Omega - \omega_s) a^3 / r^3 \right].$$

На единицу поверхности шара действует сила трения:

$$\eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)_{r=a} = 3\eta (\Omega - \omega_s) \sin \vartheta;$$

полный момент этой силы

$$8\pi a^3 \eta (\Omega - \omega_s) = 6\eta \mathcal{V} (\Omega - \omega_s) \quad (5.3)$$

(\mathcal{V} - объем шара).

Рассмотрим теперь нестационарную задачу. Пусть жидкость вращается как целое с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$. В некоторый момент времени в начало координат помещается шарик. Момент сил трения, действующий на него со стороны жидкости, приведет к изменению его угловой скорости $\vec{\omega}_s$ от нулевого ее значения в начальный момент до максимальной величины $\vec{\Omega}$ (полное увлечение шарика жидкостью) по прошествии времени порядка τ_s .

Приравнявая производную по времени от вращательного импульса шарика к моменту сил (5.3), получим уравнение

$$I_0 \frac{d\vec{\omega}_s}{dt} = 6\eta \mathcal{V} (\vec{\Omega} - \vec{\omega}_s),$$

где $I_0 = 0.4 \rho_s \mathcal{V} a^2$ - момент инерции; ρ_s - плотность шара. Ввиду предполагаемой малости объемной концентрации взвеси $\varphi = n \mathcal{V}$ (здесь n - плотность числа частиц), внутренний момент импульса единицы объема суспензии можно записать как $\vec{S} = I \vec{\omega}_s$, где $I = n I_0$ - объемная плотность момента инерции. В этих обозначениях последнее уравнение принимает вид

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = - \frac{15 \eta}{a^2 \rho_s} (\vec{S} - I \vec{\Omega}). \quad (5.4)$$

Сравнивая уравнения (5.4) и (4.14), находим

$$\tau_s = \frac{a^2 \rho_s}{15 \eta}, \quad I = \frac{2}{5} a^2 \rho_s \varphi. \quad (5.5)$$

При вычислении τ_s здесь не учитывалась диффузия взвешенных в жидкости частиц. Такой подход правомерен, если "диффузионное" время $\tau_D \sim a^2/D$, в течение которого шарик при броуновском движении смещается на расстояние порядка своих линейных размеров, велико по сравнению с "вязким" временем τ_s . Легко показать, что это условие - $a^2 \gg D\tau_s$ - всегда выполняется. Подстановкой $D \sim kT/\eta a$ (соотношение Эйнштейна) и τ_s из (5.5) оно сводится к неравенству $a \gg \rho_s kT/\eta^2$, правая часть которого для нормальных жидкостей ($\eta \geq 10^{-2}$ г/см.с) и комнатных температур не превышает 10^{-9} см.

В заключение заметим, что предельное (при $\omega\tau_s \gg 1$) значение вращательной вязкости суспензии (5.2) равно:

$$(\eta_r)_{\max} = \frac{I}{4\tau_s} = \frac{3}{2} \eta \varphi. \quad (5.6)$$

Эта величина имеет тот же порядок, что и эйнштейновская поправка к вязкости $5/2 \eta \varphi$, получающаяся [9] без учета собственного вращения частиц взвеси.

Глава 2. ПАРАМАГНИТНЫЕ ЖИДКОСТИ

§ 6. Связь магнитных и вращательных механических степеней свободы

Магнитный момент парамагнитной молекулы обусловлен некомпенсированными спиновыми и орбитальными моментами электронов, то есть имеет чисто квантовую природу. В пренебрежении релятивистскими взаимодействиями энергетические уровни молекулы вырождены по направлениям ее магнитного момента: ориентация последнего не зависит от состояния вращения молекулы как целого (спин "свободен"). Таким образом, в этом приближении разорвана связь между магнитными и вращательными механическими степенями свободы. При учете релятивистских эффектов в молекуле возникает взаимодействие "спин-ось", снимающее вырождение вращательных термов по направлениям магнитного момента [11]. Такая молекула обнаруживает гиромагнитные свойства - ее магнитный и полный механический моменты связаны соотношением

$$\vec{\mu} = \gamma_0 \vec{S}, \quad (6.1)$$

где величина гиромагнитного отношения γ_0 зависит, конечно, от вещества.

При достаточно высоких температурах вращательный момент молекулы велик: $S \sim \sqrt{I_0 kT} \gg \hbar$, где I_0 - момент инерции молекулы, \hbar - постоянная Планка. В этом случае энергия взаимодействия "спин-ось" мала по сравнению с энергией вращательного движения (тип связи δ по классификации Гунда [11]), и можно показать [12], что $\gamma_0 \approx 2\mu_0/S$, где μ_0 - магнетон Бора. Любопытно, что гиромагнитными свойствами обладают и непарамагнитные молекулы, что связано с фактом существования малого магнитного момента, который возникает при вращении ядер вокруг центра инерции и не компенсируется диамагнетизмом электронов оболочки; при этом [13]

$$\gamma_0 \sim \mu_p / \hbar, \quad \text{где } \mu_p \text{ - ядерный магнетон Бора.}$$

Статистическое усреднение соотношения (6.1) показывает, что гиромангнитная связь сохраняется и для макроскопических величин — объемных плотностей внутреннего механического \bar{S} и магнитного \bar{M} моментов:

$$\bar{M} = \gamma \bar{S} \quad (6.2)$$

с некоторым эффективным значением гиромангнитного отношения γ . Такого типа зависимость выполняется практически для всех молекулярных жидкостей и газов.

Соотношение (6.2) открывает интересную возможность посредством магнитного поля воздействовать на движение жидкости. Действительно, непосредственно формируя \bar{M} , магнитное поле порождает тем самым внутренний момент импульса, который может затем частично трансформироваться в вихревое движение (гидродинамический аналог эффекта Эйнштейна-де Гааза). Возможен и обратный гиромангнитный эффект (аналог эффекта Барнетта): при переходе части гидродинамического движения в "скрытую" форму \bar{S} жидкость, согласно (6.2), намагничивается.

§ 7. Уравнения движения

Полную систему гидродинамических уравнений для жидкости с гиромангнитными свойствами можно вывести феноменологически вполне строго [14], так как уравнение переноса вращательного импульса \bar{S} (2.9) преобразуется с помощью (6.2) в уравнение движения намагниченности.

При выводе уравнений движения используются законы сохранения (2.1), (2.2), (2.7), (2.9), возрастания энтропии (2.5) и уравнения поля в непроводящей среде:

$$\text{rot } \bar{H} = 0; \quad \text{div} (\bar{H} + 4\pi \bar{M}) = 0. \quad (7.1)$$

Чтобы получить необходимые термодинамические соотношения, вновь обратимся к формуле (3.1), связывающей объемные плотности

энергии E и E' в неподвижной и вращающейся системах отсчета. Для E' справедливы формулы [10, 15]

$$-\frac{\partial E'}{\partial \vec{\Omega}} = \vec{L} + \vec{S}; \quad -\frac{\partial E'}{\partial \vec{H}} = \frac{\vec{B}}{4\pi} = \frac{\vec{H}}{4\pi} + \vec{M}; \quad (7.2)$$

производные берутся при фиксированных значениях \vec{M} (или \vec{S}), энтропии и плотности жидкости. При переходе от неподвижной системы отсчета к вращающейся \vec{H} и \vec{M} оставлены без изменения. В отсутствие внешнего электрического поля преобразование указанных величин привело бы к поправкам порядка $(v/c)^2$. Заметим еще, что здесь не делается различия между магнитным полем, в котором находится данная молекула, и приложенным полем \vec{H} . Такое приближение вполне оправданно для жидкостей и газов, поскольку из-за интенсивной вращательной и поступательной диффузии молекул в этих средах локальные поля сглаживаются до очень малой величины.

Интегрируя (7.2) и принимая во внимание (6.2), найдем

$$E' = \tilde{U}(\rho, s, \vec{M}) - \vec{M} \left(\vec{H} + \frac{\vec{\Omega}}{\gamma} \right) - \frac{H^2}{8\pi} - \int \vec{L} d\vec{\Omega}.$$

Введем в рассмотрение - ср. (3.2) - согласно равенству

$$E = \rho \frac{v^2}{2} - \frac{H^2}{8\pi} + \vec{S} \vec{\Omega} + U \quad (7.3)$$

внутреннюю энергию жидкости U , включающую в себя энергию скрытого вращения и намагниченности. (Знак минус перед вторым слагаемым в (7.3) связан с тем, что в качестве независимой переменной термодинамического потенциала E - см. (7.2) - выбрано поле \vec{H} , а не индукция \vec{B}). Действуя, как в § 3, получим

$$U = \tilde{U} - \vec{M} \left(\vec{H} + \frac{\vec{\Omega}}{\gamma} \right).$$

Намагниченность парамагнитной жидкости всегда мала. Поэтому в разложении изотропной функции $\tilde{U}(\vec{M})$ по четным степеням вектора \vec{M} можно ограничиться квадратичным членом:

$$U = U_0(\rho, s) + \frac{\bar{M}^2}{2\chi} - \bar{M} \left(\bar{H} + \frac{\bar{\Omega}}{\gamma} \right). \quad (7.4)$$

Из условия $\partial U / \partial \bar{M} = 0$ определяется равновесная намагниченность

$$\bar{M} = \chi \left(\bar{H} + \frac{\bar{\Omega}}{\gamma} \right). \quad (7.5)$$

В равновесии внутренняя энергия (7.4) должна иметь минимум; отсюда следует положительность магнитной восприимчивости χ вращающихся молекул ("гиропарамагнетизм"). Как видно из последней формулы, роль эффективного поля играет при этом

$$\bar{H}_e = \bar{H} + \frac{\bar{\Omega}}{\gamma}. \quad (7.6)$$

Таким образом, вихрь гидродинамической скорости $\text{rot } \vec{v} = 2\bar{\Omega}$ по своему воздействию на магнитные свойства жидкости эквивалентен магнитному полю напряженности $\bar{\Omega}/\gamma$: в отсутствие внешнего поля намагниченность движущегося парамагнетика отлична от нуля:

$$\bar{M} = (\chi/\gamma) \bar{\Omega}.$$

Выражение для U (7.4) должно при $\bar{H} = 0$ совпадать с (3.5), то есть имеет место равенство $\bar{M}^2/2\chi = \bar{S}^2/2I$. Исключая отсюда \bar{M} с помощью (6.2), получаем формулу

$$I = \chi/\gamma^2, \quad (7.7)$$

связывающую объемную плотность момента инерции $I = nI_0$ с объемной магнитной восприимчивостью среды и гиромагнитным отношением. При не слишком низких температурах, когда вращение молекул квазиклассично, $\chi = n\bar{\mu}^2/3kT$, где $\bar{\mu} = \gamma\bar{S}$ - эффективный магнитный момент молекулы. Подставляя χ в (7.7), находим (в расчете на одну молекулу) $I_0 = \bar{S}^2/3kT$. Таким образом, для вращательной энергии молекулы получается, как и должно быть,

$$\frac{\bar{S}^2}{2I_0} = \frac{3}{2}kT.$$

В случае двухатомной молекулы I_0 входит в эту формулу с коэф-

коэффициентом $2/3$ [13], так что для вращательной энергии вместо $1.5 kT$ получается kT (число вращательных степеней свободы равно двум).

Из (7.4) следует термодинамическое тождество для внутренней энергии:

$$dU = \rho T ds + w d\rho + \chi^{-1}(\bar{M} - \chi \bar{H}_e) d\bar{M} - \bar{M} d\bar{H}_e, \quad (7.8)$$

где эффективное поле \bar{H}_e определено формулой (7.6).

Дифференцируя по времени энергию E (7.3) с учетом (7.8) и действуя далее, как в § 4, можно вывести уравнения движения, то есть определить диссипативную функцию \mathcal{R} и вид неизвестных членов в законах сохранения. При этом уравнение (2.9), выражающее закон сохранения вращательного момента, преобразуется с помощью (6.2) в уравнение движения намагниченности:

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_p} (v_p M_{ik}) = -\gamma (\sigma_{ik} - \sigma_{ki} + \frac{\partial}{\partial x_p} g_{ike}), \quad (7.9)$$

где антисимметричный тензор M_{ik} связан с аксиальным вектором плотности магнитного момента \bar{M} соотношением $M_{ik} = e_{ike} M_e$. После простых вычислений (они не приводятся здесь, так как получающийся результат достаточно очевиден) для вектора потока энергии \bar{Q} и диссипативной функции \mathcal{R} вместо (4.5) и (4.6) находим [14]:

$$\begin{aligned} \bar{Q} = \rho \bar{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - \frac{1}{4\pi} [\bar{H} [\bar{v} \bar{B}]] + \bar{v} (\bar{M} \bar{H}_e) - \\ - (\bar{v} \sigma') + \frac{\gamma}{\chi} (\bar{M} - \chi \bar{H}, g); \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \left[\sigma'_{ik} + \frac{\bar{M}}{\chi} (\bar{M} - \chi \bar{H}_e) \delta_{ik} - \frac{1}{4\pi} (H_i B_k - \frac{H^2}{2} \delta_{ik}) \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\gamma}{\chi} (M_{ik} - \chi H_{ik}^{(e)}) \right] - \\ - \frac{\delta}{2\chi} g_{ik} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (M_i - \chi H_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (M_k - \chi H_k) - \left(\frac{\partial M_k}{\partial x_i} - \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.11)$$

В жидком парамагнетике причиной ориентации молекул является магнитное поле \vec{H} . При учете гиромангнитных свойств среды включается и другой механизм ориентации - взаимодействие между собственным вращением молекул и поступательным движением их центров инерции; формула (7.6) для эффективного поля \vec{H}_e суммирует вклады обоих механизмов. В отсутствие внешнего поля гидродинамический фактор ориентации молекул оказывается единственным ($\vec{H}_e = \overline{\Omega} / \gamma$), что полностью соответствует ситуации, рассмотренной в § I. Действительно, выражение для \mathcal{R} (7.II) превращается в (4.6), если положить в нем $\vec{H} = 0$ и воспользоваться соотношениями (6.2) и (7.7). Различие между формулами (4.6) и (7.II) для диссипативной функции связано с действием магнитного поля на жидкий парамагнетик; при этом $\overline{\Omega}$ в (4.6) заменяется на $\gamma \vec{H}_e$ и рядом с σ'_{ik} появляется максвелловский тензор напряжений:

$$\sigma_{ik}^{(m)} = \frac{1}{4\pi} (H_i H_k - \frac{H^2}{2} \delta_{ik}). \quad (7.I2)$$

Представляя тензор напряжений $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(s)} - p \delta_{ik}$ в виде суммы симметричной и антисимметричной частей

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(s)} + e_{ikl} \sigma_l,$$

получаем из требования положительности диссипативной функции (7.II) наиболее общие выражения для $\vec{\sigma}$, $\sigma_{ik}^{(s)}$ и g_{ik} :

$$\vec{\sigma} = -\frac{1}{2} [\vec{M} \vec{H}] + \frac{\omega_1 \chi}{M^2} [\vec{M} [\vec{M} \vec{H}_e]] + \frac{\omega_2}{M^2} \vec{M} (\vec{M}, \vec{M} - \chi \vec{H}_e); \quad (7.I3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}^{(s)} = & - \left[\rho + \frac{\vec{M}}{\chi} (\vec{M} - \chi \vec{H}_e) \right] \delta_{ik} + \frac{1}{4\pi} (H_i H_k - \frac{H^2}{2} \delta_{ik}) + \\ & + \frac{1}{2} (M_i H_k + M_k H_i) + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}; \quad (7.I4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\gamma g_{ik} = & \lambda_1 \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (M_i - \chi H_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (M_k - \chi H_k) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \frac{\partial}{\partial x_l} (M_l - \chi H_l) \right] + \lambda_2 \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_l} (M_l - \chi H_l) - \lambda_3 \left(\frac{\partial M_k}{\partial x_i} - \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right). \quad (7.I5) \end{aligned}$$

Легко убедиться, что при указанном выборе неизвестных величин диссипативная функция будет квадратичной формой, для обеспечения положительности которой должны выполняться условия

$$\omega_1, \omega_2, \eta, \zeta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Выпишем теперь уравнения гидродинамики непроводящей парамагнитной жидкости. Подстановка найденных выражений для σ_{ik} и g_{ik} в (2.7) и (7.9) дает

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = & -\nabla \left[p + \frac{\vec{M}}{\chi} (\vec{M} - \chi \vec{H}_e) \right] + (\vec{M} \nabla) \vec{H} + \\ & + \left(\eta + \frac{\chi \omega_1}{4 \gamma^2} \right) \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} - \frac{\chi \omega_1}{4 \gamma^2} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v} + \frac{1}{2 \gamma} \left[\omega_2 + \right. \\ & \left. + (\omega_1 - \omega_2) \chi \frac{(\vec{M} \vec{H}_e)}{M^2} \right] \operatorname{rot} \vec{M} - \frac{\chi (\omega_1 - \omega_2)}{2 \gamma} \left[\vec{M}, \nabla \frac{(\vec{M} \vec{H}_e)}{M^2} \right]; \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{M} = & \gamma [\vec{M} \vec{H}] - \frac{\omega_1 \chi}{M^2} [\vec{M} [\vec{M} \vec{H}_e]] - \frac{\omega_2}{M^2} \times \\ & \times \vec{M} (\vec{M}, \vec{M} - \chi \vec{H}_e) - D_{\perp} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{M} + D_{\parallel} \nabla \operatorname{div} \vec{M} - \vec{M} \operatorname{div} \vec{v}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

При вычислении дивергенции тензора g_{ik} использованы уравнения магнитостатики (7.1), например,

$$\operatorname{div} (\vec{M} - \chi \vec{H}) = \operatorname{div} \vec{M} - \chi \operatorname{div} (\vec{B} - 4\pi \vec{M}) = \mu \operatorname{div} \vec{M},$$

где $\mu = 1 + 4\pi\chi$. В (7.17) введены обозначения

$$D_{\perp} = \lambda_1 + \lambda_3, \quad D_{\parallel} = \mu \left(\lambda_2 + \frac{4\lambda_1}{3} \right) \quad (7.18)$$

для коэффициентов поперечной D_{\perp} и продольной D_{\parallel} диффузии намагниченности.

В ходе вывода гидродинамических уравнений предполагалось постоянство магнитного поля во времени, так что не было необходимости в учете электрических полей, возникающих в результате индукции от переменного магнитного поля. Между тем, полученные уравне-

ния справедливы и для переменных \vec{H} при не слишком больших частотах его изменения: как показано в [15], § 60, индукционные эффекты несущественны, если

$$\omega^2 \ll \chi (c/l)^2$$

где ω - частота изменения поля, а l - характерный гидродинамический размер.

Система уравнений (7.16)-(7.17) содержит всего шесть кинетических коэффициентов; два из них (η и ξ) являются обычными коэффициентами вязкости, два - ω_1 и ω_2 - характеризуют релаксацию и два - D_1 и $D_{||}$ - диффузию магнитного момента. Для неподвижной жидкости следует положить в (7.17) $\vec{v} = 0$ и $\vec{H}_e = \vec{H}$. В постоянном магнитном поле, полагая $\vec{M} = \chi \vec{H} + \vec{m}$, где \vec{m} - малое отклонение намагниченности от равновесного значения, получаем для пространственно однородной ситуации уравнение

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial t} = \gamma [\vec{m} \vec{H}] - \omega_1 \vec{m}_1 - \omega_2 \vec{m}_2,$$

совпадающее с уравнением Блоха, используемым в теории парамагнитной [16] и ядерной магнитной [17] релаксации. Таким образом, уравнение (7.17) может рассматриваться как гидродинамическое обобщение уравнения Блоха с разными временами релаксации (ω_1^{-1} и ω_2^{-1}) для перпендикулярной и параллельной внешнему полю компонент намагниченности. При

$$\omega_1 = \omega_2 \equiv \tau^{-1} \tag{7.19}$$

уравнение (7.17) в случае покоящейся жидкости превращается в так называемое модифицированное уравнение Блоха [17] с одним временем релаксации

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \gamma [\vec{M} \vec{H}] - \frac{1}{\tau} (\vec{M} - \chi \vec{H}).$$

В дальнейшем будем считать условие (7.19) выполненным; тогда система (7.16)-(7.17) принимает вид

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = - \nabla \left[p + \frac{\vec{M}}{\chi} (\vec{M} - \chi \vec{H}_e) \right] + (\vec{M} \nabla) \vec{H} + (\eta + \frac{\chi}{4\gamma^2\tau}) \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} - \frac{\chi}{4\gamma^2\tau} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v} + \frac{1}{2\gamma\tau} \operatorname{rot} \vec{M}; \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{M} = \gamma [\vec{M} \vec{H}] - \frac{1}{\tau} (\vec{M} - \chi \vec{H}_e) - D_{\perp} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{M} + D_{\parallel} \nabla \operatorname{div} \vec{M} - \vec{M} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (7.21)$$

Выделившаяся здесь комбинация параметров $\chi/4\gamma^2\tau$ представляет собой коэффициент вращательной вязкости, который с помощью (7.7) можно представить в форме $I/4\tau$, ср. (5.6).

Сложная система гидродинамических уравнений, построенная выше феноменологическим путем, была выведена Ю.М.Каганом и Л.А.Максимовым [13] из кинетического уравнения. В их работе рассмотрен двухатомный газ в постоянном магнитном поле; вращательные степени свободы молекул учитывались классическим образом. Функция распределения f газа удовлетворяет уравнению [12]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(\vec{u}f) + \frac{\partial}{\partial \vec{s}} (\dot{\vec{s}}f) = -J, \quad \dot{\vec{s}} = [\vec{\mu} \vec{H}], \quad (7.22)$$

где \vec{u} - скорость молекулы, \vec{s} и $\vec{\mu}$ - ее вращательный и магнитный моменты, J - интеграл столкновений. Как показано в [13], получение полной системы гидродинамических уравнений (7.20)-(7.21) из кинетического уравнения (7.22) возможно лишь при отказе от обычного (приближенного) представления интеграла J в локальной форме. Нелокальность интеграла столкновений связана с тем, что радиус взаимодействия между молекулами, хотя и мал по сравнению с длиной свободного пробега, но имеет конечную величину.

Уравнения (7.20)-(7.21) упрощаются, если жидкость можно считать несжимаемой. Полная система гидродинамических уравнений принимает в этом случае вид

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \operatorname{div} (\vec{H} + 4\pi \vec{M}) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad (7.23)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = - \nabla \left[p + \frac{\vec{M}}{\chi} (\vec{M} - \chi \vec{H}_e) \right] +$$

$$+ (\vec{M} \nabla) \vec{H} + \left(\eta + \frac{\chi}{4\gamma^2\tau} \right) \Delta \vec{v} + \frac{1}{2\gamma\tau} \text{rot } \vec{M}; \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{M} = \gamma [\vec{M} \vec{H}] - \frac{1}{\tau} (\vec{M} - \chi \vec{H}_e) -$$

$$- D_{\perp} \text{rot rot } \vec{M} + D_{\parallel} \nabla \text{div } \vec{M}. \quad (7.25)$$

Полученные уравнения описывают сложное взаимодействие гидродинамических и магнитных явлений. В основе этих явлений лежат физические механизмы, принципиально отличающиеся от рассматриваемых в обычной магнитной гидродинамике [15]. Последняя изучает взаимодействие магнитного поля с электрическими токами в жидкости или плазме, так что эффекты магнитной гидродинамики целиком обусловлены проводимостью среды. Способность жидкостей к слабому намагничиванию ($\chi \ll 1$) никакой роли при этом не играет; в приближении магнитной гидродинамики магнитная проницаемость $\mu = 1 + 4\pi\chi$ обычно полагается равной единице.

Совершенно иначе обстоит дело в рассматриваемом случае непроводящих жидких парамагнетиков. Связь гидродинамических и магнитных движений в этих средах обеспечивается их магнитными свойствами - магнитной восприимчивостью жидкости и гиромагнетизмом ее молекул. Влияние намагниченности на течение жидкости определяется восприимчивостью χ и при $\chi = \vec{M} = 0$ уравнение (7.24) переходит в обычное уравнение Навье-Стокса. Воздействие течения на динамику намагничивания заключается в конвективном переносе магнитного момента - член $(\vec{v} \nabla) \vec{M}$ в уравнении (7.25) - и появлении "гиромагнитного" поля $\vec{\Omega}/\gamma$, входящего в \vec{H}_e . Объемная магнитная восприимчивость самых сильных жидких парамагнетиков имеет порядок величины 10^{-4} (для жидкого кислорода при 75°K $\chi = 3.3 \cdot 10^{-4}$ [18]); "гиромагнитное" поле при всех разумных значениях $\vec{\Omega}$ и $\gamma \sim 10^4$ (ядерные парамагнетики) не превышает Га. Таким образом, уравнения движения жидкости (7.24) и намагниченности (7.25) связаны слабо. Однако эта связь остается для непроводящих сред единственным механизмом, обеспечивающим взаимодействие гидродинамических и магнитных явлений. Жидкость с гиромагнитными свойствами весьма интересна в общезначимом аспекте как пример сплошной среды с внутренни-

ми степенями свободы, и ниже будет показано, что полученные в этом параграфе уравнения предсказывают ряд наблюдаемых эффектов.

§ 8. Стационарное течение в канале

Рассмотрим стационарное течение парамагнитной жидкости в длинном цилиндрическом канале радиуса \mathcal{R} . Причиной движения является постоянный градиент давления, направленный вдоль оси канала:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = A > 0.$$

В этих условиях обычная (немагнитная) жидкость движется со скоростью [9]

$$v_z = v(r) = \frac{A}{4\eta} (\mathcal{R}^2 - r^2), \quad v_r = v_\varphi = 0 \quad (8.1)$$

(течение Пуазейля).

Движение парамагнитной жидкости описывается системой уравнений (7.23)–(7.25). Покажем, что решение этой системы даже в отсутствие внешнего поля отличается от (8.1). Можно указать точное решение, в котором отличны от нуля только компоненты скорости $v_z = v(r)$ и намагниченности $M_\varphi = M(r)$. Последняя возникает из-за вихря скорости $\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\Omega}$, создающего эффективное магнитное поле $\vec{H}_e = \vec{\Omega}/\gamma$, похожее по своей геометрии на поле прямого тока. В самом деле, если скорость параллельна оси канала и зависит только от r , то

$$\Omega_\varphi = -\frac{1}{2} v'(r); \quad \Omega_r = \Omega_z = 0,$$

и, следовательно, изолиниями вихря $\vec{\Omega}$ ("силовыми линиями" поля \vec{H}_e) являются концентрические окружности $v'(r) = \text{const}$. Для указанных \vec{v} и \vec{M} уравнения (7.23) удовлетворяются тождественно, а уравнения (7.24) и (7.25) дают

$$\eta_e \left[r \left(v' + \frac{M}{2\gamma\tau\eta_e} \right) \right]' = -Ar; \quad \eta_e \equiv \eta + \eta_r; \quad \eta_r = \frac{\chi}{4\gamma^2\tau}; \quad (8.2)$$

$$M + \frac{\chi}{2\gamma} v' - \tau D_1 \left(M'' + \frac{M'}{r} - \frac{M}{r^2} \right) = 0. \quad (8.3)$$

Скорость и намагниченность должны оставаться конечными во всем сечении канала, включая его центр. На стенке канала ($r = R$) скорость должна обращаться в нуль (условие прилипания), а граничное условие для намагниченности можно получить из требования непрерывности нормальной компоненты плотности потока энергии \bar{Q} на поверхности твердого немагнитизирующего массива, в котором вырезан канал.

Принимая во внимание граничное условие для скорости $v(R) = 0$, получаем из (7.10) условие непрерывности потока энергии в виде $Q_r(R) = 0$, что, с учетом (7.15), приводит к формуле

$$(\lambda_1 - \lambda_3) M M' \Big|_{r=R} = 0. \quad (8.4)$$

Если пренебречь диффузией намагниченности, то есть положить в (7.15) все коэффициенты λ_i равными нулю, то граничное условие (8.4) удовлетворится тождественно. В рассматриваемом случае, согласно определению (7.18), $D_1 = 0$, так что из (8.3) следует

$$M(r) = -(\chi/2\gamma) v'(r),$$

а решение уравнения (8.2) для $v(r)$ совпадает с (8.1). Заметим, что при этом функции $M(r)$ и $M'(r)$ терпят конечный разрыв на стенках канала:

$$M(R) = \chi A R / 4\gamma\eta; \quad M'(R) = R^{-1} M(R).$$

При учете диффузии намагниченности, когда $\lambda_i > 0$ и нет случайного совпадения $\lambda_1 = \lambda_3$, граничное условие (8.4) становится существенным. Решение системы (8.2)-(8.3), ограниченное на оси канала и удовлетворяющее условию прилипания жидкости на стенке, имеет вид

$$v = \frac{A}{4\eta} (R^2 - r^2) + \frac{C}{2\alpha\gamma\tau\eta_e} \left[I_0(\alpha R) - I_0(\alpha r) \right];$$

$$M = \frac{\chi A r}{4\gamma\eta} + C I_1(\alpha r),$$
(8.5)

где I_n - функция Бесселя мнимого аргумента и $\alpha^2 = \eta/\eta_e \tau D_1$, а константа C должна быть определена из граничного условия для намагниченности. Соотношение (8.4), выражающее непрерывность нормальной компоненты потока энергии на поверхности канала, выполняется при граничных условиях для намагниченности как первого ($M(R)=0$), так и второго ($M'(R)=0$) рода. Окончательный выбор в пользу граничного условия первого рода будет обоснован несколько позже.

При $M(R)=0$ из (8.5) находим

$$v = \frac{A R^2}{4\eta} \left\{ \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \frac{2\eta r}{\eta_e \alpha R I_1(\alpha R)} \left[I_0(\alpha R) - I_0(\alpha r) \right] \right\};$$

$$M = \frac{\chi A R}{4\gamma\eta} \left[\frac{r}{R} - \frac{I_1(\alpha r)}{I_1(\alpha R)} \right].$$
(8.6)

Как видно, характер решений существенно зависит от величины αR - отношения радиуса канала к диффузионной длине $\alpha^{-1} \approx \sqrt{D_1 \tau}$. Профиль скорости парамагнитной жидкости заметно отличается от параболического (пуазейлевского) при $\alpha R \sim 1$ и переходит в (8.1) в предельных случаях больших и малых αR , но с разными коэффициентами вязкости:

при $\alpha R \gg 1$ $v \approx \frac{A}{4\eta} (R^2 - r^2);$

(8.7)

при $\alpha R \ll 1$ $v \approx \frac{A}{4\eta_e} (R^2 - r^2).$

Приведем еще формулу, определяющую расход жидкости в канале:

$$q = 2\pi\rho \int_0^R r v(r) dr = \frac{\pi\rho R^4 A}{8\eta} \left\{ 1 - \frac{4\eta_r}{\eta_e \alpha R} \left[\frac{I_0(\alpha R)}{I_1(\alpha R)} - \frac{2}{\alpha R} \right] \right\}.$$

Это выражение можно интерпретировать как формулу Пуазейля

$$q = \pi\rho R^4 A / 8\eta,$$

в которой, однако, коэффициент вязкости зависит теперь от радиуса канала:

$$\eta(R) = \eta \left\{ 1 - \frac{4\eta_r}{\eta_e \alpha R} \left[\frac{I_0(\alpha R)}{I_1(\alpha R)} - \frac{2}{\alpha R} \right] \right\}^{-1}. \quad (8.8)$$

В предельных случаях $\alpha R \rightarrow \infty$ (широкий канал) и $\alpha R \rightarrow 0$ (тонкий капилляр) получаем из (8.8) в согласии с (8.7):

$$\eta(\infty) = \eta, \quad \eta(0) = \eta_e.$$

то есть влияние вращательной вязкости $\eta_r = \eta_e - \eta$ на движение жидкости тем заметнее, чем тоньше капилляр. При конечных значениях αR имеем $\eta_e > \eta(\alpha R) > \eta$, так что относительный расход жидкости $q R^{-4}$ монотонно возрастает с увеличением радиуса канала.

Вернемся теперь к обоснованию граничного условия $M(R) = 0$. Как уже отмечалось выше, условие (8.4) удовлетворяется и при $M'(R) = 0$. Определяя из последнего условия константу C в (8.5), получаем для $M(R)$ отличное от нуля значение

$$M(R) = \frac{\chi A R}{4\eta\gamma} F(R); \quad F(R) = \frac{\alpha R I_0(\alpha R) - 2I_1(\alpha R)}{\alpha R I_0(\alpha R) - I_1(\alpha R)}. \quad (8.9)$$

Этим скачком азимутальной компоненты намагниченности определяется [15] поверхностная плотность тока $g_z = -c M(R)$, направленного вдоль образующей канала; таким образом, при $M'(R) = 0$ через любое поперечное сечение протекает поверхностный ток силы

$$G = -2\pi c R M(R). \quad (8.10)$$

Рассмотрим канал переменного сечения (составленный, например, из труб различного радиуса). При стационарном течении расход жидкости Q и полный ток G должны быть, очевидно, постоянны в любом сечении. В самом деле, зависимость $G(x) = G[R(x)]$ привела бы к тому, что на стенках канала (в местах его расширения или сужения) происходило бы накопление статического заряда с постоянной скоростью, равной $-\text{Div } \vec{q}$. Из (8.10) и сформулированного выше условия $G = \text{const}(x)$ следует

$$R M(R) = \text{const}(x). \quad (8.11)$$

Зависимость $M(R)$ определяется формулой (8.9) и требованием постоянного расхода $Q = \text{const}(x)$. Последнее позволяет исключить из (8.9) градиент давления, выразив его через Q и R . Получающееся выражение для $M(R)$ дает

$$R M(R) = \frac{Q x^2 \chi}{2\pi r \gamma} \cdot \frac{F(R)}{1 - (\eta_r/\eta_e) F(R)},$$

что при $R = R(x)$ находится в противоречии с (8.11). Таким образом, граничное условие второго рода $M'(R) = 0$ должно быть отброшено.

§ 9. Влияние продольного магнитного поля на течение Пуазейля

В присутствии однородного поля \vec{H}_0 , направленного вдоль оси канала, точного решения системы уравнений (7.23)-(7.25) найти не удастся. Для получения приближенного решения естественно воспользоваться теорией возмущений, поскольку задача содержит малый безразмерный параметр - магнитную восприимчивость χ , которой

как раз и определяется связь между уравнениями динамики жидкости (7.24) и движения намагниченности (7.25). Стационарное решение системы (7.23)-(7.25) строится ниже из рядов по степеням χ ; диффузией намагниченности пренебрегается ($D_1 = D_H = 0$).

В нулевом порядке теории возмущений из уравнения (7.25) следует $\vec{M}^{(0)} = 0$, а для скорости $\vec{v}^{(0)}$ получаем из (7.24) результат (8.1).

В первом порядке по χ из (7.25) находим

$$M_z^{(1)} = \chi H_0; \quad M_\varphi^{(1)} = -\frac{\chi}{2\gamma} (1 + \omega_H^2 \tau^2)^{-1} \frac{dv^{(0)}}{dr}; \quad (9.1)$$

$$M_r^{(1)} = \omega_H \tau M_\varphi^{(1)}; \quad (\omega_H = \gamma H_0),$$

а из уравнения $\text{div } \vec{B} = 0$ определяется

$$H_r^{(1)} = -4\pi M_r^{(1)}. \quad (9.2)$$

Для поправки первого приближения к скорости получаем из (7.24) уравнение

$$\eta \Delta \vec{v}^{(1)} + \eta_r \Delta \vec{v}^{(0)} + \frac{1}{2\gamma\tau} \text{rot } \vec{M}^{(1)} = 0,$$

которое после подстановки $\vec{M}^{(1)}$ из (9.1) принимает вид

$$\Delta \vec{v}^{(1)} = -\frac{\eta_r}{\eta} \cdot \frac{\omega_H^2 \tau^2}{1 + \omega_H^2 \tau^2} \Delta \vec{v}^{(0)}.$$

Решая это уравнение с граничным условием $\vec{v}^{(1)}(R) = 0$, находим

$$v_z^{(1)} = -\frac{\eta_r}{\eta} \cdot \frac{\omega_H^2 \tau^2}{1 + \omega_H^2 \tau^2} v_z^{(0)}; \quad v_r^{(1)} = v_\varphi^{(1)} = 0. \quad (9.3)$$

Суммируя (8.1) и (9.3), с точностью первого порядка по χ , получаем

$$v_z = v_z^{(0)} + v_z^{(1)} = \frac{A}{4\eta_H} (R^2 - r^2),$$

где

$$\eta_H = \eta + \frac{\omega_H^2 \tau^2}{1 + \omega_H^2 \tau^2} \eta_r.$$

Таким образом, магнитное поле не меняет в первом приближении профиля скорости, но приводит лишь к некоторому ее уменьшению (перенормировка вязкости).

Собственно гиромагнитный эффект - появление в продольном магнитном поле азимутальной компоненты скорости - обнаруживается во втором порядке теории возмущений: вращение жидкости возбуждается \pm -компонентой момента сил $[\overline{MH}]$, равной $-M_\varphi^{(1)} H_r^{(1)}$. Для $v_\varphi^{(2)} \equiv u(r)$ из (7.24) следует уравнение

$$\eta \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) - \frac{1}{2\gamma\tau} \frac{dM_\pm^{(2)}}{dr} + \frac{M_\varphi^{(1)} H_r^{(1)}}{r} = 0.$$

Подставляя сюда значение

$$M_\pm^{(2)} = -\gamma\tau M_\varphi^{(1)} H_r^{(1)},$$

найденное из (7.25), и исключая $M_\varphi^{(1)}$ и $H_r^{(1)}$ с помощью (9.1), (9.2) и (8.1), получим

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{\pi}{2\eta} \left(\frac{\chi A}{\gamma\eta} \right)^2 \frac{\omega_H \tau}{(1 + \omega_H^2 \tau^2)^2} r.$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим граничному условию $u(R) = 0$, является

$$v_\varphi^{(2)} = u(r) = -\frac{\pi}{\eta} \left(\frac{\chi A}{4\gamma\eta} \right)^2 \frac{\omega_H \tau}{(1 + \omega_H^2 \tau^2)^2} r (R^2 - r^2). \quad (9.4)$$

Итак, в присутствии осевого магнитного поля течение парамагнитной жидкости по круглой трубе становится двумерным: каждый элемент жидкости движется по винтовой линии, шаг которой

$$h = 2\pi r \frac{v_\pm(r)}{v_\varphi(r)} = \frac{8}{A} \left(\frac{\gamma\eta}{\chi} \right)^2 \frac{(1 + \omega_H^2 \tau^2)^2}{\omega_H \tau}$$

не зависит от ее радиуса ("твердый винт"). Как видно из (9.4), азимутальная скорость как функция H_0 имеет максимум при $\omega_H \tau = 1/\sqrt{3}$. Наличие максимума объясняется тем, что в отсутствие поля нет причины, вызывающей вращение жидкости, а в очень сильных полях ($\omega_H \tau \gg 1$) разрывается связь между \vec{v} и \vec{H} . В последнем случае из трех компонент намагниченности (9.1) остается одна $M_z = \chi H_0$, то есть жидкость оказывается однородно намагниченной вдоль оси канала. Из (9.4) также следует, что направление вращения жидкости не зависит от знака градиента давления и определяется исключительно направлением приложенного поля.

Глава 3. ГИРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЖИДКИХ ПАРАМАГНЕТИКАХ

§ 10. Парамагнитные аналоги эффектов Эйнштейна-де Гааза и Барнетта

Хорошо известны [15,19] классические гиромагнитные опыты Эйнштейна-де Гааза и Барнетта. В первом из них наблюдают возникновение вращения ферромагнитного образца в результате изменения его магнитного момента под действием внешнего магнитного поля. Во втором наблюдают изменение магнитного момента, вызванное механическим вращением ферромагнитного тела.

Существование обоих гиромагнитных эффектов обусловлено взаимодействиями типа "спин-решетка" или "орбита-решетка" между элементарными носителями магнетизма и кристаллической решеткой ферромагнетика. Благодаря этой связи вращение тела как целого передается атомным моментам и возникает намагниченность (эффект Барнетта) или, наоборот, перемагничивание вызывает вращение тела как целого (эффект Эйнштейна-де Гааза). Именно из гиромагнитных экспериментов по измерению магнетомеханического отношения и был сделан вывод о спиновой природе ферромагнетизма [19].

Принципиальная схема опыта Эйнштейна-де Гааза состоит в следующем [19]. Ферромагнитный образец цилиндрической формы, подвешенный за торец на тонкой упругой нити, при перемагничивании поворачивается вокруг оси симметрии на малый угол φ_0 . Этот поворот регистрируется по отклонению светового луча зеркальцем, жестко скрепленным с образцом. В типичных экспериментах начальное отклонение (или угловая амплитуда при резонансной раскачке крутильного маятника) измеряется угловыми минутами, так что при расстоянии до шкалы в несколько метров величина отклонения светового зайчика составляет доли сантиметра. Таким образом, определение гиромагнитных отношений по эффекту Эйнштейна-де Гааза требует измерения очень малых моментов сил, действующих на подвешенный цилиндрический образец. Для повышения точности измерений крутильный маятник помещают в вакуумную камеру [20], но как раз при этом обнаруживается в интервале давлений газа от 0.001 до 1 мм рт.столба малый аномальный момент сил, величина которого зависит от природы газа, а знак меня-

ется на обратный с изменением направления магнитного поля, параллельного оси цилиндра. Скотт и др. [21, 22] исследовали этот эффект, заменив ферромагнитный образец, используемый в гиромагнитных опытах, латунным стержнем. Было установлено, что аномальный момент сил пропорционален разности температур цилиндра и стенок вакуумной камеры (в опытах Эйнштейна-де Гааза ферромагнитный стержень нагревается в процессе перемагничивания).

Явление вращения в магнитном поле нагретого цилиндра обнаружено [22] более чем в двадцати молекулярных газах (NO , N_2 , NO_2 , O_2 , CO , Cl_2 и других). Почти во всех исследованных газах вращающий момент проходит через максимум при давлении около 0.03 мм рт.столба, то есть при средней длине свободного пробега молекул газа $\lambda = 0.2$ см. Соответствующие числа Кнудсена не слишком малы ($\lambda/l \sim 10^{-1}$, где l - характерный макроскопический размер), что указывает на кинетическую природу эффекта Скотта. Причиной его является, как показал Вольдман [23], несферичный характер отражения поляризованных полей вращающихся молекул от поверхности цилиндра (модель "резанного теннисного мяча").

Покажем, что эффект, подобный эффекту Скотта, но чисто гидродинамической природы, должен иметь место и в жидких парамагнетиках. На нагретый цилиндр, погруженный, например, в жидкий кислород, будет действовать в постоянном вертикальном магнитном поле момент сил, обусловленный, в конечном счете, гиромагнитными эффектами.

Как уже указывалось в § 6, в парамагнитной жидкости благодаря связи между \vec{M} и \vec{S} , с одной стороны, и между \vec{S} и $\vec{\Omega} = 1/2 \text{ rot } \vec{v}$ - с другой, возможны гидродинамические аналоги обоих гиромагнитных эффектов: вихревое движение намагничивает жидкость (эффект Барнетта), а магнитное поле, поляризуя молекулы среды, создает тем самым внутренний момент импульса \vec{S} , который может затем превращаться в вихревое движение (эффект Эйнштейна-де Гааза).

Обсуждаемый здесь гиромагнитный момент сил не является, однако, непосредственным аналогом эффекта Эйнштейна-де Гааза. Напомним, что возникновение вращающего момента ожидается в жидком парамагнетике в той же экспериментальной ситуации, в какой наблюдается в разреженном газе эффект Скотта. Но в условиях такого эксперимента переплетаются оба гиромагнитных эффекта, так как наряду с магнитным полем задается и вихревое движение жидкости, обусловленное конвекцией около нагретого цилиндра. У поверхности цилиндра образуется конвективный пограничный слой (см. рис. I) с компонента-

ми скорости U_r и U_z , зависящими от координат r и z . Вихрь скорости этого течения по своему воздействию на магнитные свойства эквивалентен внешнему полю $H_\varphi = \Omega_\varphi / \gamma$. Под влиянием "гиромангнитного поля" H_φ возникает компонента намагниченности $M_\varphi = (\chi/\gamma) \Omega_\varphi$. Таким образом, стационарное движение жидкости поддерживает в приложенном поле $H_z = H$ некоторый угол между векторами \vec{M} и \vec{H} . Обусловленный непараллельностью этих векторов момент сил и вызывает вращение жидкости вокруг цилиндра.

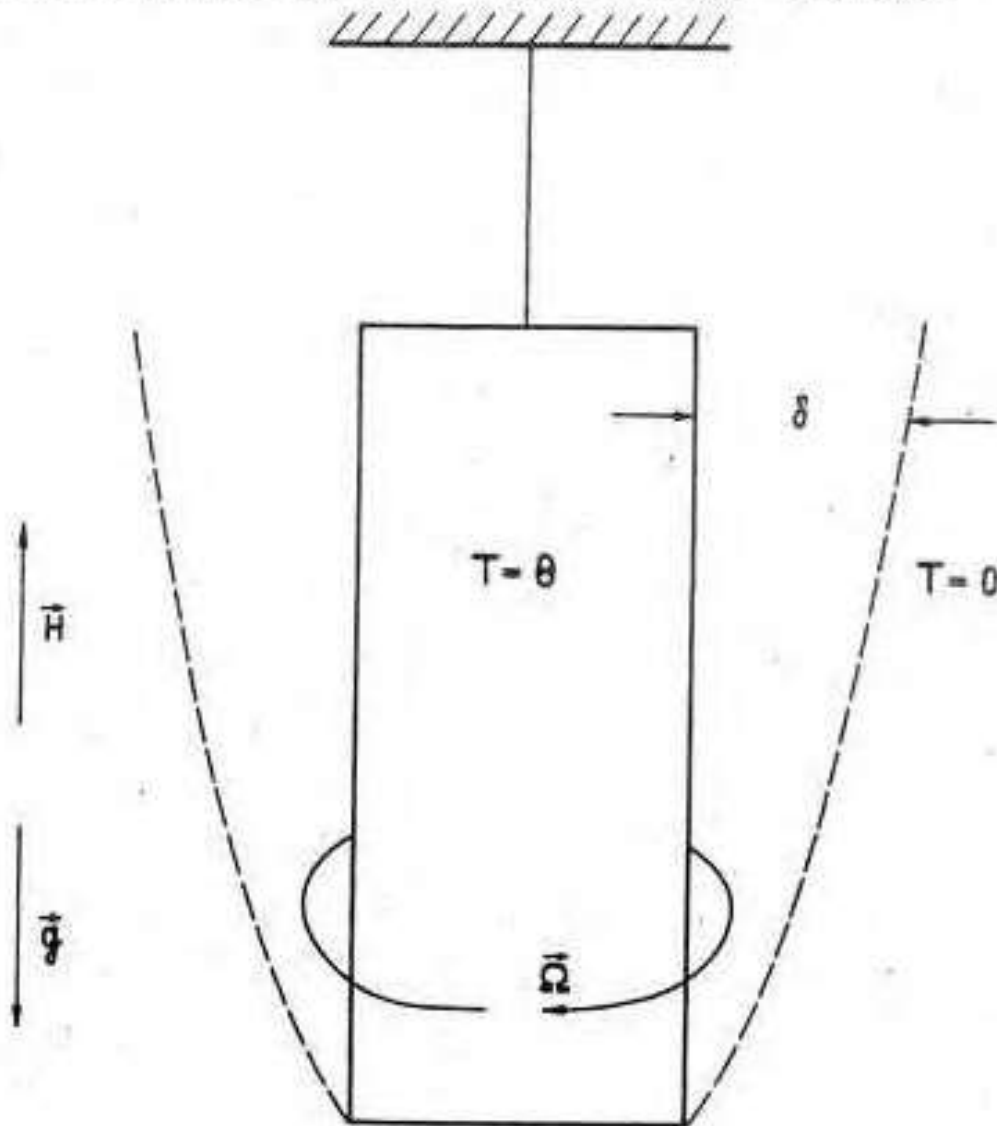


Рис. I

Вообще говоря, течение парамагнитной жидкости всегда сопровождается гиромангнитными эффектами. Так, в задаче, рассмотренной в § 9, вихрь скорости, создаваемый перепадом давлений на концах трубы, вызвал азимутальное намагничивание жидкости (аналог эффекта Барнетта), а наложение осевого магнитного поля приводило к ее винтовой

закрутке (аналог эффекта Эйнштейна-де Гааза). Близкая, по существу ситуация имеет место и в изучаемом ниже примере, где появление азимутальной компоненты скорости \vec{U}_φ также обусловлено взаимодействием \vec{M}_φ с \vec{H}_z . Различие носит чисто количественный характер: в силу другой геометрии основного течения - конвективный пограничный слой вместо течения Пуазейля - величина \vec{U}_φ оказывается пропорциональной первой степени χ , а не ее квадрату, как в § 9.

§ II. Течение жидкости около нагретого цилиндра

Для вычисления скорости \vec{U}_φ и связанного с ней момента сил трения [24], действующего на цилиндр, используем уравнения (7.23)-(7.25).

В уравнении для намагниченности

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{M} = \gamma [\vec{M} \vec{H}] - \frac{1}{\tau} (\vec{M} - \chi \vec{H}_e) \quad (\text{II.1})$$

член $(\vec{v} \nabla) \vec{M}$ всегда мал по сравнению с \vec{M}/τ . Например, в конвективном пограничном слое, о котором пойдет речь ниже, $v_r/v_z \sim \delta/\ell$ и потому

$$(\vec{v} \nabla) \vec{M} \sim \vec{M} \sqrt{g\beta\theta/\ell}.$$

(δ - толщина пограничного слоя, ℓ - высота цилиндра, β - коэффициент теплового расширения жидкости, θ - разность между температурой поверхности цилиндра и температурой жидкости вдали от него). При любых разумных значениях параметров θ и ℓ характерное "гидродинамическое" время $(\ell/g\beta\theta)^{1/2}$ не меньше 0.1с. Это на много порядков больше времени релаксации намагниченности τ (у жидких парамагнетиков с атомным парамагнетизмом $\tau \lesssim 10^{-10}$ с), так что членом $(\vec{v} \nabla) \vec{M}$ в (II.1) можно пренебречь. В стационарных условиях $\partial \vec{M}/\partial t = 0$ и уравнение (II.1) принимает вид

$$\vec{M} - \chi (\vec{H} + \vec{\Omega}_L/\gamma) = \tau \gamma [\vec{M} \vec{H}]. \quad (\text{II.2})$$

Для стационарного движения жидкости получаем из (7.24) с помощью (II.2) уравнение

$$\rho(\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} - \rho g \beta T + \frac{1}{2} \text{rot} [\vec{M} \vec{H}]. \quad (\text{II.3})$$

При записи этого уравнения учтена однородность приложенного поля. Кроме того, в правую часть (II.3) включена архимедова подъемная сила, вызывающая конвекционное движение.

Из уравнения (II.2) можно выразить векторное произведение $[\vec{M} \vec{H}]$ через $\vec{\Omega}$ и \vec{H} :

$$[\vec{M} \vec{H}] = \frac{\chi}{\gamma} [1 + (\tau \gamma H)^2]^{-1} \{ [\vec{\Omega} \vec{H}] - \tau \gamma [\vec{H} [\vec{\Omega} \vec{H}]] \}. \quad (\text{II.4})$$

Подставляя (II.4) в (II.3), получим уравнение движения, не содержащее \vec{M} .

К уравнениям (II.3) и (II.4) нужно присоединить еще стационарное уравнение теплопроводности в движущейся жидкости и условие несжимаемости

$$\vec{v} \nabla T = \alpha \Delta T, \quad \text{div} \vec{v} = 0, \quad (\text{II.5})$$

(α - коэффициент температуропроводности).

Определяемые уравнениями (II.3)-(II.5) скорость и температура могут быть разложены по степеням магнитной восприимчивости χ . В нулевом порядке член $\text{rot} [\vec{M} \vec{H}]$ в (II.3) исчезает, и уравнения

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} - \vec{g} \beta T; \quad (\nu = \eta/\rho); \quad (\text{II.6})$$

$$\vec{v} \nabla T = \alpha \Delta T; \quad \text{div} \vec{v} = 0,$$

описывают обычную свободную конвекцию возле нагретого цилиндра. При достаточно большой разности температур Θ цилиндра и жидкости толщина пограничного слоя $\delta \ll R$, где R - радиус цилиндра. В этом случае кривизной поверхности цилиндра можно пренебречь, и уравнения (II.6) приводят к известной задаче Польгаузена о конвективном пограничном слое на плоской вертикальной пласти-

не (см., например, [9,25]). Выберем начало прямоугольной системы координат на нижней кромке и направим ось x горизонтально, вдоль цилиндрической координаты r , а ось z - вертикально вверх. Из симметрии задачи ясно, что распределения скорости и температуры не зависят от координаты φ , и φ -компонента скорости отсутствует. С обычной для пограничного слоя точностью уравнения (II.6) запишутся в виде

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + g\beta T; \\ v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

с граничными условиями

$$\text{при } x=0 \quad v_x = v_z = 0, \quad T = \theta; \quad (\text{II.8})$$

$$\text{при } x \rightarrow \infty \quad v_x \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0,$$

(температура жидкости вдали от цилиндра принята за начало отсчета).

Задача (II.7)-(II.8) определяет температуру T и компоненты скорости v_x и v_z в нулевом по χ приближении. В первом приближении v_x, v_z и T получают поправки, которые, однако, из-за малости χ интереса не представляют. Качественно новым является в этом приближении появление азимутальной компоненты скорости v_y (в цилиндрических координатах - v_φ). Уравнение для v_y получается из общего уравнения (II.3) при подстановке в него [MH] из (II.4). Заметим, что поскольку правая часть формулы (II.4) уже содержит в коэффициенте первую степень χ , то $\bar{\Omega}$ в этой формуле должно определяться скоростью нулевого приближения:

$$\Omega_x = \Omega_z = 0; \quad \Omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right).$$

Принимая также во внимание характер движения в пограничном слое ($v_x \ll v_z, \partial/\partial x \gg \partial/\partial z$), получаем для v_y уравнение

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial x}, \quad (\text{II.9})$$

где

$$\varepsilon = \frac{\chi}{4\rho\gamma^2\tau} \cdot \frac{\omega_n\tau}{1 + \omega_n^2\tau^2}; \quad \omega_n = \gamma H. \quad (\text{II.10})$$

На поверхности неподвижного цилиндра ($x = 0$) и вдали от него ($x \rightarrow \infty$) должно выполняться условие $v_y = 0$.

Подчеркнем, что входящие в (II.9) компоненты скорости v_x и v_x определяются решением задачи в нулевом приближении. Таким образом, уравнение (II.9) является относительно v_y линейным неоднородным уравнением, в котором член с ε играет роль массовой плотности сторонних сил.

Существует, как известно [26], преобразование подобия, позволяющее свести задачу нулевого приближения (II.7)–(II.8) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Достигается это введением безразмерной независимой переменной

$$\xi = C \frac{x}{x^{1/4}}, \quad C = \left(\frac{g\beta\theta}{4\nu^2} \right)^{1/4}. \quad (\text{II.11})$$

Функцию тока стационарного движения Ψ и температуру T ищем в виде

$$\Psi(x, x) = 4\nu C x^{3/4} \psi(\xi), \quad T(x, x) = \theta \zeta(\xi). \quad (\text{II.12})$$

Компоненты скорости при этом равны

$$v_x = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \nu C x^{-1/4} (\xi \psi' - 3\psi);$$

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 4\nu C^2 x^{1/2} \psi'. \quad (\text{II.13})$$

Из (II.7) и (II.8) получаются для ψ и ζ уравнения

$$\psi''' + 3\psi\psi'' - 2\psi'^2 + \zeta = 0; \quad \zeta' + 3R\psi\zeta' = 0. \quad (\text{II.14})$$

с граничными условиями

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0; \quad \xi(0) = 1; \quad \psi'(\infty) = \xi(\infty) = 0. \quad (\text{II.15})$$

Единственным параметром в системе (II.14) является безразмерное отношение кинематической вязкости жидкости к ее температуропроводности - так называемое число Прандтля $P = \nu/\alpha$.

Результаты численного интегрирования задачи (II.14)-(II.15) для различных значений P можно найти, например, в книге Шлихтинга [26]. Профиль вертикальной скорости ψ' для $P = 1$ изображен на рис.2.

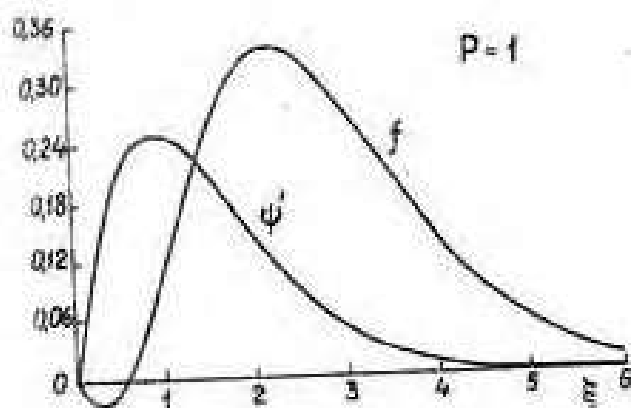


Рис.2

Условие применимости решения задачи Польгаузена к пограничному слою на вертикальном круглом цилиндре гласит: $\delta/R \ll 1$. Приведем оценку. Как видно из (II.11), толщина пограничного слоя $\delta \sim \xi^{1/4}/C$ достигает наибольшего значения $\delta_m \sim (\ell \nu^2 / g \beta \theta)^{1/4}$ у верхнего торца цилиндра. Для жидкого кислорода ($\nu = 2 \cdot 10^{-3}$ см²/с, $\beta = 4 \cdot 10^{-3}$ град⁻¹) при $R = 1$ см, $\ell \sim 10$ см и $\theta \sim 10^\circ$ имеем $\delta/R \sim 10^{-1}$.

Перейдем к отысканию y -компоненты скорости. Подставляя в (II.9) v_x и v_z из (II.13) и полагая

$$v_y = \varepsilon C x^{-1/4} f(\xi), \quad (\text{II.I6})$$

получим для f уравнение

$$f'' + 3\psi f' + \psi' f = (3\psi - \xi \psi')'', \quad (\text{II.I7})$$

которое должно решаться с граничными условиями

$$f(0) = f(\infty) = 0. \quad (\text{II.I8})$$

Задача (II.I7)-(II.I8) интегрировалась численно методом Рунге-Кутты [24] (решение ψ задачи нулевого приближения при этом также находилось численно). График функции f для $P = 1$ изображен на рис.2. Отметим наличие узла у f : жидкость вблизи цилиндра и вдали от него вращается в противоположных направлениях.

§ 12. Гиромагнитный момент сил

Определим момент действующих на цилиндр сил трения. В азимутальном направлении на единицу поверхности цилиндра действует сила трения $\eta (\partial v_y / \partial x)_{x=0}$. Из (II.I6) с помощью (II.II) находим

$$\eta \left. \frac{\partial v_y}{\partial x} \right|_{x=0} = \eta \varepsilon C^2 x^{-1/2} f'(0).$$

На весь цилиндр действует момент сил трения

$$M = 2\pi R^2 \eta \int_0^l \left. \frac{\partial v_y}{\partial x} \right|_{x=0} dx = 4\pi R^2 l^{1/2} \eta \varepsilon C^2 f'(0).$$

Подставляя сюда ε из (II.I0) и C из (II.II), имеем окончательно

$$m = \pi R^2 \frac{\chi}{2\gamma^2\tau} \cdot \frac{\omega_H \tau}{1 + \omega_H^2 \tau^2} f'(0) \sqrt{g\rho\theta} \ell. \quad (I2.I)$$

Заметим, что найденный момент сил является нечетной функцией от ω_H , то есть, как и в опыте Эйнштейна-де Гааза, меняет знак при изменении направления поля на обратное.

В молекулярных газах релаксация магнитного момента обеспечивается столкновениями молекул, так что время релаксации намагниченности τ определяется временем свободного пробега, то есть

$\tau = \eta/\rho$. Полагая магнитную восприимчивость газа равной $\chi = n\mu^2/3kT$, где μ - эффективный магнитный момент молекулы, и пользуясь уравнением состояния $p = nkT$, получим из (I2.I)

$$m = \frac{\pi R^2}{6\gamma} \left(\frac{\mu}{kT}\right)^2 \frac{\rho n}{1 + (\eta\gamma n/\rho)^2} f'(0) \sqrt{g\rho\theta} \ell. \quad (I2.2)$$

Сравнивая m с вращающим моментом m^s , наблюдаемым в разреженных газах (эффект Скотта), отметим сходство их зависимостей от n и различие - от ρ и θ . В обоих случаях момент сил как функция n имеет максимум при некотором значении $n/\rho = \text{const}$. Из (I2.2) видно, однако, что максимальное значение m , достигаемое в поле $n = \rho/\eta\gamma$ и равное

$$m_{\max} = \frac{\pi R^2}{12\eta} \left(\frac{\mu\rho}{\gamma kT}\right)^2 f'(0) \sqrt{g\rho\theta} \ell,$$

растет с давлением монотонно ($\sim p^2$), тогда как $m_{\max}^s(p)$ проходит через максимум при $p \sim 10^{-5}$ ат. С увеличением разности температур между цилиндром и газом m растет как $\theta^{1/2}$, а m^s - как θ .

В достаточно плотном парамагнитном газе ($p \sim 1$ ат) и, тем более, в жидкости время релаксации намагниченности столь мало, что условие $\omega_H \tau \ll 1$ выполняется в любых разумных полях. При этом τ вообще выпадает из (I2.I), и формула для момента сил принимает вид

$$\mathcal{M} = \pi R^2 \frac{\chi H}{2\gamma} f'(0) \sqrt{g\beta\theta l}. \quad (I2.3)$$

Интересно отметить, что вязкость жидкости входит в \mathcal{M} только через зависимость $f'(0)$ от числа Прандтля P . Эта зависимость, найденная в результате численного интегрирования уравнений (II.I4) и (II.I7), представлена графически на рис.3.

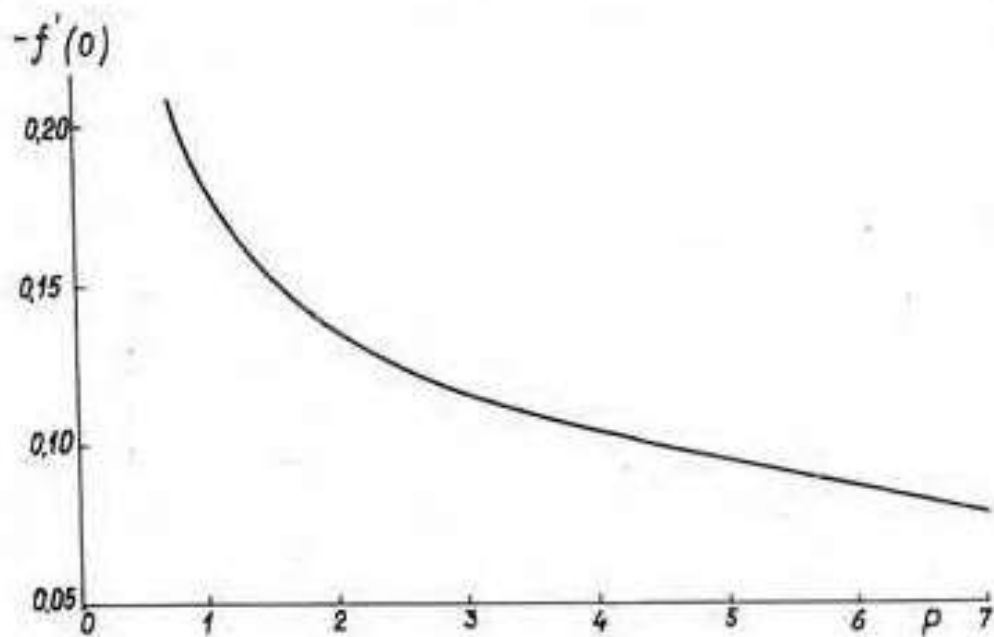


Рис.3

Момент сил должен достигать в жидкостях гораздо больших значений, чем в газах, так как магнитная восприимчивость пропорциональна плотности числа частиц - носителей магнитного момента. Далее, как видно из (I2.3), величина \mathcal{M} пропорциональна отношению χ/γ . Поэтому для обнаружения эффекта наиболее перспективен, по-видимому, кислород, в котором сочетаются большое χ с малым γ . Магнитная восприимчивость жидкого кислорода аномально велика ($\chi = 3.3 \cdot 10^{-4}$ при 75°K). Электронный спин молекулы O_2 связан с ее моментом импульса взаимодействием "спин-ось", причем связь эта такова, что гиромангнитное отношение γ на три порядка меньше, чем у свободных электронов, то есть оно того же порядка, что и для ядер. Скотт, Омит и Фрэй [22] получили для вращательного g -фактора молекулы O_2 значение $g_{rot} = -9$ (эффективный магнитный момент измерен здесь в ядерных магнетонах μ_p). Таким

образом, имеем $\gamma = g_{\text{rot}}(\mu_p/k) = -4.3 \cdot 10^4$.

Приведем численную оценку эффекта. В случае жидкого кислорода нужно в формулу (I2.3), наряду с указанными выше значениями β , γ и χ , подставить $f'(0) = -0.12$, что соответствует значению $P = 2.8$. Для цилиндра радиусом $R = 2$ см и высотой $l = 10$ см при разности температур $\theta = 10^\circ$ получаем $\mathcal{M} = \alpha H$, где $\alpha = 1.1 \cdot 10^{-7}$ дин.см/э. Наименьший момент сил, какой мог быть измерен в опытах [21], составлял $2 \cdot 10^{-5}$ дин.см. По приведенной оценке такая величина \mathcal{M} достигается уже в поле $H = 200$ э. Экспериментальное обнаружение рассмотренного эффекта представляло бы значительный научный интерес.

§ 13. Конвективный факел

Поскольку напряженность гиромангнитного поля пропорциональна гидродинамическому вихрю, для обнаружения гиромангнитных эффектов следует выбирать течения с сильно неоднородным распределением скорости. Этому требованию лучше всего удовлетворяют пограничные слои - потоки, в которых падение скорости от максимальной величины практически до нуля происходит в узкой области, причем ширина ее уменьшается с ростом интенсивности движения. При формировании пограничных слоев за счет вынужденного движения жидкости, создаваемого сторонними (по отношению к потоку) силами - струйные течения, пристеночные слои на обтекаемых потоком твердых поверхностях - трудно избавиться от паразитных моментов сил. Последние вызывают вращение жидкости, и, тем самым, маскируют проявление слабых гиромангнитных эффектов. Поэтому для изучения обсуждаемых в этой главе явлений наиболее перспективны пограничные слои, возникающие при свободной тепловой конвекции вблизи нагретых поверхностей или над сосредоточенными источниками тепла. Конвективный пограничный слой на горячей стенке вертикального цилиндра изучался в двух предыдущих параграфах. Ниже будет рассмотрена возможность обнаружения гиромангнитных эффектов в восходящем конвективном потоке (факеле) над точечным источником тепла. Причиной ожидаемого вращения факела является, как и в § II, I2, гиромангнитное взаимодействие приложенного магнитного поля с вихревым конвективным течением.

Над точечным источником тепла в поле тяжести возникает осесимметричный конвективный факел (рис.4) с компонентами скорости v_r и v_z , зависящими от r и z ; в отсутствие внешнего магнитного поля, как ясно из симметрии задачи, $v_\varphi = 0$. Конвективное движение намагничивает жидкость в азимутальном направлении (M_φ пропорционально $\text{rot}_\varphi \vec{v}$), так что в вертикальном магнитном поле возникает момент сил, который и приводит, в конечном счете, к кручению факела вокруг оси симметрии. Появляющаяся компонента скорости v_φ определяется [27] из решения системы уравнений (II.3)-(II.5).

В нулевом порядке по магнитной восприимчивости χ задача описывается уравнениями (II.6), которые для факела над точечным источником принимают вид (в приближении пограничного слоя):

$$v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + g\beta T;$$

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right); \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (r v_z) + \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0.$$

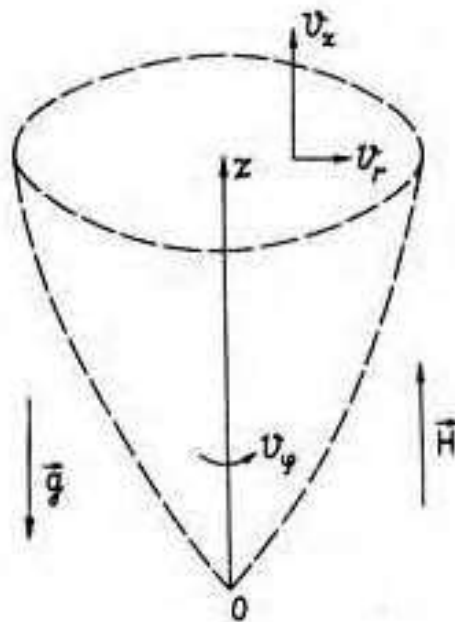


Рис.4

Из последнего уравнения, выражающего условие несжимаемости, следует, что радиальная компонента скорости исчезает при $r = 0$. Кроме того, на оси факела профили скорости и температуры должны быть гладкими функциями r , то есть имеют экстремум. Вдали от источника тепла жидкость покоится, а температура ее принимается за начало отсчета. Таким образом, имеем граничные условия

$$v_r = \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r=0; \quad (I3.2)$$

$$v_z = T = 0 \quad \text{при } r = \infty.$$

Краевая задача (I3.1)-(I3.2) допускает автомодельное преобразование, сводящее ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с безразмерной независимой переменной

$$\xi = \alpha r z^{-1/2}, \quad (I3.3)$$

где α - константа, значение которой определим позднее. Будем искать функцию тока Ψ и температуру T в виде

$$\Psi(r, z) = \nu \alpha z \psi(\xi); \quad T = \frac{\alpha^4 \nu^2}{g \beta} \theta(\xi). \quad (I3.4)$$

Компоненты скорости выражаются через функцию Ψ следующим образом (штрих означает дифференцирование по ξ):

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \alpha \nu z^{-1/2} \left(\frac{\psi'}{2} - \frac{\psi}{\xi} \right); \quad (I3.5)$$

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \alpha^2 \nu \xi^{-1} \psi'.$$

Подставляя (I3.4) и (I3.5) в исходные уравнения (I3.1), получим систему обыкновенных уравнений

$$(\psi'' - \xi^{-1} \psi')' + \xi^{-1} \psi \psi'' - \xi^{-2} \psi \psi' + \xi \theta = 0; \quad (I3.6)$$

$$\xi \theta' + P \psi \theta = 0$$

(здесь P - число Прандтля). Граничные условия для ψ и θ вытекают из (I3.2):

$$\begin{aligned} \text{при } \xi = 0 \quad \psi = \psi' = \theta' = 0; \\ \text{при } \xi \rightarrow \infty \quad \xi^{-1} \psi' = \theta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{I3.7})$$

Для избранных значений числа Прандтля - $P = 1$ и $P = 2$ - задача (I3.6)-(I3.7) имеет аналитическое решение [28]:

$$\psi = b \xi^2 (b + \xi^2)^{-1}; \quad \theta = c (b + \xi^2)^{-P/2}, \quad (\text{I3.8})$$

где b и c - константы, зависящие от P :

$$\text{при } P = 1 \quad b = 6, \quad c = 576;$$

$$\text{при } P = 2 \quad b = 4, \quad c = 1024.$$

Значение же константы a в (I3.3)-(I3.5) определяется тепловой мощностью источника W посредством интегрального условия

$$W = 2\pi\rho c_p \int_0^\infty v_z(r, z_0) T(r, z_0) r dr, \quad (\text{I3.9})$$

(c_p - коэффициент удельной теплоемкости). Последнее условие выражает закон сохранения энергии: поток тепла через любое горизонтальное сечение факела плоскостью $z = z_0$ должен равняться W . Подставляя в (I3.9) T из (I3.4) и v_z из (I3.5), находим

$$W = 2\pi\rho c_p \frac{a^4 v^3}{g\beta} I; \quad I = \int_0^\infty \psi'(\xi) \theta(\xi) d\xi,$$

откуда следует

$$a = \left(\frac{g\beta W}{2\pi\rho c_p v^3 I} \right)^{1/4}. \quad (\text{I3.10})$$

Интеграл I в (I3.10) равен 4 при $P = 1$ и $16/5$ - при $P = 2$.

Возникающая в магнитном поле компонента скорости v_φ , как и в задаче, рассмотренной в § II, оказывается пропорциональной первой степени магнитной восприимчивости χ . Вместо (II.9) для v_φ получаем уравнение

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} =$$

$$= \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) - \varepsilon \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z},$$
(I3.II)

где ε определено формулой (II.10). Скорость v_φ должна обращаться в нуль на оси факела ($r = 0$) и вдали от него ($r = \infty$), то есть

$$v_\varphi(0, z) = v_\varphi(\infty, z) = 0.$$
(I3.I2)

Входящие в уравнение (I3.II) r - и z -компоненты скорости известны из решения нулевого (по χ) приближения. Подставляя их выражения из (I3.5) в (I3.II) и полагая

$$v_\varphi = \varepsilon \alpha z^{-1/2} \xi^{-1} f(\xi),$$
(I3.I3)

получим для функции $f(\xi)$ уравнение

$$f'' + (\psi - 1) \xi^{-1} f' + \frac{1}{2} \xi (\psi'' - \xi^{-1} \psi')' = 0,$$
(I3.I4)

которое должно решаться с граничными условиями $f/\xi = 0$ при $\xi = 0$ и $\xi = \infty$, следующими из (I3.I2).

Для $P = 1$ из (I3.8) имеем

$$\psi = 6 \xi^2 (6 + \xi^2)^{-1},$$

и соответствующее (I3.I4) однородное уравнение

$$f'' + (\psi - 1) \xi^{-1} f' = 0$$

легко разрешается относительно f' :

$$f' = k \xi (6 + \xi^2)^{-3}.$$
(I3.I5)

Неоднородное уравнение (I3.I4) решается методом вариации постоянной k ; элементарное интегрирование дает

$$k = -288 \xi^2 + 2592 \ln(6 + \xi^2).$$

Подставляя это в (I3.I5) и интегрируя еще раз, получаем, с учетом граничных условий,

$$f(\xi) = \frac{144}{6 + \xi^2} - \frac{864}{(6 + \xi^2)^2} + \frac{648}{(6 + \xi^2)^2} \ln \frac{6}{(6 + \xi^2)^2}.$$

Для $P = 2$ аналогичные вычисления дают

$$f(\xi) = -\frac{48}{4 + \xi^2} + \frac{192}{(4 + \xi^2)^2} - \frac{64}{4 + \xi^2} \ln \frac{4}{4 + \xi^2}.$$

На рис.5 изображены функции $2^{-1}\psi' - \xi^{-1}\psi$ и $\xi^{-1}f$, показывающие зависимость v_r (кривая 1) и v_φ (кривая 2) от автономной переменной ξ для $P = 1$. Как видно из графиков, обе эти функции имеют в пограничном слое одинаковый порядок величин, так что для отношения амплитуд скоростей справедлива оценка

$$v_\varphi / v_r \sim \varepsilon / \nu.$$

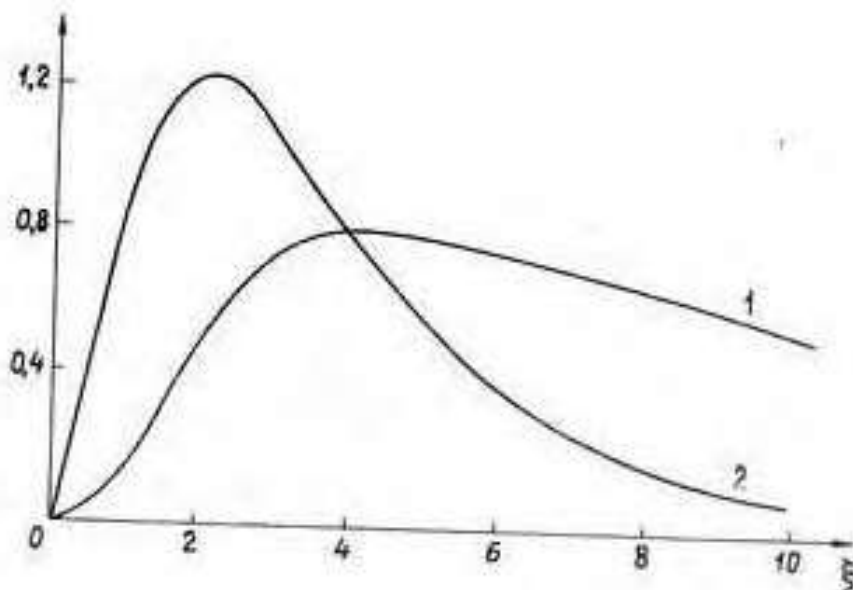


Рис.5

Для жидкого кислорода при температуре 75°K в поле $H \sim 10^4$ э имеем $\varepsilon/\nu \sim 10^{-2}$, то есть появляющаяся азимутальная скорость составляет проценты от радиальной скорости жидкости в конвективном факеле. Отсюда ясно, что для наблюдения обсуждаемого гироманнитного эффекта требуется высокая точность измерений скорости. Фундаментальным обстоятельством, облегчающим регистрацию эффекта, является его нечетность по H - направление вращения факела меняется на противоположное при изменении знака поля.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v} \vec{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \vec{H}; \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad (14.4)$$

образуют полную систему (σ - проводимость жидкости, c - скорость света).

§ 15. Дисперсионные соотношения

Невозмущенное состояние среды характеризуется постоянными равновесными значениями \vec{B}_0 , $\vec{M}_0 = \chi \vec{B}_0$, ρ_0 , p_0 . Обозначим через \vec{m} , \vec{b} , ρ' и p' малые отклонения намагниченности, магнитной индукции, плотности и давления от равновесных значений; малой того же порядка является и скорость \vec{v} . Не учитывая сначала диссипативных процессов, чему формально соответствует $\eta = \zeta = D_{\perp} = D_{\parallel} = 0$ и $\tau = \sigma = \infty$, запишем линеаризованные по малым возмущениям уравнения (14.1)-(14.4):

$$\rho_0 \dot{\vec{v}} = -\nabla \left[p' + (\vec{B}_0 \vec{q}) - \frac{\chi}{2\gamma} (\vec{B}_0 \text{rot} \vec{v}) + \frac{1}{4\pi\mu^2} (\vec{B}_0 \vec{b}) - \frac{1}{\mu} (\vec{B}_0 \vec{q}) \right] + \frac{1}{4\pi\mu} (\vec{B}_0 \nabla) \vec{b} - (\vec{B}_0 \nabla) \vec{q}; \quad (15.1)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{v} = 0; \quad \text{div} \vec{b} = 0; \quad (15.2)$$

$$\dot{\vec{b}} = (\vec{B}_0 \nabla) \vec{v} - \vec{B}_0 \text{div} \vec{v}; \quad (15.3)$$

$$\dot{\vec{m}} = \gamma [\vec{q} \vec{B}_0] - \chi \vec{B}_0 \text{div} \vec{v}, \quad (15.4)$$

которых использовано обозначение

$$\vec{q} = \vec{m} - \chi \vec{b} \quad (15.5)$$

($\mu = 1 + 4\pi\chi$ - магнитная проницаемость жидкости).
 Как видно из системы (I5.1)-(I5.4), удобно вместо \vec{b} и \vec{m} выбрать в качестве независимых переменных \vec{b} и \vec{q} ; комбинируя уравнения (I5.3) и (I5.4), получаем для величины \vec{q} уравнение

$$\dot{\vec{q}} = \gamma [\vec{q} \vec{B}_0] - \chi (\vec{B}_0 \nabla) \vec{v}; \quad (I5.6)$$

система (I5.1)-(I5.3), (I5.6) является полной.

Будем искать решение этих уравнений в виде плоской волны с частотой ω и волновым вектором \vec{k} , для чего положим величины $\vec{v}, \vec{b}, \vec{q}, \rho'$ и ρ' зависящими от координат и времени по закону

$$\exp \{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\}.$$

Исключая из (I5.1) ρ' с помощью уравнения непрерывности (I5.2) и соотношения $\rho' = u_0^2 \rho'$, где u_0 - скорость звука в отсутствие поля, получим

$$\rho \left[\omega^2 \vec{v} - u_0^2 \vec{k} (\vec{k} \vec{v}) \right] = \omega \vec{k} \left\{ \frac{(\vec{B} \vec{b})}{4\pi\mu^2} - \frac{i\chi}{2\gamma} (\vec{B} [\vec{k} \vec{v}]) + \right. \\ \left. + 4\pi\chi (\vec{B} \vec{q}) \right\} - \frac{\omega}{4\pi\mu} (\vec{B} \vec{k}) \vec{b} + \omega (\vec{B} \vec{k}) \vec{q}; \quad (I5.7)$$

$$\omega \vec{b} = [\vec{k} [\vec{B} \vec{v}]]; \quad (\vec{k} \vec{b}) = 0; \quad (I5.8)$$

$$\omega \vec{q} = i\gamma [\vec{q} \vec{B}] + \chi (\vec{B} \vec{k}) \vec{v}, \quad (I5.9)$$

(для упрощения обозначений здесь опущен индекс 0 у равновесных значений плотности и магнитной индукции). Уравнение (I5.9) удобно разрешить относительно \vec{q} ; умножая его для этого (один раз скалярно, а другой - векторно) на \vec{B} и комбинируя получающиеся соотношения, найдем

$$\omega(\omega^2 - \omega_B^2) \bar{q} = -\chi(\bar{B} \bar{k}) \left\{ \omega^2 \bar{v} - \gamma^2 \bar{B}(\bar{B} \bar{v}) - i\omega\gamma[\bar{B} \bar{v}] \right\}, \quad (15.10)$$

где $\omega_B = \gamma B$ - собственная частота однородных колебаний намагниченности. Заметим, что вектор \bar{q} , как видно из (15.10), является малой первого порядка по χ .

Рассмотрим вначале простой случай среды с линейным законом намагничивания $\bar{B} = \mu \bar{H}$; при этом намагниченность не является независимой переменной, но однозначно определяется магнитной индукцией: $\bar{M} = \chi \bar{B}$. Такое приближение несущественно отличается от приближения магнитной гидродинамики, где обычно полагают $\mu = 1$ [15]. Можно, однако, сохранить в уравнениях магнитной гидродинамики различие между \bar{B} и \bar{H} , обусловленное слабым ($\chi \ll 1$) намагничиванием жидкости. В рассматриваемом случае возмущения намагниченности и индукции связаны указанным выше соотношением пропорциональности $\bar{m} = \chi \bar{b}$, так что \bar{q} тождественно равно нулю - см. (15.5). Тогда полная система уравнений для \bar{v} и \bar{b} получится из системы (15.7)-(15.9), если положить в уравнении (15.7) $\bar{q} = 0$ и отбросить уравнение для \bar{q} (15.9):

$$\begin{aligned} \rho \left[\omega^2 \bar{v} - u_0^2 \bar{k}(\bar{k} \bar{v}) \right] &= \omega \bar{k} \left\{ \frac{(\bar{B} \bar{b})}{4\pi\mu^2} - \frac{i\chi}{2\gamma} (\bar{B}[\bar{k} \bar{v}]) \right\} - \\ &- \frac{\omega}{4\pi\mu} (\bar{B} \bar{k}) \bar{b}, \\ \omega \bar{b} &= [\bar{k} [\bar{B} \bar{v}]], \quad (\bar{k} \bar{b}) = 0. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Направим волновой вектор вдоль оси \bar{x} ; приложенное поле лежит в плоскости (\bar{x}, \bar{z}) и образует с осью \bar{x} угол θ . Проекция уравнений (15.11) образует следующую систему:

$$\rho \omega^2 v_x = - \frac{\omega k B_x}{4\pi\mu} b_x; \quad \rho \omega^2 v_y = - \frac{\omega k B_x}{4\pi\mu} b_y;$$

$$\rho(\omega^2 - u_0^2 k^2) v_z = \omega k B_x \left(\frac{1}{4\pi\mu^2} b_x + i \frac{\chi k}{2\gamma} v_y \right);$$

$$\omega b_x = k B_x v_z - k B_z v_x; \quad \omega b_y = -k B_x v_y.$$

Составляя определитель этой системы уравнений и приравнивая его к нулю, получим дисперсионное уравнение [15]

$$(\omega^2 - \omega_{A\pm}^2) \left[(\omega^2 - \omega_{A\pm}^2)(\omega^2 - \omega_0^2) - \omega^2 \omega_{Ax}^2 \right] = 0, \quad (15.12)$$

где введены обозначения для звуковой (ω_0) и альфвеновских (ω_{Ax} и $\omega_{A\pm}$) частот:

$$\omega_0 = u_0 k; \quad \omega_{Ax} = \frac{k B_x}{\mu \sqrt{4\pi\rho}}; \quad \omega_{A\pm} = \frac{k B_{\pm}}{\sqrt{4\pi\mu\rho}}. \quad (15.13)$$

Уравнение (15.12) описывает три типа волн: альфвеновскую (не связанную со сжимаемостью жидкости) волну с частотой $\omega = \omega_{A\pm}$ и две магнитогидродинамические волны, частоты которых определяются из решения биквадратного уравнения

$$(\omega^2 - \omega_{A\pm}^2)(\omega^2 - \omega_0^2) = \omega^2 \omega_{Ax}^2.$$

Вернемся теперь к рассмотрению общего случая проводящей парамагнитной жидкости, колебания которой описываются полной системой уравнений (15.7)-(15.8), (15.10). Исключая из (15.7) \bar{b} и \bar{q} с помощью уравнений (15.8) и (15.10), можно получить для скорости \bar{v} замкнутое уравнение; выпишем его проекции с точностью первого порядка по χ :

$$\left[(\omega^2 - \omega_B^2)(\omega^2 - \omega_{A\pm}^2) - 4\pi\chi \omega_{A\pm}^2 (\omega^2 - \omega_{Bx}^2) \right] v_x =$$

$$= i 4\pi\chi \omega \omega_{A\pm}^2 \omega_{Bx} v_y - \left[\sqrt{\mu} (\omega^2 - \omega_B^2) \omega_{Ax} \omega_{A\pm} + \right. \\ \left. + 4\pi\chi \omega_{A\pm}^2 \omega_{Bx} \omega_{Bx} \right] v_{\pm};$$

$$\left[(\omega^2 - \omega_B^2)(\omega^2 - \omega_{Ax}^2) - 4\pi\chi \omega^2 \omega_{A\pm}^2 \right] v_y =$$

$$= -i 4\pi\chi \omega \omega_{A\pm}^2 (\omega_{Bx} v_x - \omega_{Bx} v_{\pm});$$

$$\begin{aligned} & \left[(\omega^2 - \omega_B^2)(\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_{Ax}^2) - 4\pi\chi \omega_{Ax}^2 (\omega^2 - \omega_{Bz}^2) \right] v_x = \\ & = \left[\frac{1}{\sqrt{\mu}} (\omega^2 - \omega_B^2) \omega_{Ax} \omega_{Az} + 4\pi\chi \omega_{Ax}^2 \omega_{Bx} \omega_{Bz} \right] v_x + \\ & + i 2\pi\chi \omega_{Ax}^2 \frac{\omega}{\omega_{Bx}} (\omega^2 - \omega_B^2 - 2\omega_{Bz}^2) v_y \end{aligned}$$

(здесь использованы обозначения $\omega_{Bx} = \gamma B_x$ и $\omega_{Bz} = \gamma B_z$).
Записывая условие совместности этой системы и снова ограничиваясь
линейной точностью по χ , находим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - \omega_B^2)(\omega^2 - \omega_{Ax}^2) \left[(\omega^2 - \omega_{Ax}^2)(\omega^2 - \omega_0^2) - \right. \\ & \left. - \omega^2 \omega_{Ax}^2 \right] = 4\pi\chi \omega_{Ax}^2 \left[P(\omega) + Q(\omega) + \mathfrak{R}(\omega) \right], \end{aligned} \quad (15.14)$$

где

$$\begin{aligned} P(\omega) &= (\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_{Ax}^2)(\omega^2 - \omega_{Bz}^2); \\ Q(\omega) &= (\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_{Ax}^2)(\omega^2 + \omega_{Bz}^2); \\ \mathfrak{R}(\omega) &= -\omega^2 \omega_{Ax}^2 \omega_{Az}^2; \\ (\omega_A^2 &\equiv \omega_{Ax}^2 + \omega_{Az}^2). \end{aligned} \quad (15.15)$$

§ 16. Связанные магнитозвуковые волны

При $\chi = 0$ правая часть уравнения (15.14) обращается в нуль,
то есть дисперсионное уравнение факторизуется: оно описывает магне-

тогидродинамические волны, частоты которых определяются уравнением (15.12), и не связанные с ними однородные колебания намагниченности с ларморовой частотой ω_B . Таким образом, четыре колебательные ветви, соответствующие уравнению (15.14), связаны между собой в меру χ , так что эта связь слаба. Поэтому наибольшего эффекта следует ожидать в условиях резонанса, когда частоты каких-либо двух ветвей совпадают; при этом связь будет порядка $\sqrt{\chi}$. Формально можно было бы рассмотреть резонанс колебаний намагниченности как со звуковыми, так и с альфвеновскими волнами. В последнем случае резонансное условие $\omega_B = \omega_{A\pm}$ приводит к следующему значению для волнового числа:

$$k = \frac{\gamma \sqrt{4\pi\rho}}{\cos\vartheta}, \quad (16.1)$$

где ϑ - угол между векторами \vec{k} и \vec{B} ; Гиромагнитное отношение γ для ядерного магнетизма порядка 10^4 и для электронного - 10^7 (в системе СГС). Для плотных жидкостей из (16.1) получаются слишком большие значения k , которые не могут быть реализованы из-за сильного затухания альфвеновских волн. Рассмотрение же ионизованных газов (плазма) не представляет интереса из-за малой величины объемной восприимчивости χ . Поэтому следует рассмотреть только резонанс колебаний намагниченности со звуковыми волнами ($\omega_B \approx \omega_0$), причем $\omega_0 \sim \omega_B \gg \omega_A$.

Пренебрегая в (13.7) $\omega_{A\pm}$ по сравнению с ω , получим

$$\omega^4 (\omega^2 - \omega_B^2) (\omega^2 - \omega_S^2) = 4\pi\chi \omega_{A\pm}^2 (P + Q + R);$$

$$\omega_S = uk; \quad u^2 = u_0^2 + \frac{B^2}{4\pi\rho} \sin^2\vartheta. \quad (16.2)$$

Здесь u - скорость звука при наличии магнитного поля. В рассматриваемой (резонансной) области частот $\omega \approx \omega_S \approx \omega_B$ слагаемые $Q(\omega)$ и $R(\omega)$ малы по сравнению с $P(\omega)$ (см. (15.15)) и могут быть опущены в (16.2). В результате получим

$$(\omega^2 - \omega_S^2) (\omega^2 - \omega_B^2) = \varepsilon^2; \quad (16.3)$$

$$\varepsilon^2 = 4\pi\chi (\omega_A \omega_B \sin\vartheta \cos\vartheta)^2.$$

Отсюда находим

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ \omega_S^2 + \omega_B^2 \pm \sqrt{(\omega_S^2 - \omega_B^2)^2 + 4\varepsilon^2} \right\}. \quad (16.4)$$

Из последней формулы видно, что в области волновых чисел, при которых $|\omega_S^2 - \omega_B^2| \geq 2\varepsilon$, звуковая и магнитная ветви слабо деформированы:

$$\omega_1^2 = \omega_S^2 + \frac{\varepsilon^2}{\omega_S^2 - \omega_B^2}; \quad \omega_2^2 = \omega_B^2 - \frac{\varepsilon^2}{\omega_S^2 - \omega_B^2}. \quad (16.5)$$

На рис.6 изображен примерный ход ветвей связанных магнитозвуковых волн. При $k < k_0$, где $k_0 = \omega_B / u$ определяется из условия $\omega_S = \omega_B$, ветвь 1 соответствует звуковой, а ветвь 2 - магнитной волне; при $k > k_0$ - наоборот. "Перепутывание" магнитной и звуковой ветвей происходит в узкой области волновых чисел вблизи k_0 , для которых $|\omega_S^2 - \omega_B^2| \leq 2\varepsilon$. В самой точке k_0 из (16.4) находим

$$\omega_1 = \omega_B \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\omega_B^2} \right); \quad \omega_2 = \omega_B \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\omega_B^2} \right),$$

так что

$$\omega \quad \Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = \varepsilon / \omega_B. \quad (16.6)$$

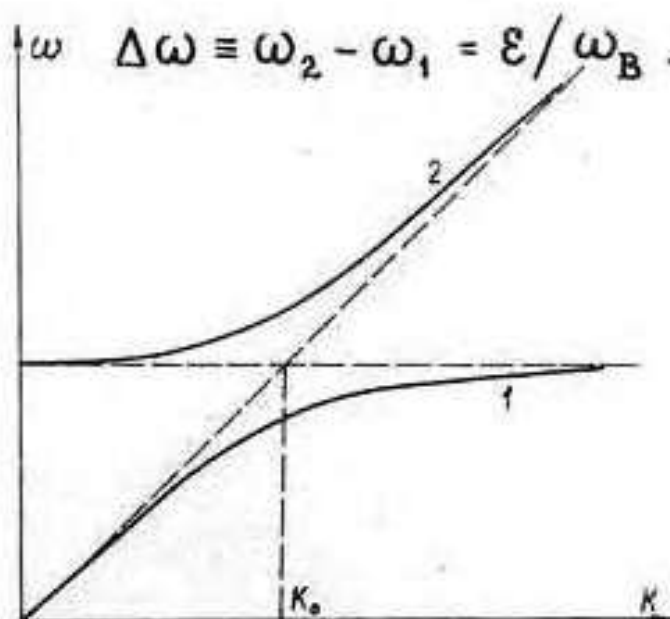


Рис.6

Подставляя $k = k_0$ в формулу для ξ (I6.3), получим из (I6.6) выражение для относительной ширины области перекутывания:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \sqrt{4\pi\chi} \left(\frac{u_A}{u} \right)^2 \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad u_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (I6.7)$$

В этой области наблюдается заметная дисперсия частоты для обеих ветвей (рис.6), так что можно говорить о волновом характере распространения магнитных возмущений (спиновые волны).

Следует заметить, что связь магнитных и звуковых колебаний имеет место и в непроводящей жидкости, однако в этом случае она гораздо слабее. Вычисления приводят к дисперсионному уравнению (I6.3), но с другой константой связи: в случае непроводящей жидкости правая часть этого уравнения должна быть умножена на малую величину $32\pi^2\chi^2$.

§ I7. Влияние диссипации

Исследуем влияние диссипативных процессов на характер распространения связанных магнитозвуковых волн. Вдали от области резонанса, где нет связи звуковых и магнитных колебаний, каждый из этих типов колебаний затухает с собственным декрементом Γ . Затухание звука обусловлено вязкостью и конечной электропроводностью

$$\Gamma_1 = \Gamma_\eta + \Gamma_\lambda; \quad \Gamma_\eta = \eta k^2 / 2\rho;$$

$$\Gamma_\lambda = \frac{\lambda k^2 u_A^2}{u^2 + \lambda^2 k^4}; \quad (\lambda = c^2 / 4\pi\sigma), \quad (I7.1)$$

а затухание магнитных колебаний - релаксацией и магнитной диффузией

$$\Gamma_2 = \Gamma_\tau + \Gamma_D; \quad \Gamma_\tau = \tau^{-1}; \quad \Gamma_D = D k^2 \quad (I7.2)$$

(мы положили в (I4.2) $D_1 = D_0 = D$). В интересующей нас резо-

наисной области дисперсионное соотношение, полученное аналогично (I6.4), но с учетом диссипативных членов в уравнениях (I4.1), (I4.2) и (I4.4), имеет вид

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\omega_s - i\Gamma_1)^2 + (\omega_B - i\Gamma_2)^2 \pm \sqrt{[(\omega_s - i\Gamma_1)^2 - (\omega_B - i\Gamma_2)^2]^2 + 4\varepsilon^2} \right\}. \quad (I7.3)$$

При $\omega_s = \omega_B$ эта формула дает

$$\omega^2 = \omega_B^2 - i\omega_B(\Gamma_1 + \Gamma_2) \pm \omega_B \sqrt{(\varepsilon/\omega_B)^2 - (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2}. \quad (I7.4)$$

Если разность декрементов Γ_1 и Γ_2 такова, что $\omega_B |\Gamma_1 - \Gamma_2| > \varepsilon$, то под корнем в (I7.4) стоит отрицательная величина и перепутывания звуковой и магнитной ветвей не происходит. Наличие связи ε приводит лишь к изменению декрементов. Из (I7.3) получается в этом случае стандартная резонансная формула для поглощения

$$\Gamma_s = \Gamma_1 - \frac{\varepsilon^2(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{(\omega_s^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega_B^2(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2}; \quad (I7.5)$$

$$\Gamma_m = \Gamma_2 + \frac{\varepsilon^2(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{(\omega_s^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega_B^2(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2}.$$

В другом предельном случае, когда

$$\omega_B \Delta\Gamma < \varepsilon \quad (\Delta\Gamma = |\Gamma_1 - \Gamma_2|), \quad (I7.6)$$

полученные выше результаты, касающиеся перепутывания колебательных ветвей, сохраняются.

В заключение выясним условия, при которых возмущения намагниченности имеют волновой характер, а также установим область существования волнового решения.

О магнитных волнах можно говорить, очевидно, лишь в том случае, если вещественная часть групповой скорости этих волн гораздо больше мнимой ее части. При выполнении условия (I7.6) существует

область перепутывания магнитной и звуковой ветвей, ширина которой $\Delta\omega$ порядка ε/ω_B . В этой области волновое решение всегда существует, однако указанное условие является весьма жестким из-за малости ε . Покажем, что при малом коэффициенте магнитной диффузии область существования волнового решения может оказаться более широкой. При $\omega_B \Delta\Gamma > \varepsilon$ формула (17.3) дает для частоты магнитной волны

$$\omega = \omega_B \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2 (\omega_S^2 - \omega_B^2)}{\omega_B^2 (\omega_S^2 - \omega_B^2)^2 + 4 \omega_B^2 (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2} \right\} - i \left\{ \Gamma_2 + \frac{\varepsilon^2 (\Gamma_1 - \Gamma_2)}{(\omega_S^2 - \omega_B^2)^2 + 4 \omega_B^2 (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2} \right\}. \quad (17.7)$$

Вещественная часть этого выражения как функция волнового числа показана на рис. 7. Находя из (17.7) групповую скорость $\omega = \partial\omega/\partial k$ и учитывая выражение (17.2) для Γ_2 , получим условие $\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$ в виде

$$\omega_B \Delta\Gamma \ll \varepsilon \frac{u}{2\sqrt{\omega_B D}}. \quad (17.8)$$

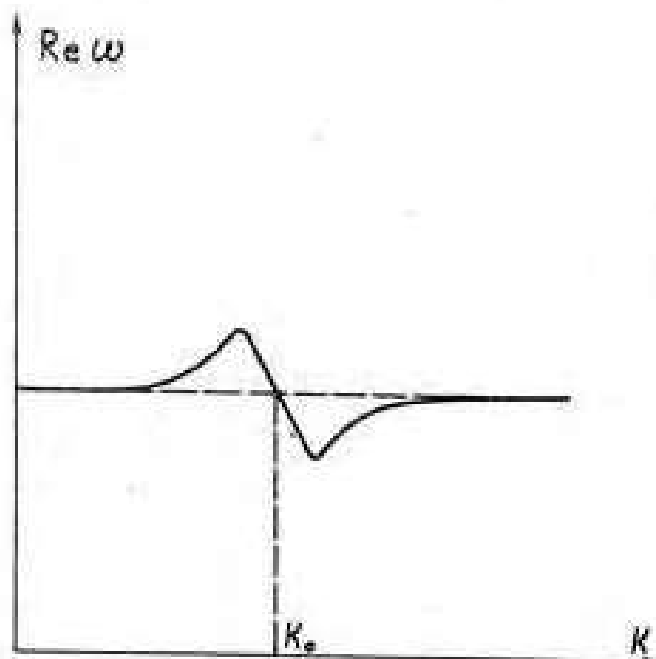


Рис. 7.

Частотная область существования волнового решения в этом случае $\Delta\omega \approx \Delta\Gamma$. Условие (I7.8) является менее жестким, чем указанное ранее (I7.6), если $\omega_{\text{в}} D \ll u^2$, что всегда выполняется для ядерных парамагнетиков [I7]. Для электронных парамагнетиков это неравенство имеет место при малой концентрации носителей тока [32].

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. Л., Наука, 1975.
2. Сорокин В.С. О внутреннем трении жидкостей и газов, обладающих скрытым моментом импульса. - ЖЭТФ, 13, 306, 1943.
3. Condiff D.W., Dahler J.S. Fluid mechanical aspects of anti-symmetric stress. - Phys. Fluids, 1964, 7, 842.
4. де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., Мир, 1964.
5. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В. Асимметричная гидромеханика. - ПММ, 1965, 29, 297.
6. Шлиомис М.И. К гидродинамике жидкости с внутренним вращением. - ЖЭТФ, 1966, 51, 258.
7. Халатников И.М. Кинетические коэффициенты в гелии II. - ЖЭТФ, 1952, 23, 8.
8. Бекаревич И.Л., Халатников И.М. Феноменологический вывод уравнений вихревого движения He II. - ЖЭТФ, 1961, 40, 920.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика, часть I. М., Наука, 1976.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М., Наука, 1963.
12. Каган Ю., Максимов Л.А. Явления переноса в парамагнитном газе. - ЖЭТФ, 1961, 41, 3.
13. Каган Ю., Максимов Л.А. О полной системе гидродинамических уравнений для газов с вращательными степенями свободы. - ЖЭТФ, 1970, 59, 2059.
14. Шлиомис М.И. Об уравнениях движения жидкостей с гиромагнитными свойствами. - ЖЭТФ, 1967, 53, 1125.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1957.
16. Сликтер Ч. Основы теории магнитного резонанса. М., Мир, 1967.
17. Абрагам А. Ядерный магнетизм. М., ИЛ, 1963.
18. Таблицы физических величин. Справочник / Под редакцией И.К.Кикоина. М., Атомиздат, 1976.
19. Вонсовский С.В. Магнетизм. М., Наука, 1971.

20. Scott G.G. Review of gyromagnetic ratio experiments.-
Rev.Mod.Phys., 1962, 34, 102.
21. Scott G.G., Sturmer H.W., Williamson R.M. Gas torque anomaly
in weak magnetic fields.- Phys.Rev., 1967, 158, 117.
22. Scott G.G., Smith G.W., Fry D.L. Thermomagnetic-torque
measurements in dilute polyatomic gases. - Phys.Rev., 1970,
A2, 2080.
23. Waldmann L. On a gyro-thermal effect with polyatomic gases
in a magnetic field.- Zs.Naturforsch., 1967, 22a, 1678.
24. Шлиomis М.И. Об одном гиромагнитном эффекте в жидком парамаг-
нетике. - ЖЭТФ, 1974, 66, 1426.
25. Гершуни Г.З., Муховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжи-
маемой жидкости. М., Наука, 1972.
26. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1969.
27. Степанов В.И., Шлиomis М.И. Конвективный факел в парамагнитной
жидкости. - В кн.: Конвективные течения и гидродинамическая ус-
тойчивость. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1979, с.61.
28. Brand R.S., Lahey F.J. The heated laminar vertical jet.-
J.Fluid Mech., 1967, 29, 305.
29. Зайцев В.М., Шлиomis М.И. Связанные магнитозвуковые волны в
проводящей парамагнитной жидкости. - Изв. АН СССР, Мех.жидк. и
газа, 1969, № 2, 26.
30. Ахмезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны.
М., Наука, 1967.
31. Шапошников И.Г., Шлиomis М.И. Уравнения магнитной гидродинами-
ки парамагнитных сред. - Изв. АН СССР, Мех.жидк. и газа, 1969,
№ 1, 4.
32. Альтшулер С.А., Козырев Б.М. Электронный парамагнитный резонанс.
М., Физматгиз, 1961.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава I. ЖИДКОСТИ С ВНУТРЕННИМ ВРАЩЕНИЕМ	5
§ I. Гидродинамика молекул со спином	5
§ 2. Законы сохранения	6
§ 3. Термодинамические соотношения	8
§ 4. Вывод уравнений	10
§ 5. Примеры применения уравнений движения	14
Глава 2. ПАРАМАГНИТНЫЕ ЖИДКОСТИ	17
§ 6. Связь магнитных и вращательных механических степеней свободы	17
§ 7. Уравнения движения	18
§ 8. Стационарное течение в канале	27
§ 9. Влияние продольного магнитного поля на течение Пуазейля	31
Глава 3. ПИРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЖИДКИХ ПАРАМАГНЕТИКАХ	35
§ 10. Парамагнитные аналоги эффектов Эйнштейна-де Гааза и Барнетта	35
§ 11. Течение жидкости около нагретого цилиндра	38
§ 12. Термомагнитный момент сил	43
§ 13. Конвективный факел	46
Глава 4. ВОЛНЫ В ЖИДКОМ ПАРАМАГНЕТИКЕ	53
§ 14. Уравнения движения проводящего парамагнетика	53
§ 15. Дисперсионные соотношения	55
§ 16. Связанные магнитозвуковые волны	59
§ 17. Влияние диссипации	62
ЛИТЕРАТУРА	66